REVISTA DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL (UFMS)

Volume 11, número 25 – 2018

ISSN 2359-2842

A Formação Matemática de Alunos do Primeiro Ano do Ensino Fundamental em Atividades de Modelagem Matemática: uma Perspectiva Wittgensteiniana

The Mathematical Formation of Students from the First Year of Elementary School in Mathematical Modeling Activities: a Wittgensteinian Perspective

Emerson Tortola[1]

Lourdes Maria Werle de Almeida[2]

RESUMO

Neste artigo investigamos, à luz da perspectiva filosófica de Ludwig Wittgenstein, particularmente em sua obra *Investigações Filosóficas*, a formação matemática de alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental por meio de atividades de modelagem matemática. A parte empírica da pesquisa compreende a análise de atividades de modelagem matemática e nos fornece indícios de como os alunos lidaram com os conceitos de número e de adição e identificaram regularidades envolvidas nas situações investigadas. As análises indicam que atividades de modelagem tem potencial para subsidiar o aprender matemática dos alunos, inserindo-os em diferentes contextos de uso da matemática, a partir dos quais eles puderam construir seus modelos matemáticos e aprender regras de uso da linguagem matemática associadas aos conceitos que emergiram das atividades. A discussão sobre a aplicabilidade dos modelos matemáticos construídos a outras situações pode ajudar os alunos a desvincular a matemática das situações empíricas que deram origem à discussão do conceito, mostrando que a matemática tem natureza normativa.

PALAVRAS-CHAVE: Modelagem Matemática. Educação Matemática. Anos Iniciais. Linguagem. Wittgenstein.

ABSTRACT

In this paper we investigate, in the light of the philosophical perspective of Ludwig Wittgenstein, in particular in your book *Philosophical Investigations*, the mathematical formation of students from the earliest years of Elementary School through mathematical modeling activities. The empirical part of the research comprises the analysis of mathematical modeling activities and gives us indications of how students dealt with the concepts of number and addition, and identified regularities involved in the situations investigated. The analyzes pointed out

[1] Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Câmpus Toledo. emersontortola@utfpr.edu.br.
[2] Universidade Estadual de Londrina. lourdes@uel.br.

the potential of mathematical modeling activities to support the mathematical formation of students, inserting them in different contexts of mathematical use, from which they were able to construct their mathematical models and learn rules of use of the mathematical language associated to concepts that emerged from the activities. The discussion about the applicability of constructed mathematical models to other situations can help students to dissociate mathematics from the empirical situations that gave rise to the discussion of the concept, showing that mathematics has a normative nature.
KEYWORDS: Mathematical Modeling. Mathematics Education. Elementary School. Language. Wittgenstein.

Para início de conversa...

O ensino e a aprendizagem de matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental são pautados numa relação dialógica que considera o contexto e os sujeitos envolvidos, além das especificidades daquilo que deve ser apreendido. Os alunos, de modo geral, já vêm para a escola com conhecimentos associados à matemática (SILVA; KLÜBER, 2014), como reconhecer números, contar pequenas quantidades, realizar comparações, etc. É preciso "dar voz e ouvido aos alunos, analisar o que eles têm a dizer, e estabelecer uma relação pautada no respeito e no (com)partilhamento de ideias e saberes" (NACARATO; MENGALI; PASSOS, 2011, p. 42).

A formação matemática, entretanto, deve ir para além dessas percepções, e possibilitar que na apreensão de conceitos e métodos, os alunos possam também se deparar com situações desafiadoras e, algumas vezes, lúdicas. Conforme argumenta English (2003), estas situações não devem ter o papel de apenas contextualizar a matemática, mas indicar que, de fato, há diferentes usos e que é por meio desses usos que diferentes propriedades e características da matemática vão sendo apreendidas pelas crianças, como pondera o filósofo austríaco Ludwig Wittgenstein, em sua segunda fase, caracterizada por sua obra *Investigações Filosóficas*[3].

Uma alternativa para as práticas pedagógicas associadas ao ensino e à aprendizagem de matemática que tem potencial para atender a essa demanda de formação matemática é a modelagem matemática, que, segundo English (2003), pode ser inserida no contexto escolar desde os primeiros anos.

---

[3] Costuma-se dividir a obra de Wittgenstein em fases, que revelam suas diferentes concepções de linguagem e sua relação com o mundo. Essas fases são caracterizadas, principalmente, por duas de suas publicações, o *Tractatus Logico-Philosophicus* (1921), que trata a relação entre linguagem e realidade sob uma perspectiva referencial e metafísica – considerada como sua primeira fase –, e o *Investigações Filosóficas*, que compreende a linguagem sob um ponto de vista mais pragmático, em que significados constituem-se a partir dos usos das palavras, dos jogos de linguagem – que marcam o início de sua segunda fase, na qual fundamentamos esta pesquisa.

Modelagem matemática, segundo Almeida, Silva e Vertuan (2012), consiste em abordar matematicamente situações não essencialmente matemáticas, isto é, consiste no uso da matemática para problematizar e investigar situações reais[4], que podem ser provenientes de fenômenos das mais variadas esferas sociais, possibilitando que os alunos trabalhem, inclusive, com temáticas de seu interesse. Nesse contexto, atividades de modelagem matemática fornecem aos alunos "ricas oportunidades para experienciar dados complexos em contextos desafiadores e, ainda, significativos" (ENGLISH, 2010, p. 288).

Ao desenvolver atividades de modelagem matemática os alunos colocam em jogo conhecimentos associados tanto ao fenômeno investigado, quanto à matemática, podendo ser esses conhecimentos já apreendidos em outros momentos ou introduzidos na medida em que são necessários na investigação do problema. Dessa forma, atividades de modelagem matemática apresentam potencial para além de discutir a situação investigada, de discutir matemática, de apreender novos conceitos e utilizá-los, de usar linguagem matemática para comunicar investigações e resultados.

Diante disso, nos propomos neste artigo a investigar como os alunos, particularmente do 1º ano do Ensino Fundamental, ampliam o seu repertório de conceitos e de usos da linguagem matemática quando desenvolvem atividades de modelagem matemática, uma vez que segundo Wittgenstein (2012), é por meio dos usos e, por conseguinte, desse movimento de ampliação dos usos, que os significados das palavras, dos símbolos, da linguagem são constituídos.

