REVISTA DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL (UFMS)

Volume 10, número 24 – 2017

ISSN 2359-2842

Interagindo com os Números Complexos: o problema das raízes sofistas

Interacting with the Complex Numbers: the problem of roots sophists

Cassiano Scott Puhl[1]

Isolda Gianni de Lima[2]

RESUMO

O presente artigo apresenta uma proposta didática potencialmente significativa, para a introdução ao estudo sobre números complexos no Ensino Médio, que faz uma referência ao uso do contexto histórico dos conjuntos dos números complexos. Os PCN trazem que um novo conjunto numérico deve ser introduzindo ressaltando a sua abordagem histórica. Desta forma, planejaram-se atividades para o estudante entender a matemática como um processo e não apenas como resultado, como muitas vezes lhe é apresentada. A teoria de David Ausubel, da aprendizagem significativa, fundamentou a criação de um objeto de aprendizagem virtual (OA), no qual o estudante interage como sujeito ativo na sua aprendizagem. Esta proposta, quando aplicada, propiciou um ambiente reflexivo e de trocas de conhecimentos, principalmente em espaços de interação no OA. Os resultados da experiência, oriundos de observações, registros e relatos de estudantes, revelam estudantes predispostos para aprenderem um novo conteúdo, o conjunto dos números complexos.

PALAVRAS-CHAVE: Números Complexos. Aprendizagem Ativa e Significativa. Contexto Histórico. Raízes Sofistas.

ABSTRACT

This article presents a potentially significant didactic proposal for the introduction to the study of complex numbers in high school, which covers the historical development of this set. The PCN brings a new numeric set should be introducing emphasizing his historical approach. In this way, planned activities for the student feel like a 16th century mathematician to solve a challenge which results in roots that were called sophists. David Ausubel's theory of meaningful learning, and he backed the creation of a virtual learning (OA), in which the student interacts as active in your learning. This proposal, when applied, provided a reflective environment and knowledge exchanges, especially in interaction spaces on OA. The results of the experiment, as we highlight with observations, records and reports of students, demonstrate the achievement of goals that were proposed.

KEYWORDS: Complex Numbers. Active and Meaningful Learning. Historical Context. Roots Sophists.

[1] Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul. c.s.puhl@hotmail.com.
[2] Universidade de Caxias do Sul. iglima1@gmail.com.

Introdução

A educação brasileira vem sendo debatida e revista, passando por transformações, como as sugeridas por meio do programa do Ensino Médio Inovador e, recentemente, pelo Novo Ensino Médio – em todos os níveis de ensino – com propostas de atualização e de aperfeiçoamento, especialmente, de estratégias de aprendizagem visando atender o perfil atual dos estudantes. Ao mesmo tempo, muitos se mostram desmotivados e desinteressados em aprender, principalmente quando não entendem para que serve este ou aquele conteúdo. Os professores, em sala de aula, são agentes de mudanças e podem contribuir para reverter essa situação de estudantes desmotivados.

O discurso que se ouve é que o professor não é dono do saber, tendo como papel principal de ser o mediador na construção de aprendizagens. Um discurso que sugere práticas em que o estudante é ativo, construtor de conhecimento, o que vai muito além do que lhe é propiciado com a transmissão de conteúdos. As teorias construtivistas ou interacionais recomendam práticas educativas nessa direção, mas para virarem cultura escolar carecem de muitos estudos, tempo de planejamento, de experimentação de interação entre pares, condições muito diferentes do que as que têm a maioria dos professores. Por consequência, enquanto o ambiente educacional não se adapta a essa nova tendência, os assuntos da escola parecem não fazer sentido para alguns estudantes, que não querem ou não conseguem envolver-se com o que se passa em sala de aula e para quem estudar é uma ação cada vez menos frequente. Isso tem reflexos no trabalho do professor, que não consegue mais abordar muitos dos assuntos, mesmo alguns relevantes, de cada série escolar.

O estudo dos números complexos, por exemplo, está sendo deixado de lado por boa parte dos professores do Ensino Médio, como mostram as pesquisas de Batista (2004) e Mello e Santos (2005). Por outro lado, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) afirmam que os números complexos devem estar no currículo de Matemática, destacam que "devem ser apresentados como uma histórica necessidade de ampliação do conjunto de soluções de uma equação, tomando-se, para isso, uma equação bem simples, a saber, $x^2 + 1 = 0$" (BRASIL, 2006, p. 71). Porém, pesquisas mostram que muitos professores não sabe como desenvolver o contexto histórico em suas aulas (GOMES, 2005; LUNAVO, 2015; SCHENDER, 2013).

Os professores em geral, aprenderam sobre a História da Matemática na sua formação, em uma disciplina no Ensino Superior. Conheceram fatos, por vezes, isolados do desenvolvimento de algumas teorias matemáticas, mas não o suficiente para ser aplicado no Ensino Básico (GOMES, 2005). Prevalece, assim, o caráter informativo do contexto histórico, não estabelecendo relações com as atuais tendências educacionais, que se preocupam em formar cidadãos críticos e criativos, que saibam lidar com problemas sociais e afetivos, para o desenvolvimento da sociedade (VASCONCELLOS, 2001).

Além disso, por muitos anos os autores dos livros didáticos, desconsideraram a importância da história, sendo abordada, quando aparecia num ou outro livro, de modo informativo com propósito motivacional do estudo, não tendo como foco o desenvolvimento de conceitos na aprendizagem (GOMES, 2005; SCHENDER, 2013). Mendes afirma: "a história se apresenta sob um caráter meramente ilustrativo e informativo, ou seja, aparece como um elemento descartável nas atividades de sala de aula, pois, do modo como é abordada, não é indispensável à construção dos conceitos matemáticos". (MENDES, 2001, p. 26 apud GOMES, 2005).

