



## Relações entre o Raciocínio Combinatório e o Probabilístico: como estão propostas em currículos prescritos?

### Relations between Combinatorial and Probabilistic Reasonings: how are they proposed in prescribed curriculums?

Ewellen Tenorio de Lima <sup>1</sup>

Rute Elizabete de Souza Rosa Borba <sup>2</sup>

#### RESUMO

O presente trabalho consiste em uma análise documental de materiais curriculares nacionais. Tendo em vista o caráter de orientação ao trabalho docente possuído pelos currículos prescritos, buscou-se levantar, em documentos voltados aos anos do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, do ensino regular e da modalidade da Educação de Jovens e Adultos – PCN, PCN+ e PCEJA (BRASIL, 1997, 1998, 2001, 2002, 2002) –, as orientações referentes ao trabalho com a Combinatória e com a Probabilidade e discutir, especialmente, como são tratadas as relações que se estabelecem entre o raciocínio combinatório e o probabilístico. Constatou-se que, de maneira geral, esses documentos dão indícios das relações existentes entre tais áreas da Matemática. Dessa maneira, é importante que o professor, por meio de sua relação com tais materiais curriculares, promova um trabalho articulado, que pode beneficiar o desenvolvimento dos raciocínios em questão ao longo do processo de escolarização referente à Educação Básica.

**PALAVRAS-CHAVE:** Combinatória, Probabilidade, Educação Básica, Currículo prescrito.

#### ABSTRACT

The present study consists of a documentary analysis of national curricular materials. In view of the orientation of the teaching work carried out by the prescribed curricula, it was sought to raise, in documents related to the years of Elementary and Secondary Education, of regular education and of the modality of Youth and Adult Education – PCN, PCN+ and PCEJA (BRASIL, 1997, 1998, 2001, 2002, 2002) –, the orientation referring to the teaching of Combinatorics and Probability and to discuss, specially, how the relations between combinatorial and probabilistic reasoning are treated. It was found that, in general, these documents give indications of the relations existing between these areas of Mathematics. Thus, it is important that the teacher, through her/his

<sup>1</sup> Mestranda em Educação Matemática e Tecnológica. Universidade Federal de Pernambuco. E-mail: ewellentlima@gmail.com.

<sup>2</sup> Doutorado em Educação Matemática pela Oxford Brookes University, Reino Unido. Universidade Federal de Pernambuco. E-mail: resrborba@gmail.com.

relation with such curricular materials, promote an articulated work, which can benefit the development of the reasoning in question throughout the schooling process related to Basic Education.

**KEYWORDS:** Combinatorics, Probability, Basic Education, Prescribed curriculum.

### A importância dos raciocínios combinatório e probabilístico

A Combinatória estuda conjuntos discretos e as configurações que podem ser obtidas a partir de certas transformações que mudam a estrutura da composição dos elementos desses conjuntos. O estudo dessa área da Matemática nos permite “enumerar todos os modos possíveis em que um dado número de objetos pode ser misturado e combinado de modo que tenhamos certeza de que nenhuma possibilidade foi omitida” (BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1996, p. 17, tradução nossa). Por sua vez, conhecimentos probabilísticos nos habilitam a entender eventos que ocorrem aleatoriamente, isto é, eventos que “as pessoas sabem que podem acontecer, mas não tem certeza se e quando eles acontecerão” (BRYANT; NUNES, 2012, p. 3, tradução nossa).

O raciocínio combinatório e o raciocínio probabilístico constituem, dessa maneira, formas de relacionar conjuntos de elementos, de pensar sobre proporções e de compreender eventos do cotidiano. São modos de pensar constituintes do raciocínio lógico-matemático. Além disso, ressalta-se a existência de relações entre um e outro raciocínio: “como Heitele (1975) destaca, a Combinatória não é apenas uma ferramenta no cálculo de probabilidades, existe uma estreita inter-relação entre a ideia de experimento realizado a partir de um espaço amostral discreto e as operações combinatórias” (BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1996, p. 23, tradução nossa). Assim, a resolução de um problema probabilístico, na concepção de probabilidade mais comumente trabalhada na escola, está relacionada à razão entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis, demandando uma construção combinatória do conjunto desses casos, chamado de *espaço amostral*.

Fischbein (1975) evidenciou que o desenvolvimento cognitivo, por si só, não basta para o desenvolvimento desses tipos de raciocínio. Logo, dada a importância desses modos de pensamento, defende-se que o trabalho voltado para o desenvolvimento desses raciocínios deve ocorrer ao longo da Educação Básica por meio do estudo progressivo de conceitos relacionados à Combinatória e à Probabilidade (BORBA, 2016; CAMPOS; CARVALHO, 2016).