Para fundamentar nossa investigação, analisamos atividades de modelagem matemática que foram desenvolvidas com 23 alunos de uma turma de 1º ano do Ensino Fundamental, com idades entre 6 e 7 anos, de uma escola pública do interior do Paraná. Os dados foram coletados no ano de 2015, por meio de registros em áudio, vídeo, fotografias e anotações dos pesquisadores em diário de campo, a partir de observações diretas no *lócus* da investigação[5]. O desenvolvimento das duas atividades que descrevemos foi orientado pelo

[4] Não entramos aqui em discussão do que é real, mas tomamos o termo em um sentido abrangente, de modo a contemplar situações cotidianas ou não cotidianas, situações provenientes da própria matemática, do mundo cibernético, situações hipotéticas, etc., excluindo-se apenas situações fictícias.
[5] Esta pesquisa contou com o apoio e a autorização da Secretaria Municipal de Educação, da Direção da Escola e dos Pais ou Responsáveis dos alunos participantes, prezando pelos cuidados éticos necessários para sua realização.

primeiro autor deste texto, sendo o tema de uma delas proposto pelo pesquisador[6] e a temática da outra escolhida pelos alunos.

Nossas análises são realizadas por meio de uma abordagem qualitativa, de cunho interpretativo, na busca por elaborar compreensões acerca da formação matemática dos alunos do 1º ano do Ensino Fundamental em atividades de modelagem matemática e se fundamentam em pressupostos da filosofia da linguagem de Ludwig Wittgenstein, que entende a linguagem como uma atividade social, cujos significados são constituídos a partir de seus usos em determinados contextos, a partir dos *jogos de linguagem*. Nesse sentido, aspectos associados ao modo como os alunos lidaram, particularmente, com os conceitos de número e de adição são apresentados e colocados em discussão.

Abordamos, portanto, neste artigo questões referentes à modelagem matemática, particularmente nos anos iniciais do Ensino Fundamental, e tecemos considerações à luz da filosofia da linguagem de Wittgenstein sobre o desenvolvimento de duas atividades de modelagem por alunos do 1º ano do Ensino Fundamental em relação à questão de pesquisa definida.

Modelagem Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental

A prática da modelagem matemática, para Bassanezi (2004), pode ser vista como uma arte: a arte de utilizar a matemática para resolver problemas provenientes de situações reais. Nessa arte, cabe aos modeladores – aqueles que desenvolvem a atividade de modelagem matemática –, discutir e apresentar respostas para o problema a partir do uso de conceitos e procedimentos matemáticos, da linguagem matemática.

Neste contexto, no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática na sala de aula, é conveniente que os alunos comecem a abordagem matemática com conceitos já conhecidos e venham a conhecer mais, ampliando esse repertório de conhecimentos. A essa 'ampliação' se agrega também a capacidade de identificar características que sinalizam quais conceitos matemáticos podem ser utilizados para abordar determinados fenômenos e situações.

[6] Os materiais, as informações e o problema que constituíram o desenvolvimento dessa atividade foram avaliados, *a priori*, pelo Grupo de Pesquisa sobre Modelagem Matemática e Educação Matemática (Grupemmat) ao qual os pesquisadores / autores deste artigo participam.

Para Doerr e English (2003), de modo geral, os problemas que são propostos em sala de aula trazem em seu enunciado pistas sintáticas que sinalizam o caminho para sua resolução, ou seja, frases ou palavras-chave como *mais, menos, vezes, maior, menor*.

> Na resolução de problemas escolares tradicionais, os alunos geralmente se engajam em um processo de um ou dois passos para mapear as informações do problema com quantidades e operações aritméticas. Na maioria dos casos, as informações do problema já foram cuidadosamente matematizadas para o aluno. O objetivo do aluno é desmascarar a matemática ao mapear as informações do problema de tal maneira que uma resposta pode ser produzida utilizando quantidades e operações básicas conhecidas (DOERR; ENGLISH, 2003, p. 113).

A modelagem matemática, entretanto, contrasta esses tipos de problemas. Segundo Almeida, Silva e Vertuan (2012), em atividades de modelagem, os alunos, primeiramente, identificam o problema e depois precisam investigar e selecionar informações, definir hipóteses, realizar simplificações, usar a linguagem matemática para produzir um modelo matemático do fenômeno, testar e validar o modelo e comunicar resultados. Nesse sentido, a modelagem oferece aos alunos oportunidades de realizar explorações de situações do mundo real, de lidar com dados relativos a estas situações e de engajar-se nelas de modo que eles precisem desenvolver ideias ou processos matemáticos não conhecidos por eles *a priori*.

Quando se trata de alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental, entretanto, a modelagem matemática apresenta algumas especificidades, especialmente no que se refere à simbologia matemática e à produção de modelos matemáticos e seu uso na apresentação de respostas para o problema em estudo em cada situação investigada.

Neste contexto, trabalhos como o de Tortola e Almeida (2016), Tortola (2012, 2016), Burak e Martins (2015), Alencar e Lautenschlager (2014), Kaviatkovski (2012), Silva e Klüber (2012), Luna (2007), English (2003), sinalizam a necessidade de ampliar a discussão da modelagem matemática no contexto dos anos iniciais do Ensino Fundamental, abordando possibilidades e perspectivas para a inserção dessas atividades em sala de aula.