Portanto, como uma sugestão para professores do Ensino Médio, criou-se uma sequência de atividades para números complexos, que integra o contexto histórico e é fundamentada na teoria da aprendizagem significativa de Ausubel (2003). Dessa forma, com atividades potencialmente significativas tem-se a oportunidade de que o estudante seja ativo na sua aprendizagem, e ao contemplar-se o desenvolvimento histórico dos números complexos, destaca-se que é uma construção matemática recente e que foi realizada por diversos cientistas, como: Diophanto de Alexandria, Girolamo Cardano, Albert Girard, Gottfried Wilhelm Leibniz, Leonhard Euler, Augustin Cauchy, entre outros.

Assim, neste trabalho, é apresentada a análise de uma sequência de atividades para abordar o contexto histórico dos números complexos, considerando conhecimentos prévios dos estudantes e uma estratégia ativa de aprendizagem.

Referencial teórico

A história da matemática é um tema importante na formação do estudante, pois pode conhecer a evolução de conceitos, erros e acertos e sem verdades absolutas, um modo de apresentar a Matemática como uma ciência construída pelo homem. Este é um recurso didático com potencial para a aprendizagem de conceitos. Para Valdés (2002 apud LUNAVO, 2015), "se estabelecermos um laço entre o aluno, a época e a personagem relacionado com os conceitos estudados, se conhecerem as motivações e dúvidas que tiveram os sábios da época, então ele poderá compreender como foi descoberto e justificado um problema, um corpo de conceitos, etc.".

Em concordância, os PCN do Ensino Médio enfatizam que o estudante deverá fazer relações entre a evolução da humanidade e as etapas da história da matemática, mesmo que, conforme, Vianna (1995) há alguns argumentos negativos à história que foram obtidos de estudos historiográficos:

- O passado da Matemática não é significativo para a compreensão da Matemática atual;
- Não há literatura disponível para uso dos professores da Educação Básica;
- Os poucos textos existentes destacam os resultados, mas nada revelam sobre a forma como se chegou a esses resultados;
- O caminho histórico é mais árduo para os estudantes;
- O tempo despendido no estudo da História da Matemática deveria ser utilizado para aprender mais Matemática.

Para avançar na direção da história como recurso pedagógico, desenvolvendo de forma significativa o contexto histórico dos números complexos, fundamentou-se a sequência de atividades sob a luz da teoria de aprendizagem significativa de Ausubel (2003). Segundo Ausubel, Novak e Hanesian (1980, p. 34), "a essência do processo de aprendizagem significativa é de que as ideias expressas simbolicamente são relacionadas às informações previamente adquiridas através de uma relação não arbitrária e substantiva (não literal)". O conteúdo a ser aprendido deve se relacionar com conhecimentos já existentes, chamados de subsunçores, que atuam como âncoras para novos conhecimentos e ideias (AUSUBEL, 2003).

Além, da relação não arbitrária e substantiva, existem outros dois aspectos a destacar para se desenvolver a aprendizagem significativa. O estudante precisa ter uma predisposição para compreender e aprender. A predisposição não se refere somente à vontade do estudante de aprender, mas, também, uma disposição mental para a aprendizagem, iniciando pelos subsunçores. Se o estudante não possui um subsunçor claro, estável e conciso na sua estrutura cognitiva, a predisposição é afetada pela dificuldade em assimilar os conceitos abordados, atrasando o processo de aprendizagem. Outro elemento que influencia é a relevância que o estudante atribui para o objeto de estudo, além dos fatores sociais e afetivos. Assim, pode-se definir a predisposição como um "esforço deliberado, cognitivo e afetivo, para relacionar de maneira não arbitrária e não literal os novos conhecimentos à estrutura cognitiva". (MOREIRA, 2003, p. 2).

Assim, a seguinte questão merece reflexão: "É possível orientar alguém que não quer aprender?" Isto é impossível, porque, para Ausubel (2003), a aprendizagem significativa somente se efetivará se o estudante tiver vontade de aprender; assim, além de mediador o professor tem a função de motivador, ou seja, de despertar a sede para a aprendizagem. Uma forma de motivar os estudantes é propiciar que tenham acesso a possíveis aplicações sobre o conteúdo estudado, dando sentido a este assunto.

O material propiciado pelo professor deve ter um potencial significativo, deve ser um material bem elaborado, que o estudante manuseia facilmente e consiga aprender com ele. (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980). Este material não é para ser copiado e depois repetido em testes de aproveitamento, mas para ser compreendido, para ser reconhecido e aplicado. A função do professor ou do material não é a de transmitir o conhecimento, mas o de guiar o processo, permitindo e favorecendo a construção de conceitos.

Guiando-se por tais orientações, apresenta-se uma estratégia de aprendizagem para compreender os conceitos iniciais de números complexos, partindo dos subsunçores dos estudantes. Segundo Ausubel (2003), quando um novo conteúdo é assimilado, alterando e ampliando os subsunçores dos estudantes, ou seja, quando o novo conteúdo é desenvolvido envolvendo um ou mais conhecimentos presentes na estrutura cognitiva do estudante, se desenvolveu uma aprendizagem subordinada. Esses são os pressupostos teóricos que fundamentam a estratégia de aprendizagem desenvolvida e apresentada nesse artigo.