Tendo-se em vista o caráter de orientação intrínseco ao currículo *prescrito* expresso em documentos nacionais referentes aos diferentes anos de escolarização que compõem a

Educação Básica (BRASIL, 1997, 1998, 2001, 2002, 2002), buscou-se, por meio da análise das propostas curriculares em questão, levantar o que é orientado no que se refere ao trabalho com a Combinatória e com a Probabilidade. Também se buscou discutir, em especial, como estão postas as relações que se estabelecem entre o raciocínio combinatório e o probabilístico e se há sugestões de um trabalho articulado entre esses modos de pensamento, visando o desenvolvimento de ambos.

## O papel dinâmico do currículo em práticas educativas

O currículo apresenta-se, antes de tudo, como uma construção cultural e refere-se a “um modo de organizar uma série de práticas educativas” (GRUNDY, 1987 *apud* SACRISTÁN, 2000, p. 14). Sacristán (2000) entende o currículo como algo que se forma e ganha significado a partir da ocorrência de uma série de transformações, sendo esse “um objeto que se constrói no processo de configuração, implantação, concretização e expressão de determinadas práticas pedagógicas e em sua própria avaliação, como resultado das diversas intervenções que nele se operam” (p. 101).

Sob tal perspectiva, Sacristán (2000) propõe um modelo de interpretação do currículo como construção inter-relacionada de diferentes influências e distintos campos de atividade. O autor apresenta diferentes níveis de objetivação do significado do currículo, sendo esses: currículo *prescrito*, currículo *apresentado* aos professores, currículo *moldado* pelos professores, currículo *em ação*, currículo *realizado* e currículo *avaliado*.

O currículo *prescrito* se refere às regulações às quais todo sistema educativo está submetido. Engloba prescrições ou orientações que indicam aspectos a serem considerados e conteúdos que devem fazer parte, especialmente, da escolaridade obrigatória. Dessa forma, o currículo *prescrito* serve de referência para a elaboração de materiais, para o controle do sistema, dentre outras funções.

O currículo *apresentado* aos professores, por sua vez, apresenta, por diferentes meios, interpretações que buscam traduzir para os professores o significado e os conteúdos do que está posto no currículo *prescrito*. Um exemplo desse tipo de currículo é aquele que se faz presente nos livros didáticos.

O currículo *moldado* pelo professor reflete o papel do docente como agente ativo decisivo na concretização de significados e conteúdos dos currículos. O professor é, de fato, um tradutor, que, a partir de sua cultura profissional, experiências e concepções, molda as

propostas que lhes são apresentadas nos diferentes recursos materiais disponíveis para a inserção dessas em seu plano de trabalho docente.

É na prática, em sala de aula, que o currículo se transforma em método, ultrapassando os propósitos da proposta curricular, devido às influências que sofre nos processos de interação que ocorrem na ação pedagógica. Esse nível de objetivação do significado do currículo é denominado currículo *em ação*.

Já o currículo *realizado* se refere às consequências do currículo (cognitivas, afetivas, sociais, morais, etc.) que se refletem na aprendizagem dos alunos e que também afetam os professores e se projetam no ambiente escolar. Essas consequências são consideradas produtos relevantes do sistema ou dos métodos pedagógicos.

Por fim, o currículo *avaliado* ressalta certos saberes sobre outros, impondo critérios para o ensino e para a aprendizagem. Reforça, assim, significados definidos na prática a partir de pressões exteriores, que levam à manifestação, na avaliação, de aspectos do currículo por vezes incoerentes com os propósitos presentes no currículo *prescrito*, no currículo *apresentado*, ou com os objetivos do próprio professor, refletidos no currículo *moldado*.

Entende-se, assim, o currículo como “uma práxis antes que um objeto estático emanado de um modelo coerente de pensar a educação ou as aprendizagens necessárias das crianças e dos jovens” (SACRISTÁN, 2000, p. 15), isto é, “uma prática na qual se estabelece um diálogo, por assim dizer, entre agentes sociais, elementos técnicos, alunos que reagem frente a ele, professores que o modelam, etc.” (SACRISTÁN, 2000, p. 16). É, portanto, orientador da prática e produto da mesma, visto que é transformado durante seu uso.

No presente artigo, tem-se como alvo de investigação especificamente o currículo *prescrito*, que “contém expressões de objetivos globais, objetivos muito definidos, orientações metodológicas gerais e sugestões de atividades específicas para determinados conteúdos” (SACRISTÁN, 2000, p. 130). Esse tipo de currículo, que prescreve diretrizes curriculares e expectativas mínimas dentro de um sistema educativo, difunde uma cultura escolar comum para os membros dessa comunidade, influenciando profundamente a escolaridade obrigatória ofertada.