Atividades de modelagem matemática no 1º ano do Ensino Fundamental

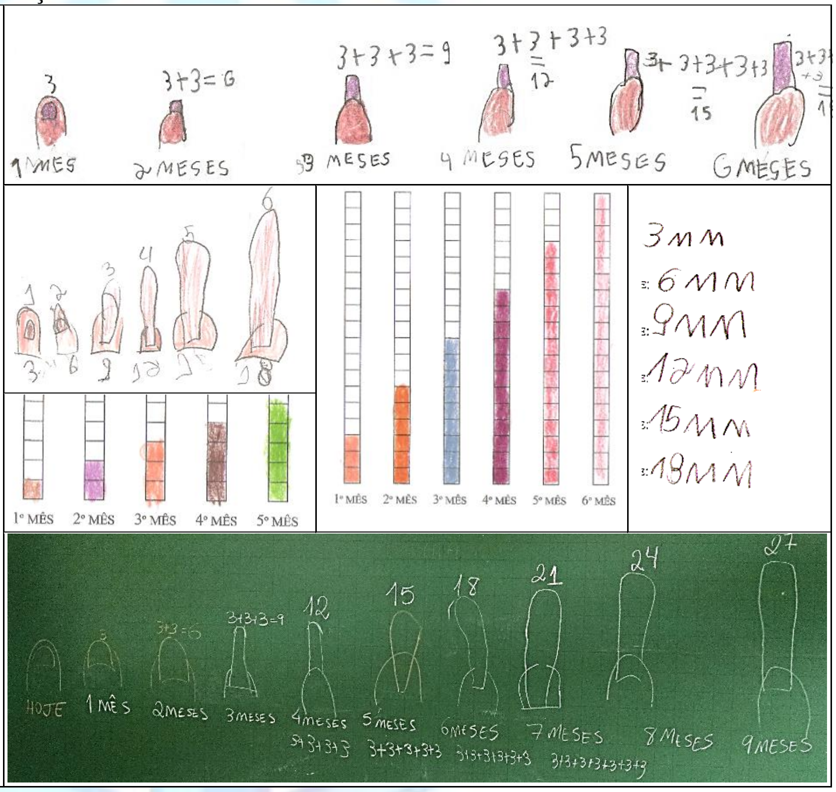
Pautamos nossas considerações sobre a formação matemática dos alunos no desenvolvimento de duas atividades de modelagem matemática: a primeira teve como tema o *crescimento das unhas*, que foi escolhido pelo pesquisador pensando em questões de higiene que, em geral, são abordadas nesse nível de escolaridade; na segunda a temática foi a *neve*, escolhida pelos alunos com base em um filme de animação que assistiram.

Na atividade referente ao *crescimento das unhas*, o professor levou aos alunos informações e o desenvolvimento foi orientado pela investigação de quanto crescem as unhas ao longo dos meses, caso não sejam cortadas. Diante disso, os alunos determinaram de quanto em quanto tempo eles deveriam cortar suas unhas. Para isso, basearam-se nas informações de que as unhas das mãos crescem, em média, três milímetros por mês; e que as unhas dos pés crescem, em média, um milímetro por mês. O Quadro 1 apresenta a formulação dos modelos matemáticos a respeito do crescimento das unhas.

Quadro 1: Formulação do modelo matemático do crescimento das unhas

P: Depois de um mês o que vai acontecer com a unha?
A1.6: Crescer.
[...]

P: Quanto cresceu em dois meses?
A1.7: 6 mm
P: Isso, por quê? Porque cresceu 3 aqui mais...
A: 3
P: que dá?
A1.7: 3 mais 3...
A: dá 6.
P: Isso, e depois de 3 meses? E depois de 4 meses? E depois de 5 meses...?
(Alunos continuam contando)
P: isso e assim por diante, depois de 6, 7, 8, ...
P: Precisa fazer todos?
(Alguns alunos dizem sim, outros dizem não)
P: Não, por quê? Vai ter fim?
A: Não.
[...]



Fonte: Dos autores.

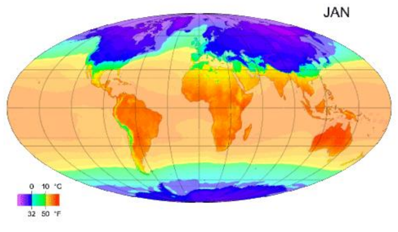
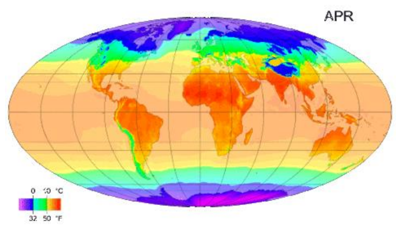
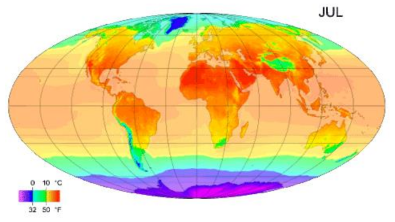
Utilizando os modelos matemáticos produzidos, os alunos responderam a questão à respeito de quanto em quanto tempo eles devem cortar suas unhas, conforme diálogo que segue.

P: *Então será que a gente pode esperar 1 mês para cortar as unhas?*
Alunos: *Não.*
P: *Tem que cortar antes ou depois?*
Alunos: *Antes.*

Com relação à segunda situação, que diz respeito à *neve*, um grupo de alunos decidiu investigar a área do território mundial que é ocupada por neve ao longo de um ano. As informações sobre a situação são de uma reportagem eletrônica que afirma que só neva em países cuja temperatura chega abaixo de zero graus Celsius na superfície e também mostra uma imagem em formato de *gif* animado[7] que indica a temperatura mundial ao longo dos meses.

O Quadro 2 apresenta três imagens, em tamanho reduzido, apresentadas pelo *gif* animado, referentes aos meses de janeiro, abril e julho.

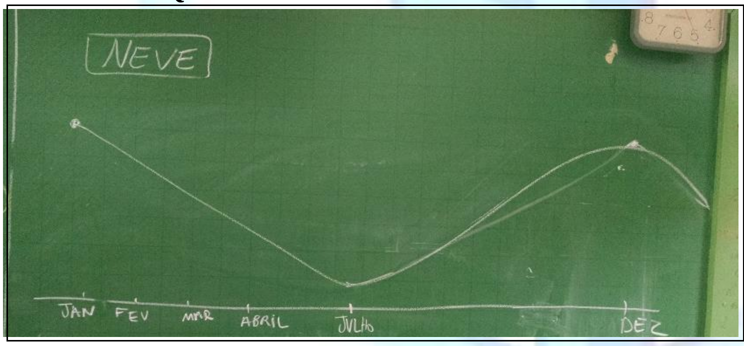
Quadro 2: Temperatura média do ar da superfície mundial ao longo dos meses

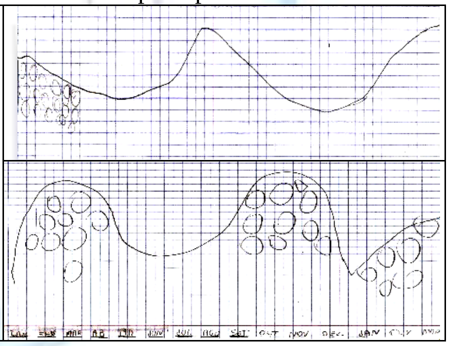
JANEIRO	ABRIL	JULHO
		

Fonte: Dos autores (Adaptado do site Wikipédia).