Métodos e estratégias de aprendizagem

A estratégia de aprendizagem, proposta neste artigo, foi construída com fundamentos da aprendizagem significativa, no decorrer de uma pesquisa de mestrado profissional, denominada Números Complexos: interação e aprendizagem (PUHL, 2016), em que, além da dissertação, construiu-se, como produto, um objeto de aprendizagem virtual (OA). Esse recurso digital teve como base algumas pesquisas realizadas com professores do Ensino Básico e do Ensino Superior, leitura de trabalhos científicos, participação em eventos de Educação Matemática e uma perspectiva própria de metodologia para a aprendizagem de números complexos. O trabalho e estudo desenvolvidos estão disponíveis para conhecimento[3].

O OA foi construído para ser dinâmico, agradável e dialógico para se aprender sobre números complexos, podendo ser material de apoio em sala de aula ou em atividades complementares aos estudos em classe e, também, para estudantes que querem realizar uma

[3] O objeto de aprendizagem construído está disponível em: <http://matematicacomplexa.hol.es/>. A dissertação do mestrado profissional está disponível em: <https://repositorio.ucs.br/xmlui/handle/11338/1144>.

aprendizagem autônoma, sem a orientação de um professor e sem a obrigatoriedade de uma sequência definida de passos, atividades ou leituras a realizar.

Os espaços do OA, destinados a conhecimentos específicos e estratégias ativas, delinearam uma prática pedagógica própria, com a qual se pretendeu promover o envolvimento dos estudantes, na fase experimental, para que aprendessem e compreendessem conceitos básicos e operações com números complexos. Assim, no que segue, apresenta-se um recorte da sequência de atividades aplicada em uma classe com 18 estudantes, do terceiro ano do Ensino Médio.

Inicialmente, para envolver o estudante num contexto histórico, dos matemáticos do século XVI, foi proposto que acessassem, no OA, o espaço de aprendizagem "Problema Histórico", onde um personagem, denominado Radice[4], desafia e instiga os estudantes para avançarem nos estudos. Radice relata que os desafios entre matemáticos eram comuns por volta de 1550, e propõe aos estudantes que resolvam o seguinte problema: "Diga dois números cuja soma é 6, e a multiplicação é 13" (Figura 1). Esse problema é similar ao que Cardano teria resolvido no século XVI, que foi dividir o número 10 em duas partes cujo produto fosse 40 (PINTO JÚNIOR, 2009; SANTOS, 2013; MILIES, 2003). Dessa forma, os alunos foram imersos no contexto histórico dos números complexos, em que os procedimentos para encontrar a solução, provavelmente, são os mesmos dos matemáticos daquela época: a resolução de sistema de equações com duas variáveis e a resolução de uma equação do 2º grau.

[4] O nome Radice foi construído com uma pesquisa sobre o desenvolvimento histórico dos números complexos, desde a sua origem, como números "sofisticados", até a sua consolidação como conjunto numérico. Desta forma, com o nome Radice homenageiam-se alguns matemáticos que contribuíram para esse desenvolvimento, como: Niccolò Tartaglia, Leonhard Euler e Augustin-Louis Cauchy; e cujo, o início do nome,Radic, deve-se ao símbolo de radical, que caracteriza o personagem.

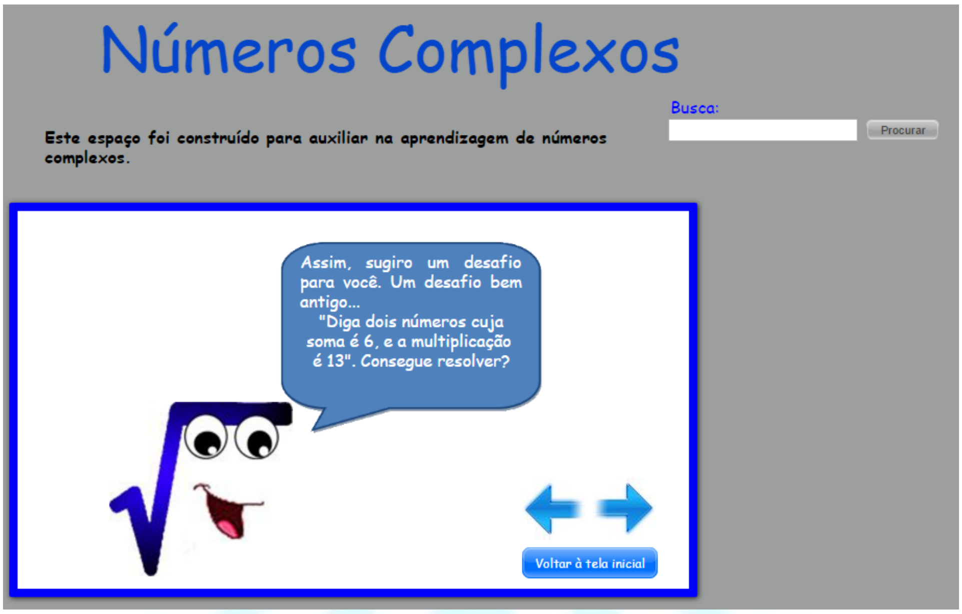


Figura 1 – Desafio proposto aos estudantes.
Fonte: Objeto de aprendizagem "Números Complexos: interação e aprendizagem" (2016).

Caso os estudantes não se recordem de como resolver um sistema de equações com duas variáveis ou uma equação do 2º grau, Radice os ajudará a relembrarem desses conceitos. Na resolução do desafio, espera-se que os estudantes cheguem à raiz quadrada de um número negativo, um problema para muitos, que afirmam que este número não existe. O correto é pensar que esse número não pertence ao conjunto dos números reais, esse conhecido dos estudantes, diferentemente do conjunto dos números complexos. O reconhecimento dos números complexos, como tal, demorou a acontecer. Por volta de 1700, nem sequer os números negativos eram aceitos, porém expressões com a raiz quadrada negativa se faziam presentes nas soluções de algumas equações algébricas, o que intrigava alguns estudiosos (ROQUE, 2012).