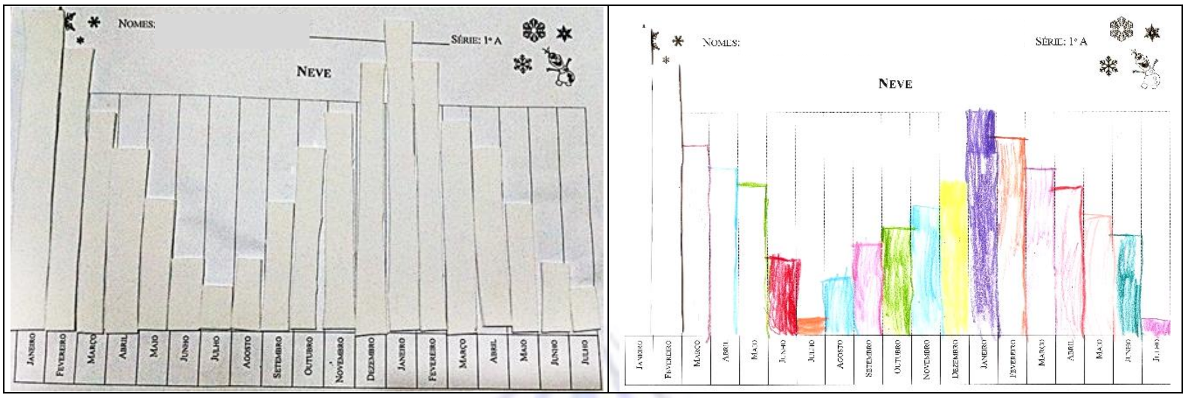
O Quadro 3 apresenta os modelos matemáticos formulados pelos alunos para esta situação-problema.

Quadro 3: Modelos matemáticos da área do território mundial ocupada por neve





[7] Disponível em: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/b/b3/MonthlyMeanT.gif.



Fonte: Dos autores.

A resposta dos alunos para o problema é que de janeiro a julho a área ocupada pela neve diminui, enquanto que de agosto a dezembro essa área aumenta, e esse comportamento do fenômeno se repete nos anos subsequentes. O diálogo a seguir sinaliza tal conclusão.

P: *Qual mês pode nevar mais?*
Alunos: *Janeiro.*
P: *Isso. Então janeiro vai estar bem alto [referindo-se a barra do gráfico que representa tal mês]. E o que acontece em fevereiro, aumenta ou diminui?*
D1.7: *Diminui.*
P: *E março?*
D1.7: *Diminui.*
[...]
P: *Agosto?*
D1.7: *Aumentou.*
[...]
P: *Julho, agosto, setembro, outubro, novembro, dezembro. Aí o que acontece depois? Janeiro, fevereiro, março... O que acontece?*
A1.7: *Diminui, daí sobe de novo, daí diminui, daí sobe de novo, diminui...*

Levando em consideração as atividades desenvolvidas, analisamos como os alunos ampliam o seu repertório de conceitos e de usos da linguagem matemática quando desenvolvem atividades de modelagem matemática.

Análise do desenvolvimento das atividades de modelagem matemática sob uma perspectiva wittgensteiniana

Nas duas situações descritas, os alunos, sob a orientação do pesquisador, inicialmente, discutiram a respeito da necessidade de cortar as unhas e da razão pela qual não neva com frequência no Brasil. Para que essas discussões desencadeassem o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática, os alunos foram orientados a investigar as situações a partir de um olhar matemático, a partir de questionamentos que os fizeram ver a situação de outra maneira, segundo outro *modo de ver*, como coloca Wittgenstein (2012).

Esse outro *modo de ver* as situações está em consonância com o entendimento de Almeida, Silva e Vertuan (2012) com relação à caracterização de atividades de modelagem matemática, referindo-se às atividades como uma abordagem matemática de situações-problema não essencialmente matemáticas.

Tal abordagem matemática requer o uso de proposições matemáticas, cuja natureza difere das proposições utilizadas em fenômenos empíricos, como argumenta Wittgenstein (2012). Conforme o autor, enquanto proposições empíricas descrevem fatos – “Se não cortadas, as unhas continuam a crescer” e “Em lugares cuja temperatura da superfície chega abaixo de zero graus Celsius pode nevar” –, proposições matemáticas são proposições gramaticais e têm natureza normativa, funcionando como normas que determinam os procedimentos ou como regras que orientam o caminho a ser seguido – como é o caso, por exemplo, das proposições “3 + 3 = 6” e “9 é maior que 6”.

O *modo de ver* as situações a partir de um óculos matemático, portanto, envolve a observação de padrões e regularidades que fundamentam a formulação de hipóteses, que sugerem o uso de proposições matemáticas para descrever, explicar e até mesmo fazer previsões com relação aos fenômenos investigados (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012), ou como explicam Souza e Barbosa (2014), para organizar matematicamente nossas experiências com relação a tais fenômenos (crescimento das unhas e neve), uma observação que poderia não ser realizada dessa maneira se não fosse o contexto das atividades de modelagem matemática no âmbito escolar.

É nessa perspectiva que, em consonância com Wittgenstein (2012), ocorre a formação matemática dos alunos, que ao utilizarem proposições matemáticas para tratar das situações-problema aprendem a seguir regras que orientam os usos da matemática em cada situação e, assim, inserem-se em diferentes *jogos de linguagem* ou em diferentes contextos de uso da Matemática, alterando o seu *modo de ver* o mundo.

Como falar, por exemplo, em *três* milímetros – medida que crescem, em média, as unhas das mãos mensalmente – com alunos que conhecem apenas o uso de números para contar quantidades? Quando falamos *três* no contexto dessa situação estamos, na verdade, fazendo um uso diferente dos números de quando os utilizamos para *contar*, estamos os utilizando para *medir*. Nesse contexto, ações como mostrar o calendário, contar os dias e meses com os alunos, usar uma trena ou fita métrica para indicar espaços, distâncias, etc. foram procedimentos necessários para que os alunos, além de compreenderem o problema, se engajassem na atividade de *medir*, para que eles vissem os números de um modo diferente. O diálogo a seguir ilustra tal encaminhamento.

> *P:* *Vocês sabem o que é "3 milímetros"?*
> *Alunos:* *Não.*
> *P:* *Olha, um metro é isso aqui (mostra a medida na fita métrica). [...] Estão vendo esse monte de números dividindo o metro?*
> *Alunos:* *Sim.*
> *P:* *Um, dois, três, quatro, cinco, até o cem. O metro é dividido em cem centímetros. Então cada espacinho desse, igual da régua, quem tem régua? [...] Cada pedacinho desse, dividindo a régua ou a fita métrica, é um centímetro [...] Estão vendo esse espacinho desse número até esse (indica dois números consecutivos na fita métrica)?*
> *Alunos:* *Sim.*
> *P:* *Mas esse espacinho, olha só esse espacinho aqui (mostra na fita métrica) está dividido em vários pedacinhos. [...] Cada pedacinho desse representa um milímetro. Então, sabem quanto a unha cresce por mês? Em média...*
> *A1.10:* *Três.*
> *P:* *Três milímetros. Então é daqui (aponta o zero na fita métrica) até um, dois, três. É esse espacinho aqui (mostra o espaço na fita métrica).*

O diálogo indica que no contexto do problema surgiu um significado diferente de número para os alunos, um novo uso, um novo *jogo de linguagem*, o do número como medida. Vale salientar que, embora o uso do *três* como *medida* mantenha semelhanças com o uso do *três* como *quantidade*, cada uso possui particularidades, singularidades que determinam seu significado. *Contar* três coisas é uma atividade diferente de *medir* algo que mede três milímetros, tem características diferentes.

Mas seria essa a maneira de se compreender a palavra *número*, ou seja, número é algo que pode expressar ora uma quantidade, ora uma medida, ora uma posição...? É quase certo que a resposta a esta pergunta é negativa! De fato, o conceito de número, como explica Wittgenstein (2012), não pode ser considerado como o conjunto desses conceitos individuais, pois se assim o fosse estaríamos estabelecendo limites rígidos para esse conceito. Na concepção de Wittgenstein (2012, § 68), os conceitos não podem ser encarados dessa forma; é possível usar a palavra *número* "de tal modo que a extensão do conceito não seja fechada por um limite".

Para Wittgenstein (2012, § 28-29), portanto, para que as crianças aprendam o conceito de número, não basta apontar para dois objetos e dizer "*dois*", ou, "*Este número se chama dois*". Há diferentes usos para os números, e para que as crianças os aprendam elas precisam saber empregá-los, saber seguir as regras de uso, o que, segundo Wittgenstein (2012), só pode ser apreendido por meio de um *treino*. "Ensinar a linguagem aqui não é explicar, mas treinar" (WITTGENSTEIN, 2012, § 5). É importante salientar que *treinar* para Wittgenstein é entendido num sentido de formação do sujeito, de aprendizagem das regras de uso em cada contexto, em cada jogo de linguagem.

No caso dos números, o aluno precisa aprender por meio do *treino* as regras de usos dos números em determinadas atividades ou situações e, uma vez que os significados são determinados nos jogos de linguagem, é importante que esse *treino* proporcione aos alunos uma visão ampla dos usos de uma determinada palavra, símbolo ou expressão. É assim que ele poderá ver *ali* o mesmo número, mas desempenhando papéis diferentes em cada situação, em consonância com a assertiva de Wittgenstein (2005, § 108) de que "a aritmética é a gramática dos números. Os tipos de números só podem ser distinguidos pelas regras aritméticas que se referem a eles". Isto é, existe na linguagem matemática uma gramática com regras que orientam seu uso, que regulamentam seu significado, regras historicamente estabelecidas e socialmente convencionadas.

> A humanidade segue regras para a vida em sociedade, vivemos em comunidade seguindo regras sociais, nos comunicamos obedecendo regras gramaticais, calculamos utilizando regras matemáticas etc. A regra matemática é uma instituição humana, ela advém de costumes e atitudes coletivas. Quando a regra é aceita por todos participantes de um mesmo campo de conhecimento, tal como da matemática, passa a ser uma norma que não pode mais ser modificada. Na empiria, ela pode ser utilizada com algumas derivações, tal como o acordo entre vendedor e cliente que podem negociar o resultado de um cálculo. Este é um exemplo em que podemos elucidar o motivo pelo qual Wittgenstein afirma que a matemática se fundamenta nas práticas humanas (SILVEIRA; CUNEGATTO, 2016, p. 40).

Nesse contexto, ainda que as proposições matemáticas sejam de natureza normativa, elas podem ser utilizadas na interpretação de fenômenos, contribuindo com a organização de nossas experiências com o mundo (SOUZA; BARBOSA, 2014). É este o caso de atividades de modelagem matemática que, em alguma medida, possibilitam que o aluno use proposições na produção de estruturas denominadas modelos matemáticos (DOERR; ENGLISH, 2003; ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012).

Os modelos matemáticos do crescimento das unhas, conforme indicam as imagens do Quadro 1, revelam que a maioria dos alunos utilizou a contagem como estratégia de resolução do problema, recorrendo ao sucessor para associar à sequência de meses o comprimento da unha, que cresce 3mm em cada mês, bem como para registrar um número e saber qual quantidade ele representa. Os alunos usaram também a adição, principalmente a ideia de *acrescentar* para obter quanto a unha cresceu mês a mês, e realizaram comparações, uma vez que optaram por fazer gráficos pictóricos, os quais, de acordo com a situação-problema, deveriam apresentar um comportamento crescente como indicam as figuras do Quadro 2.

Alguns alunos que utilizaram a contagem e construíram gráficos *perceberam* que a adição também poderia ser utilizada para indicar quanto a unha cresceria depois de 3 meses, o que serviu como ponto de partida para a discussão da adição e de como utilizá-la para resolver o problema. Dessa forma, podemos dizer que a adição ainda não era um aspecto *perceptível* para alguns alunos e, com o seu emprego na atividade passou a ser – *treino*, na perspectiva de Wittgenstein. Essa mudança na percepção de um aspecto é discutida pelo autor usando como exemplo os conceitos de base e de vértice de um triângulo.

> Como se ensina a uma criança (p. ex., no cálculo) "Junte agora *estes* pontos" ou "Agora *eles* se pertencem"? É evidente que "juntar" e "pertencer-se" têm que ter tido para ele, originalmente, um significado diferente de *ver* algo deste ou daquele modo. – E esta é uma observação sobre conceitos, não sobre métodos de ensino.
> Pode-se chamar uma *espécie* de aspectos de "*aspectos de organização*". Se muda o aspecto, então, partes do quadro, que anteriormente não pertenciam ao mesmo grupo, passam a fazê-lo.
> No triângulo posso agora ver *isto* como vértice, *aquilo* como base – agora *isto* como vértice e aquilo como base. – É evidente que para o aluno que somente agora trava conhecimento com os conceitos vértice, base etc., as palavras "Agora vejo isto como vértice" não lhe podem dizer nada ainda. [...]
> Ele vê isto *assim*, diríamos isto somente de alguém que está em condições de fazer certas aplicações da figura com agilidade (WITTGENSTEIN, 2012, p. 271).