Desta forma, o estudante pode se colocar no lugar do matemático, compreendendo e passando por mesmos sentimentos, assim, a "utilização da História da Matemática em sala de aula também pode ser como um elemento importante no processo de atribuição de significados aos conceitos matemáticos" (BRASIL, 2006, p. 86). Nas interações com o Radice, estimula-se que os estudantes acompanhem e façam alguns cálculos (Figura 2), pois como Valdés (2002 apud LUNAVO, 2015) destaca "o valor do conhecimento histórico não consiste em ter uma bateria de histórias e anedotas curiosas para entreter os alunos, a história pode e deve ser utilizada para entender e fazer compreender uma ideia mais difícil e complexa de modo mais adequado".

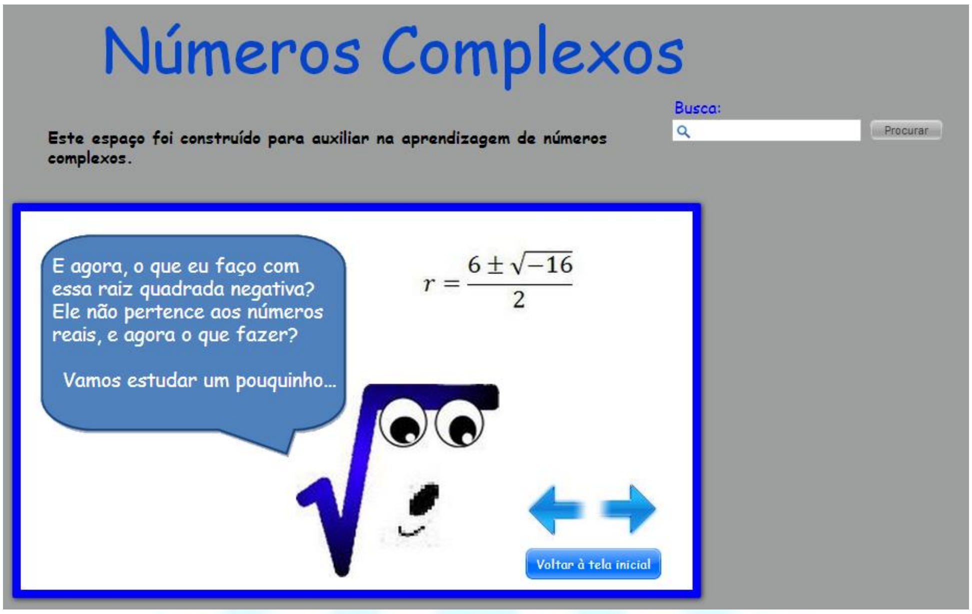


Figura 2 – Chegando a um problema, onde o Radice e o estudante precisam estudar.
Fonte: Objeto de aprendizagem "Números Complexos: interação e aprendizagem" (2016).

Avançando no aplicativo, Radice apresenta um novo conjunto numérico, o dos Números Complexos e a unidade imaginária. Com isso, os estudantes, junto com Radice, resolvem o desafio inicial, determinando os números complexos como conjunto solução. Mas Radice, insatisfeito somente com a solução, motiva o estudante a comprovar o resultado, como foi feito por Cardano (Figura 3).

Uma comprovação científica para esse tipo de número foi proposta por Bombelli (PINTO JÚNIOR, 2009; SANTOS, 2013; NOBRE, 2013; MILIES, 2003). Radice ainda ressalta que não foram as equações de 2° grau que motivaram o estudo dos números complexos, mas sim, as equações de 3° grau. Ressalta-se, dessa forma, o contexto e o processo histórico do desenvolvimento dos números complexos, estando em consonância com os PCN ao destacarem que esses números "devem ser apresentados como uma histórica necessidade de ampliação do conjunto de soluções de uma equação, tomando-se, para isso, uma equação bem simples, a saber, $x^2 + 1 = 0$" (BRASIL, 2006, p. 71). Terminada essa atividade, os estudantes têm uma ideia, um conceito inicial de números complexos.

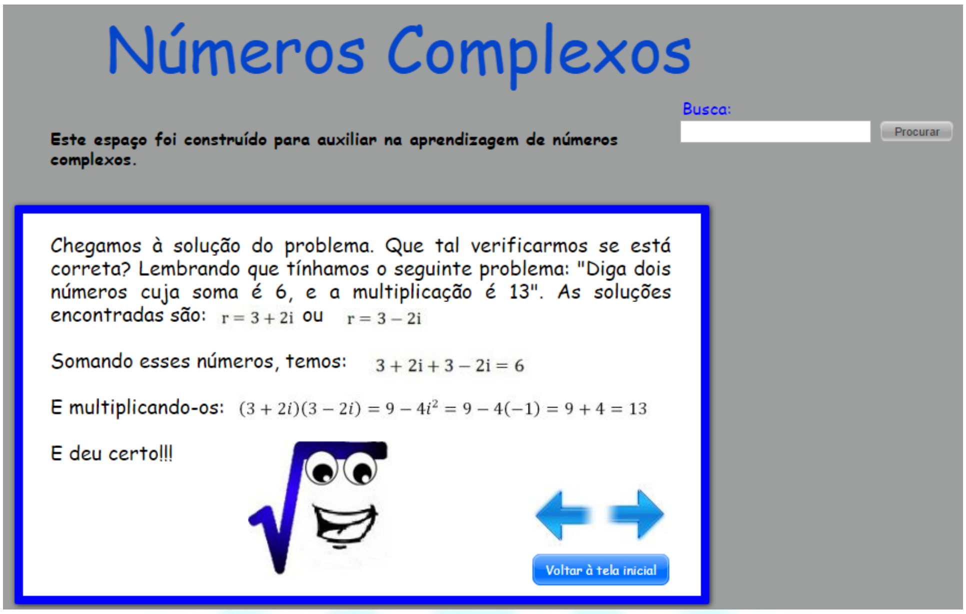


Figura 3 – Radice verificando as raízes do desafio.
Fonte: Objeto de aprendizagem “Números Complexos: interação e aprendizagem”.