No caso da situação em análise, a adição era um aspecto que antes não fazia parte da percepção dos alunos quanto àquele comportamento de crescimento das unhas, e quando colocados diante de tal uso, passou a fazer. Wittgenstein (2012, p. 254) explica esse *perceber um aspecto* fazendo uma analogia com a contemplação de uma fisionomia: "Contemplo uma fisionomia, e de repente noto sua semelhança com uma outra fisionomia. Eu *vejo* que ela não mudou: E vejo-a de fato de um modo diferente. A esta experiência dou o nome de *perceber um aspecto*". É a partir desse *perceber um aspecto* que o aluno passa a identificar, por exemplo, o *três* ora como uma quantidade de objetos, ora como uma medida, ou que o aluno passa do uso da contagem para o uso da adição, como na descrição dos alunos para o crescimento das unhas ao longo do tempo – escreveram 3 para o primeiro mês, 3 + 3 = 6 para o segundo, 3 + 3 + 3 = 9 para o terceiro, e assim por diante, conforme Quadro 1. Essa percepção revela uma mudança de aspecto, que "é a expressão de uma *nova* percepção, junto com a expressão da percepção inalterada" (WITTGENSTEIN, 2012, p. 257).

"Estas pessoas são treinadas de tal maneira que todas, à ordem '+3', fazem a mesma passagem no mesmo nível. Poderíamos expressá-lo assim: A ordem '+3' determina plenamente para essas pessoas cada passagem de um número para o número seguinte" (WITTGENSTEIN, 2012, § 189).

Trata-se de um *treino*, associado ao aprender a seguir uma regra, um procedimento. "Se adicionamos 3 coisas a 2 coisas, isto pode resultar de várias contagens de coisas. Mas vemos como uma *norma* o procedimento que 3 coisas adicionadas a 2 coisas resultam 5 coisas. Veja, *isto* é o que acontece quando eles obtêm 5" (WITTGENSTEIN, 1994, VI-9). E aprender, para Wittgenstein (2012, § 385), é "ser levado a ser capaz de fazê-lo", independente de uma situação.

Isto sinaliza a importância de discutir com os alunos a generalização da situação, inclusive o como fazê-la, pois, por meio da formulação de modelos matemáticos para situações específicas, o aluno vai percebendo o funcionamento das regras. Não podemos, todavia, exigir que alunos de 1º ano do Ensino Fundamental escrevam uma equação ou uma função que descreva tal generalização, e por que deveríamos? Precisamos, como argumenta Bassanezi (2004), nos valer dos conhecimentos matemáticos em conformidade com os alunos envolvidos, utilizando conhecimentos matemáticos já apreendidos, ou, como indica Barbosa (2003), introduzindo novos conceitos, conforme sejam necessários e pertinentes.

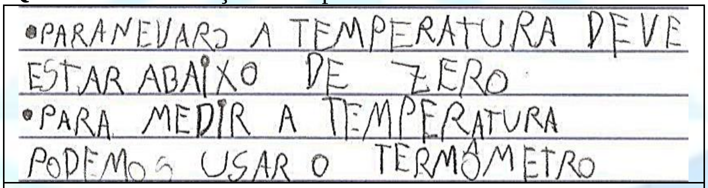
No caso da atividade a respeito do crescimento das unhas, foi por meio da contagem e da adição que a generalização da situação foi discutida.

P: *Quantos três temos aqui?*
Alunos: *Três.*
P: *Quantos três têm aqui agora?*
Alunos: *Quatro.*
P: *Quatro [conta]. Então em quatro meses quantos três eu tenho que somar?*
Alunos: *Quatro.*
P: *Em cinco meses, quantos três eu tenho que somar?*
Alunos: *Cinco.*
P: *Cinco [conta com os alunos]. Em seis meses quantos três vamos somar?*
Alunos: *Seis [professor conta com os alunos].*
[...]
P: *Dá para fazer para todos?*
Alunos: *Não.*
P: *Não, a gente vai ficar fazendo, fazendo... vai acabar?*
Alunos: *Não.*

Essa atividade de modelagem, portanto, serviu para alterar o modo de ver *número* e *adição* pelos alunos a partir de suas percepções quanto às regularidades e características observadas na situação, possibilitando a construção dos modelos matemáticos apresentados no Quadro 1. "É a partir de um treino (da contagem) que a criança passa a ser capaz de aplicar esse conceito em situações empíricas, inclusive diferentes daquelas nas quais foi iniciado" (GOTTSCHALK, 2004, p, 330).

Já na situação relativa à neve alunos do 1º ano, orientados pelo pesquisador, conseguiram lidar com os números negativos, uma vez que as informações a respeito da situação incluíam aspectos que conduziram à abordagem desse tipo de número (Quadro 4).

Quadro 4: Informações a respeito da atividade com o tema *neve*


•PARANEVARO A TEMPERATURA DEVE
ESTAR ABAIXO DE ZERO
•PARA MEDIR A TEMPERATURA
PODEMOS USAR O TERMÔMETRO

• *Para nevar a temperatura deve estar abaixo de zero.*
• *Para medir a temperatura podemos usar o termômetro.*

Fonte: Dos autores.

Nesse caso, a informação "*Para nevar a temperatura precisa estar abaixo de zero graus*" apresentada na reportagem eletrônica foi o fio condutor das discussões realizadas com os alunos. Para o desenvolvimento da atividade foi preciso entender o que significa estar *abaixo de zero* e que existem *números* que podem ser associados a uma temperatura abaixo de zero. O diálogo a seguir sinaliza como se constituiu o significado para *números abaixo de zero* para esses alunos:

P: *Conforme vai chegando no verde (ver Quadro 2), vai ficando mais frio. E o azul...*
D1.7: *É quanto está muito, muito, muito, muito, muito, muito frio.*
P: *É quando está muito frio. É quando está abaixo de zero a temperatura.*
D1.7: *Daí neva.*

Abordar números negativos configurou-se como uma necessidade do desenvolvimento da atividade de modelagem. O diálogo a seguir mostra a abordagem realizada.