Por fim, para ampliar o conhecimento da evolução dos números complexos, foi realizada uma pesquisa dos principais matemáticos que contribuíram para o estudo dos números complexos, entre eles: Cardano, Raphael Bombelli, Albert Girard, Leibniz, Abraham de Moivre, Leonhard Euler, Caspar Wessel, Jean_Robert Argand, Carl Friederich Gauss e Agustin Cauchy. A pesquisa foi realizada em grupos, ficando cada grupo responsável pela confecção de um cartaz de apresentação do matemático e de um texto para ser anexado na linha do tempo do OA. Os cartazes também formaram uma linha do tempo, ao serem expostos na sala de aula e os textos produzidos deram origem ao espaço de aprendizagem “Caminhada Histórica”[5], do OA, onde fica visível que esta teoria demorou décadas para ser construída e que diversos matemáticos participaram desse processo.

Essa foi, então, a estratégia de aprendizagem planejada, ressaltando o contexto e o desenvolvimento histórico dos números complexos. No que segue apresentam-se os resultados dessa experiência, realizada no segundo semestre de 2014, que superaram os objetivos inicialmente entendidos como possíveis de serem alcançados.

Análise e reflexões sobre os resultados

---

[5] A *Caminhada histórica* é um espaço estruturado como uma linha do tempo, em que são apresentados os matemáticos que contribuíram para a formalização da teoria dos números complexos. Como os demais conjuntos numéricos, o desses números foi uma construção humana, que percorreu séculos e contou com a contribuição de diversos matemáticos de diferentes nacionalidades.

Ao investigar a própria prática docente, assume-se o papel de professores pesquisadores (BORTONI-RICARDO, 2008) e, como tal, a intervenção na sala de aula esteve implicada em todo o andamento da pesquisa. Assim sendo, agora na análise, os relatos não são isentos dessa implicação, são, ao contrário, um instrumento fundamental de uma interpretação própria, seja das observações diretas ou do que se registrou no diário de bordo, importante para qualificar a pesquisa. Segundo Bortoni-Ricardo:

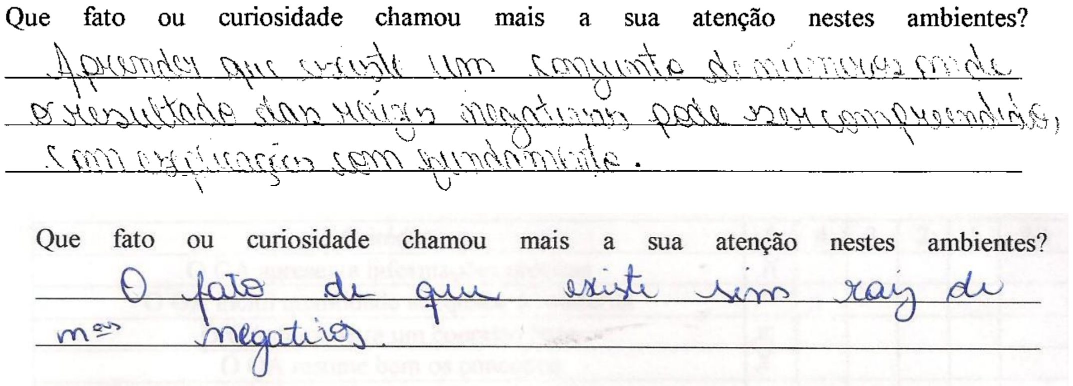
> O pesquisador não é um relator passivo e sim um agente ativo na construção do mundo. Em outras palavras, o pesquisador nas ciências sociais, incluindo aí a pesquisa educacional, é parte do mundo social que pesquisa. Ele age nesse mundo social e é também capaz de refletir sobre si mesmo e sobre as ações como objetos de pesquisa nesse mundo (BORTONI-RICARDO, 2008, p. 59).

Para a elaboração das análises, optou-se por seguir o mesmo percurso da estratégia de aprendizagem, reunindo, descortinando e interpretando fatos e ações decorrentes do que foi planejado, à luz do referencial teórico.

Quando se propôs essa estratégia de aprendizagem, em duplas, tinha-se a hipótese de que os estudantes saberiam montar o sistema que resolveria o desafio do Radice. Essa hipótese foi confirmada, somente, uma dupla não conseguiu montar e resolver o sistema. Porém, as duplas ficaram estagnadas, ao se depararam com a $\sqrt{-16}$. Para os estudantes, esse desafio não tinha solução. A maioria deles, 12 (67%), afirmou que, quando encontravam uma raiz quadrada de número negativo (um discriminante negativo numa equação de 2° grau), respondiam *não existe* ou que não era possível resolver a equação; os outros seis (33%) não lembraram sobre como proceder. Os estudantes não tinham a compreensão de que esse número faz parte de um conjunto numérico diferente dos reais, e afirmavam que esse número não existia.

Ao interagir com o OA e com Radice, foi determinado um novo conjunto numérico, denominado números complexos. Com as informações apresentadas pelo Radice, todos os estudantes puderam superar essa concepção, reconhecimento de que a raiz quadrada de número negativo não existe como número real, porém existe como número complexo.