P: *Como o Brasil é um país quente, a temperatura geralmente é dezesseis graus, vinte graus, trinta graus... Para nevar tem que estar muito abaixo disto, precisa chegar no dois, um, zero ou ainda menos!*
D1.17: *Até o zero tem... [interrompe a fala].*
P: *Só que para contar abaixo de zero a gente conta do mesmo jeito. Quem vem depois do zero?*
D1.18: *Zero, um, dois, três, quatro...*
P: *Isso, um, dois...*
D1.18: *Três, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove, dez [conta rápido].*
P: *Três, quatro, cinco, seis, igual os outros. Da mesma forma que vai para cima, vai para baixo*

[refere-se à numeração do termômetro desenhado no quadro]. [...] Só que nesses valores que são abaixo de zero a gente coloca um tracinho assim, de menos. Para indicar que ele está abaixo de zero. Certo? Então como está a temperatura para que possa nevar?

D1.17: *Abaixo de zero.*

Ao afirmar que os alunos conseguiram *lidar* com os números negativos não estamos afirmando que eles *apreenderam* o conceito de número negativo. No entanto, como argumenta Wittgenstein (2012), uma criança pode *jogar um jogo de linguagem*, no caso da matemática relativo a um certo conceito, por exemplo, sem entendê-lo como aqueles que já conhecem esse conceito o fazem. De fato, os alunos do 1º ano do Ensino Fundamental, com essa atividade, podem ter apreendido um uso possível entre vários, para os números negativos: um número abaixo de zero como uma medida no termômetro (Quadro 4); aqueles em que se coloca um *tracinho*, um *sinal de menos*, antes deles; um número associado a uma temperatura em que ocorre a possibilidade de nevar. O repertório de experiências e de usos dos números negativos vai, sem dúvida, se ampliar na medida em que esses alunos avançarem em anos escolares. Por ora, a atividade de modelagem matemática apresentou um possível uso para esse tipo de número.

A compreensão em matemática, como indica Gottschalk (2004), deve passar a independer da experiência e ir para além da soma lógica dos significados. A autora exemplifica sua assertiva com o caso da adição:

> Proposições tais como 254 + 389 = 643 são "cristalizadas" como normas e passam então, a independer da experiência – tornam-se proposições necessárias, a priori. E é esse caráter necessário e apriorístico das proposições matemáticas que as distinguem de outras proposições de nossa linguagem (GOTTSCHALK, 2004, p. 328).

No caso das atividades desenvolvidas pelos alunos a que nos referimos no artigo, os alunos tiveram oportunidade de usar 3 + 3 = 6; 3 + 3 + 3 = 9, 3 + 3 + 3 + 3 = 12, e assim por diante, numa situação empírica. Certamente a adição de números deve passar a independer dessa situação.

No que se refere aos modelos matemáticos construídos, os alunos puderam identificar que um gráfico pode ser tanto utilizado para descrever o *crescimento das unhas* (Quadro 1), quanto para descrever a área que pode ser ocupada por *neve* ao longo do ano (Quadro 3), bastando estar atento às características de cada situação.

Enquanto na primeira atividade os alunos usaram uma sequência crescente (de números, figuras, barras, etc.) para expressar graficamente o crescimento das unhas ao longo dos meses, na segunda atividade os alunos, com a ajuda do pesquisador, traçaram no quadro inicialmente um esboço do gráfico que descreve o comportamento da área mundial que pode ser ocupada por neve ao longo de um ano. Neste caso, eles identificaram que começando em janeiro, mês em que essa área é maior, diminui mês a mês até julho, mês em que a área é a menor do ano. Perceberam também que a partir de julho a área que pode ser ocupada por neve cresce até chegar a janeiro novamente com a maior área. Pensando nesse comportamento, ao longo dos anos, os alunos traçaram os seus esboços, que indicam a existência de uma periodicidade no comportamento do fenômeno. Por fim, eles organizaram por meio de barras de diferentes tamanhos esse comportamento periódico, que além de indicar a área mundial que pode ser ocupada por neve ao longo do tempo, revela a área mundial em que a temperatura pode ser negativa em algum período do ano.

Considerações Finais

Neste artigo apresentamos reflexões sobre a formação matemática de alunos do 1º ano do Ensino Fundamental, particularmente, sobre como os alunos ampliam o seu repertório de conceitos e de usos da linguagem matemática quando desenvolvem atividades de modelagem matemática.

Observamos que com base em proposições empíricas os alunos, orientados pelo professor, determinaram proposições matemáticas, cujas proposições têm *status* de proposições gramaticais. Ou seja, as proposições matemáticas foram tomadas pelos alunos como regras, que delimitaram o caminho a seguir.

A proposição, no caso da atividade das unhas, foi a informação simplificada de que "As unhas das mãos crescem 3 milímetros por mês", e no caso da atividade da neve, foi a regularidade apresentada pelo *gif* animado, que mostra que de janeiro a julho a área que pode ser ocupada por neve diminui, enquanto que de julho a janeiro essa área aumenta. O uso de tais proposições sinaliza também o uso da linguagem matemática.

Foi, pois, seguindo tais regras que os modelos matemáticos foram construídos e respostas para as situações foram apresentadas. Essa construção, entretanto, requereu dos alunos novos conceitos, novos usos. Essa introdução do *novo* requereu do pesquisador um apoio, uma indicação do que é preciso avançar, alterando o *modo de ver* as coisas pelos alunos, subsidiando a *percepção* de novos aspectos. É nesse sentido que o *treino* proposto por

Wittgenstein (2012), pode ser entendido como uma formação. Os alunos foram orientados a ver na situação aspectos que sozinhos não conseguiram ver, como foi o caso da adição na atividade referente ao *crescimento das unhas*, ou dos números negativos na atividade associada ao tema *neve*.

Nas atividades, esse *treino* possibilitou aos alunos conhecer regras de uso de número, adição, contar, medir, seriar, ordenar, etc., conforme a gramática que regulamenta a linguagem matemática, proveniente de uma construção histórica e social. A construção dos modelos e a apresentação de respostas, por sua vez, é um indicativo de como essas regras de uso foram compreendidas pelos alunos.

A socialização dos resultados foi o momento em que os alunos tiveram a oportunidade de apresentar para os demais seus modelos e os procedimentos que usaram em sua construção. Eles puderam também interagir com outros jogos de linguagem e discuti-los com seus colegas.