A existência de raiz quadrada de número negativo foi o que mais chamou a atenção dos estudantes; para confirmar, seguem os relatos de dois estudantes (Figura 4). Para alguns foi um processo árduo e complexo reconstruir o conceito de conjuntos numéricos. Os comentários mostram que houve uma construção de conhecimento, a compreensão e a reconciliação dos novos significados do subsunçor do estudante.


Que fato ou curiosidade chamou mais a sua atenção nestes ambientes?
Aprendi que existe um conjunto de números onde o resultado das raízes negativas pode ser compreendido, com explicações com fundamento.

Que fato ou curiosidade chamou mais a sua atenção nestes ambientes?
O fato de que existe sim raiz de nºs negativos.

Figura 4 – Comentários dos estudantes sobre o que chamou atenção na interação com o OA
Fonte: Elaborada pelo autor (2016).

Desta forma, os estudantes estavam predispostos e ansiosos para aprender e resolver o desafio do Radice. Curiosa, uma dupla resolveu com a calculadora a $\sqrt{-16}$, porém encontrou o resultado zero e questionou: “Porque dá zero?”. A dupla não havia reparado que a calculadora indicava um erro, mas ao repetir o cálculo reparou nesse detalhe. Procurando motivar ainda mais as duplas, o professor argumentou: “Daqui a pouco vocês vão ser mais espertos do que as calculadoras, pois elas não sabem operar com números complexos e vocês vão saber”.

Voltando ao OA, os estudantes ficaram atentos às informações do Radice, que desmembrou a $\sqrt{-16}$ numa multiplicação de dois radicais, onde um seria a $\sqrt{-1}$ que é o valor da unidade imaginário “i”, e outro a $\sqrt{16}$ que é 4. Radice, com auxílio das propriedades de radiciação, definiu a unidade imaginária[6], assim os estudantes deduziram que a $\sqrt{-16}$ é igual 4i. Inicialmente, a turma estranhou o resultado, era visível no semblante deles, também é aceitável essa reação, pois nunca haviam operado com esse tipo de número. Provavelmente, os matemáticos de antigamente, quando se depararam com raízes quadradas de números negativos, também tinham o mesmo sentimento dos estudantes.

Durante a montagem e resolução do sistema, vários subsunçores foram sendo requisitados: a representação e resolução de sistema linear, resolução de equação de 2º grau e propriedades da radiciação. Os subsunçores foram ativados com o auxílio do Radice, e progressivamente os estudantes foram resolvendo o desafio.

[6] Dante define a unidade imaginária como “**i** é a unidade imaginária, tal que $i^2 = -1$” (2008, p. 592).

Figura 5 – Estudantes resolvendo o desafio do Radice
Fonte: Elaborada pelo autor (2016).

O processo de reconciliação integradora foi se consolidando, os subsunçores foram ativados e novos significados foram sendo gradualmente agregados, propiciando a ancoragem da resolução de equações de 2º grau com discriminante negativo. Essa pode ser considerada uma evidência de que a aprendizagem subordinada se desenvolveu. Todos os estudantes tinham o conhecimento da resolução de equações de 2° grau e compreenderam a definição de unidade imaginária; assim, eles reforçaram os subsunçores para ancorar o novo conhecimento, a resolução dessas equações com discriminante negativo, realizando uma aprendizagem subordinada.

Demonstrando curiosidade e dispostos a compreender tudo desse processo, uma dupla parecia não acreditar na resposta, e questionou: “Esses números são a resposta do desafio?”. O fato de os estudantes questionarem demonstra seu envolvimento na resolução do problema, e de estarem atentos à resolução proposta por Radice, aprendendo com ele. Seguindo as recomendações de Polya e Araújo (1977), ao invés de dar boas respostas, seguiu-se fazendo outras e boas perguntas. Então, questionou-se a turma: “Pessoal, que tal conferir? Façam a soma e a multiplicação das soluções: o que devem encontrar?” A turma respondeu, prontamente, seis e treze. Sem demora, todos conferiram a soma, realizando-a das duas raízes complexas, e encontraram seis. Na multiplicação, aplicaram corretamente a propriedade distributiva, juntaram termos semelhantes e alguns “travaram” outra vez, pois encontraram a expressão i^2 e não sabiam o que fazer com ela.

Os estudantes não perceberam que poderiam usar a equivalência $i^2 = -1$. Alguns procuraram uma forma de seguir na resolução, e propuseram resolver como se fosse outra equação de 2º grau, pois acreditavam que, quando houvesse uma variável elevada ao quadrado, deveriam resolver desta forma. Ao ser proposta essa forma de resolução, os demais estudantes continuaram pensando e observaram: “A gente resolveu uma equação de 2º grau, estamos querendo fazer a prova real que é a substituição na equação. Acho que não é dessa forma.”. Percebendo que os estudantes não estavam conseguindo dar continuidade, o professor entrou em cena e questionou: “Quanto vale i²?” Essa indagação fez “cair a ficha”; os estudantes, em coro, responderam: “Ah, $i^2 = -1$”. Assim, os estudantes conseguiram dar continuidade à resolução, fizeram a substituição e calcularam o resultado esperado, treze. Essa situação demonstra que a equivalência $i^2 = -1$ ainda não estava consolidada, faltavam atividades para que o estudante pudesse organizar sua estrutura cognitiva e consolidar esse conhecimento.

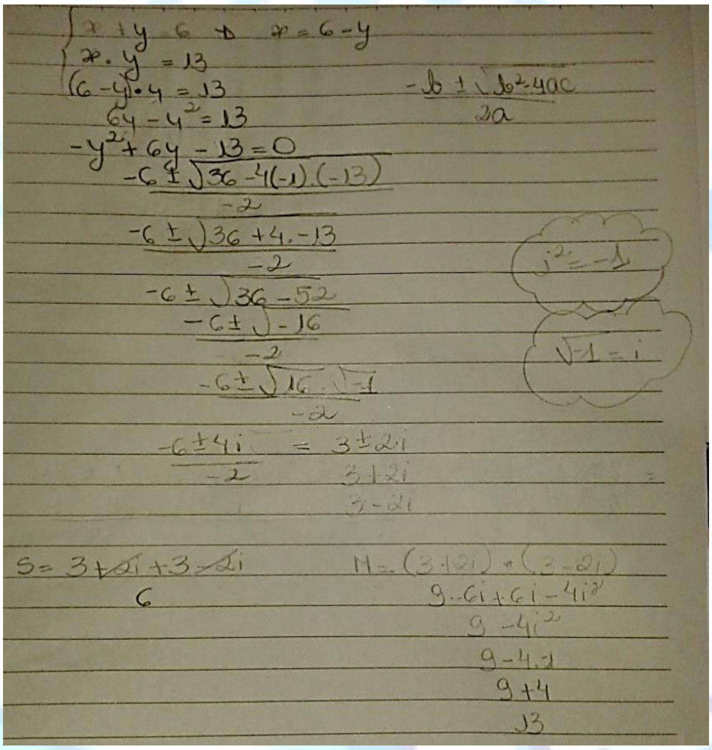


Figura 6 – Desafio resolvido e raízes confirmadas
Fonte: Elaborada pelo autor (2016).

Na resolução do problema, as dificuldades que os estudantes encontraram, provavelmente, foram parecidas com aquelas encontradas por Cardano e Bombelli no século XVI: os resultados eram raízes quadradas de números negativos, objetos estranhos; porém, quando verificavam as soluções, resultava uma igualdade verdadeira; por isso, chamavam essas raízes de sofistas ou sutis. Desta forma, a história dos números complexos emergiu na sala de aula, proposta como um desafio histórico, como é proposto pelos PCN (BRASIL, 2006), o de uma atividade investigadora, na qual os estudantes puderam sentir as mesmas dificuldades encontradas pelos matemáticos do passado e, com o auxílio do Radice e algumas intervenções do professor, conseguiram resolver o desafio, ampliando seus subsunçores e propiciando o desenvolvimento de uma aprendizagem subordinada.

A satisfação por este "achado histórico" foi expressa pela reação positiva dos estudantes diante do OA. O envolvimento demonstrado, as interações focadas nas discussões e o sucesso que conquistaram, ao serem desafiados diante de um novo conteúdo, são indicativos de que o OA e a proposta pedagógica podem ser considerados recursos potencialmente significativos. Nesse início de estudo dos números complexos, contempla-se um dos facilitadores da aprendizagem significativa, a diferenciação progressiva, pois se apresenta, em primeiro lugar, as ideias mais gerais e, depois, progressivamente o conteúdo é detalhado e especificado. (AUSUBEL, 2003).

Para finalizar e ampliar o conhecimento, sobre a história que os historiadores construíram e sistematizaram, os estudantes tiveram uma tarefa extra, que consistia em organizar, em duplas, um cartaz, para se exposto em classe formando uma linha do tempo, e um texto sobre os matemáticos que contribuíram para a evolução da teoria dos números complexos. O texto construído faz parte do ambiente de aprendizagem do OA, denominado "Caminhada Histórica", em que é apresentado, de forma breve, o que consideraram ser uma contribuição significativa para o desenvolvimento dos números complexos.

Com base neste material, outros estudantes que interagirem com o OA, poderão ampliar conhecimentos sobre o desenvolvimento histórico desse conjunto numérico e, também este espaço, com o aprimoramento do que já existe e com novas contribuições.

Considerando a predisposição para aprender, todas as duplas realizaram a atividade. Escreveram e aprimoraram os textos, com orientação e sugestões do professor e, como forma de sistematizar, compartilhar e socializar os estudos realizados. Desta forma, os estudantes participaram ativa e significativamente da construção do OA, atuando como coadjuvantes da pesquisa desenvolvida.

Considerações finais

A criação de materiais potencialmente significativos é uma colaboração importante no contexto educacional, mais ainda, sendo propostos com metodologias ativas, num esforço de envolver o estudante na construção do seu conhecimento. Esta proposta didática foi pensada sob um referencial teórico construtivista, a aprendizagem significativa de Ausubel. Durante a elaboração teve-se o cuidado de criar um ambiente reflexivo, levando em consideração os subsunçores dos estudantes, propícios para a aprendizagem significativa; e o contexto histórico do conjunto numérico dos Números Complexos, como é sugerido nos PCN.

Neste ambiente, reviveu-se um dos problemas enfrentados pelos matemáticos do século XVI, o das raízes sofistas. Por meio de questionamentos e interações, o Radice motivou os estudantes a aprenderem sobre a unidade imaginária, elemento que diferencia um número real do número complexo. Além disso, Radice atuou como mediador auxiliando os estudantes a superarem uma concepção errônea: a de que as raízes quadradas de números negativos não existiam.

Alguns recortes de falas, em um bate-papo com os estudantes, parecem representar bem o sentimento da turma. Quando questionados sobre a forma como compreenderam a unidade imaginária, os estudantes deram retornos muito positivos. Um estudante, por exemplo, relata que foi: “difícil chegar a esta conclusão, mas ao mesmo tempo é fácil de entender quando temos instruções.”. Essa transcrição revela o apoio do OA na mediação do processo, e não apenas como repositório de conteúdos. Outro estudante, sobre as intervenções do Radice, diz: “as dicas pareciam conversar com a gente, interagir, fazendo com que a vontade de trabalhar aumentasse.” Assim, a sequência de atividades, elaborada e utilizada foi potencialmente significativa, pois os estudantes perceberam a diferença entre um número complexo e o número real e compreenderam o significado da unidade imaginária.