É preciso ponderar, entretanto, que cabe ao professor ter em mente que o que regula os diferentes usos de uma palavra são as regras, fazendo com que o uso da linguagem não seja uma atividade arbitrária, mas seja configurado pela experiência, pelo conhecimento das regras em cada contexto específico. Segundo Gottschalk (2004, p. 321, grifos da autora),

> *aprender* o significado de uma palavra pode consistir na aquisição de uma regra, ou um conjunto de regras, que governa seu uso dentro de um ou mais jogos de linguagem. Uma das consequências dessa ideia para a educação é que não há sentido em se ensinar um significado essencial de uma palavra independente de seus diversos usos. Uma palavra só adquire significado quando se opera com ela, ou seja, seguindo uma regra em um determinado contexto linguístico.

As ações do professor diante das construções dos alunos, nesse caso, podem relacionar esse uso a outras situações, como indica English (2010). Ele pode mostrar aos alunos que o conceito de número não depende da medida das unhas ou da temperatura, que o gráfico pode ora determinar um comportamento crescente, ora um comportamento periódico, que os conceitos matemáticos abordados nessas atividades podem ser utilizados em outras situações empíricas, diferentes dessas e assumir significados diferentes (por exemplo, número como quantidade, medida, posição). Ou seja, se por um lado a situação empírica investigada na atividade de modelagem matemática foi interpretada pela matemática, por outro lado, os alunos também podem desvincular a matemática dessa situação. O repertório de conhecimentos matemáticos, de uso da linguagem matemática, dos alunos se amplia no caminho por esses dois sentidos.

Esse é um dos motivos pelos quais defendemos a inserção de atividades de modelagem matemática em sala de aula nos anos iniciais do Ensino Fundamental, de modo a fomentar, desde os primeiros anos escolares, a formação matemática dos alunos, inserindo-os em diferentes jogos de linguagem, em diferentes situações e contextos de uso.

Referências

ALENCAR, E. S.; LAUTENSCHLAGER, E. (Orgs.). **Modelagem matemática nos anos iniciais**. São Paulo: Editora Sucesso, 2014.

ALMEIDA, L. W.; SILVA, K. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na Educação Básica**. São Paulo: Contexto, 2012.

BARBOSA, J. C. Uma perspectiva de Modelagem Matemática. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 3., 2003, Piracicaba. **Anais**...Piracicaba: UNIMEP, 2003.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática**: uma nova estratégia. 2. ed. São Paulo: Contexto, 2004.

BURAK, D.; MARTINS, M. A. Modelagem matemática nos anos iniciais da Educação Básica. **Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia**, Curitiba, v. 8, n. 1, p. 92-111, jan./abr. 2015.

DOERR, H. M.; ENGLISH, L. D. A modeling perspective on students' mathematical reasoning about data. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, v. 34, n. 2, p. 110-136. 2003.

ENGLISH, L. Mathematical modelling with Young learners. In: LAMON, S. J.; PARKER, W. A.; HOUSTON, S. K. (Eds.). **Mathematical Modelling**: a way of life. Chichester: Horwood Publishing, 2003. p. 3-18.

ENGLISH, L. D. Modeling with Complex Data in the Primary School. In: LESH, R.; et al. (Eds.). **Modeling students' mathematical modeling competencies**. 2010. Springer: New York, London, 2010. p. 287-300.

GOTTSCHALK, C. A natureza do conhecimento matemático sob a perspectiva de Wittgenstein: algumas implicações educacionais. **Cadernos de História e Filosofia da Ciência**, Campinas, v. 14, n. 2, p. 305-334, jul.-dez. 2004.

KAVIATKOVSKI, M. A. C. **A modelagem matemática como metodologia de ensino e aprendizagem nos anos iniciais do Ensino Fundamental**. 2012. 136 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, 2012.

LUNA, A. V. Modelagem Matemática nas séries iniciais do Ensino Fundamental: um estudo de caso no 1º ciclo. In: CONFERENCIA INTERAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 12, Santiago de Querétaro. **Anais**... Santiago de Querétaro: Comitê Interamericano de Educación Matemática, 2007.

NACARATO, A. M.; MENGALI, B. L. S.; PASSOS, C. L. B. **A matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental**: tecendo fios do ensinar e do aprender. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2011. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

SILVA, V. S.; KLÜBER, T. E. Modelagem matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental: reflexões e apologia aos seus usos. In: ALENCAR, E. S.; LAUTENSCHLAGER, E. (Orgs.). **Modelagem matemática nos anos iniciais**. São Paulo: Editora Sucesso, 2014. p. 7-24.

SILVA, V. S.; KLÜBER, T. E. Modelagem matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental: uma investigação imperativa. **Revista Eletrônica de Educação**, São Carlos, v.6, n. 2, p. 228-249, 2012.

SILVEIRA, M. R. A.; CUNEGATTO, T. Por uma Antropologia da Educação Matemática. **Revista Perspectivas da Educação Matemática**, Campo Grande, v. 9, n. 19, p. 39-55. 2016.

SOUZA, E. G.; BARBOSA, J. C. Contribuições teóricas sobre a aprendizagem matemática na modelagem matemática. **Zetetiké**, Campinas, v. 22, n. 41, p. 31-58. jan./jun. 2014.

TORTOLA, E. **Configurações de modelagem matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental**. 2016. 304 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016.

TORTOLA, E. ALMEIDA, L. M. W. Um olhar sobre os usos da linguagem por alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental em atividades de modelagem matemática. **RPEM**, Campo Mourão, v. 5, n. 8, p. 83-105, jan./jun. 2016.

TORTOLA, E. **Os usos da linguagem em atividades de Modelagem Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental**. 2012. 168 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2012.

WITTGENSTEIN, L. **Investigações Filosóficas**. 7. ed. Tradução de Marcos G. Montagnoli. Petrópolis: Editora Vozes; Bragança Paulista: Editora Universitária São Francisco, 2012. (Coleção Pensamento Humano). Tradução de: Philosophische Untersuchungen.

WITTGENSTEIN, L. **Observações Filosóficas**. Tradução de Raymond Hargreaves e Roger White. São Paulo: Edições Loyola, 2005. Tradução de: Philosophical Remarks.

WITTGENSTEIN, L. **Remarks on the Foundations of Mathematics**. 3ª reimpressão. Cambridge: The MIT Press, 1994.

Submetido em abril de 2017

Aprovado em junho de 2018