Além disso, os estudantes passaram por algumas dificuldades, provavelmente como as encontradas pelos matemáticos do século XVI, em que o desenvolvimento dos números complexos não foi meramente informativo, o estudante construir ideias matemáticas. Assim, os novos conhecimentos foram sendo formados à medida que eram requisitados, em interação, numa proposta didática alinhada com as novas tendências educacionais.

Portanto, este trabalho apresenta uma sequência de atividades mostrando que é possível construir estratégias de aprendizagem ativas, utilizando a história da matemática no desenvolvimento de novas aprendizagens. Os recursos tecnológicos são bons aliados do professor na missão de desenvolver aprendizagens significativas para a construção de conhecimentos matemáticos. Este trabalho abre espaço, também, para futuros estudos relacionados ao conteúdo de Números Complexos, como se pretende desenvolver nas próximas pesquisas, ampliando a importância do estudante na aprendizagem e destacando cada vez mais o professor como mediador.

Referências

AUSUBEL, David Paul. **Aquisição e retenção de conhecimento**: uma perspectiva cognitiva. Lisboa: Paralelo, 2003.

AUSUBEL, David Paul; NOVAK, Joseph Donald; HANESIAN, Helen. **Psicologia Educacional**. 2. ed. Rio de Janeiro: Interamericana, 1980.

BATISTA, Silvia Cristina Freitas. **SoftMat**: um repositório de softwares para matemática do Ensino Médio: um instrumento em prol de posturas mais conscientes na seleção de softwares educacionais. 2004. 186f. Dissertação (Mestrado em Ciências de Engenharia) – Universidade Estadual do Norte Fluminense (Uenf), Campos dos Goytacazes, RJ, 2004.

BORTONI-RICARDO, Stella Maris. **O professor pesquisador**: introdução à pesquisa qualitativa. São Paulo: Parábola, 2008.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio (PNCEM).** Orientações complementares aos parâmetros curriculares nacionais. Brasília: MEC/SEMT, 2006.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática**: contexto e aplicações. São Paulo: Ática, 2008.

GOMES, Emerson Batista. **A história da matemática como metodologia de ensino da matemática**: perspectivas epistemológicas e evolução de conceitos. 2005. Dissertação (Mestrado) - Curso de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática, Universidade Federal do Pará, Belém, 2005.

LUNAVO, Filipe Mathusso. **A história da matemática como recurso didáctico para o ensino da matemática**. 2015. TCC (Graduação) - Curso de Licenciatura em Ensino de Matemática, Universidade Católica de Moçambique, Búzi, 2015.

MELLO, Sílvio Quintino de; SANTOS, Renato Pires dos. O ensino de matemática e a educação profissional: a aplicabilidade dos números complexos na análise de circuitos elétricos. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 7, n. 2, p. 51-64, jul./dez. 2005.

MILIES, César Polcino. A emergência dos números complexos. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, n. 24, p. 5-15, jul. 2003.

MOREIRA, Marco Antonio. Linguagem e aprendizagem significativa. In: ENCONTRO INTERNACIONAL SOBRE APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA, 4., 2003, Maragogi. **Anais...** Maragogi, 2003. Disponível em: <http://www.if.ufrgs.br/~moreira/linguagem.pdf>. Acesso em: 9 fev. 2015.

NOBRE, Waldek Rocha. **Números complexos e algumas aplicações**. 2013. 54f. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal Fluminense, Niterói, 2013. Disponível em: <http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/417/2011_00289_WALDEK_ROCHA_NOBRE.pdf?sequence=1>. Acesso em: 15 jan. 2015.

PINTO JÚNIOR, Ulício. **A história dos números complexos**: das quantidades sofisticadas de Cardano às linhas orientadas de Argand. 2009. 94f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2009. Disponível em: <http://www.pg.im.ufrj.br/pemat/12 Ulicio Pinto.pdf>. Acesso em: 15 jan. 2015.

POLYA, George; ARAÚJO, Heitor Lisboa de. **A arte de resolver problemas**: um novo aspecto do método matemático. Rio de Janeiro: Interciência, 1977.

PUHL, Cassiano Scott. **Números complexos:** interação e aprendizagem. 2016. 244 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade de Caxias do Sul, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, 2016. Disponível em: <https://repositorio.ucs.br/handle/11338/1144>. Acesso em: 08 fev. 2017.

ROQUE, Tatiana. **História da matemática:** uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SANTOS, Marcos André dos. **Dos números complexos aos quatérnions**: desenvolvimento algébrico, interpretação geométrica e aplicações. 2013. 100f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2013. Disponível em: <http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/705>. Acesso em: 29 jul. 2014.

SCHENDER, Klim Wertz. **História da Matemática**: a Importância no Processo do Ensino-Aprendizagem na Educação Básica. 2013. TCC (Graduação) - Curso de Licenciatura Plena em Matemática, Universidade Metropolitana de Santos, Guarujá, 2013.

VASCONCELLOS, Celso dos Santos. **Avaliação**: concepção dialética-libertadora do processo de avaliação escolar. 13. ed. São Paulo: Libertad, 2001.

VIANNA, Carlos Roberto. **Matemática e história:** algumas relações e implicações pedagógicas. São Paulo: USP, 1995. Dissertação. Curso de Pós-graduação em Educação Matemática, da Universidade de São Paulo, 1995.

Submetido em fevereiro de 2017

Aprovado em agosto de 2017