Destaca-se, dessa forma, os materiais referentes aos currículos prescritos, foco de investigação do presente texto, como potenciais influenciadores da prática pedagógica dos professores. Entretanto, “a concepção de que materiais curriculares são uma representação fixa do currículo, engessa o desenvolvimento curricular” (JANUARIO; LIMA; PIRES, 2016, p. 4), pois o currículo, em suas diferentes instâncias também é influenciado, moldado e adaptado a partir do momento em que dele é feito uso. Tal uso diz respeito, segundo

Remillard (2005) a “como professores interagem com, se baseiam em, se referem a e são influenciados pelos recursos projetados para orientar o ensino” (p. 212, tradução nossa). Isto é, o uso do currículo envolve as interações entre o professor e os materiais que apresentam as orientações curriculares, sejam elas referentes ao currículo *prescrito* ou ao currículo *apresentado*. Tais materiais são denominados por Remillard (2005) como *materiais curriculares*.

### Combinatória e Probabilidade e o desenvolvimento de modos de pensamento

Morgado, Pitombeira de Carvalho, Pinto de Carvalho e Fernandez (1991) definem a Combinatória como “a parte da Matemática que analisa estruturas e relações discretas” (p. 1). Esses autores indicam dois tipos de problemas mais frequentes no estudo da Combinatória, sendo esses: “1. Demonstrar a existência de subconjuntos de elementos de um conjunto finito dado e que satisfazem certas condições; 2. Contar ou classificar os subconjuntos de um conjunto finito e que satisfazem certas condições dadas” (p. 2).

Ao resolver problemas combinatórios, deseja-se determinar todas as possibilidades de combinação de elementos relacionados à dada situação, sejam esses elementos pertencentes a dois ou mais conjuntos distintos (característica dos problemas denominados *produto cartesiano*<sup>3</sup>), pertencentes a um único conjunto no qual alguns elementos devem ser escolhidos (o que ocorre em problemas de *arranjo* e de *combinação*, que se diferenciam em função da ordem dos elementos determinar possibilidades distintas no primeiro tipo de problema, enquanto não determina novas possibilidades no segundo tipo) ou sejam todos os elementos pertencentes a um único conjunto e devam ser permutados entre si para a formação de todas as possibilidades (problemas de *permutação*). O Quadro 1 apresenta esses quatro tipos de problemas combinatórios citados, explicitando seus invariantes, isto é, propriedades características de cada tipo de problema, no que se refere à ordem e à escolha.

**Quadro 1:** Características e exemplos dos problemas combinatórios.

TIPO DE PROBLEMA	QUANTIDADE DE CONJUNTOS	ESCOLHA	ORDEM	EXEMPLO

<sup>3</sup> No presente texto é adotada a classificação de problemas combinatórios conforme propõem Pessoa e Borba (2009), que integram classificações anteriores, apresentando quatro tipos de situações combinatórias: *produto cartesiano*, *arranjo*, *permutação* e *combinação*.

<b>PRODUTO CARTESIANO</b>	Dois ou mais conjuntos.	Todos os elementos (um-a-um).	Não determina possibilidades distintas.	Quantos uniformes diferentes podem ser formados com 4 camisetas e 2 calças (peças em cores distintas)?
<b>ARRANJO</b>	Conjunto único.	Alguns elementos.	Determina possibilidades distintas.	De quantas formas podem ser escolhidos um atacante e um goleiro dentre 4 rapazes?
<b>PERMUTAÇÃO</b>	Conjunto único.	Todos os elementos.	Determina possibilidades distintas.	Quantas são as possíveis ordens de leitura de 3 livros distintos?
<b>COMBINAÇÃO</b>	Conjunto único.	Alguns elementos.	Não determina possibilidades distintas.	De quantas maneiras podem ser escolhidas 3 pessoas dentre 5?

Fonte: Situações-problema adaptadas de Lima (2016).

A Probabilidade, por sua vez, é definida como “o ramo da Matemática que cria, desenvolve e em geral pesquisa modelos que podem ser utilizados para estudar experimentos ou fenômenos aleatórios” (MORGADO *et al.*, 1991, p. 119). A Probabilidade se apresenta como

um modo de medir a incerteza, em consequência, os modelos probabilísticos são o fundamento da maior parte da Estatística. Isto implica que o conhecimento da teoria da probabilidade é necessário para uma compreensão adequada dos métodos estatísticos, que hoje são ferramentas indispensáveis nos campos científico, profissional e social (GODINO; BATANERO; CAÑIZARES, 1991, p. 11-12, tradução nossa).

Godino, Batanero e Cañizares (1991) destacam que o estudo da Probabilidade pode promover uma rica oportunidade de aplicação de conhecimentos matemáticos a situações cotidianas. Seu estudo proporciona o contato com a incerteza, podendo desenvolver reflexões úteis aos problemas encontrados ao longo da vida dos estudantes, os permitindo explorar

situações aleatórias e estimar probabilidades de ocorrência de diferentes eventos e classificá-los em eventos certos, prováveis, improváveis ou impossíveis.

Para Morgado *et al.* (1991), o primeiro passo para a resolução de um problema de Probabilidade consiste em “explicitar qual é o conjunto de possíveis resultados do experimento e calcular o número de elementos contidos nele. Este conjunto é chamado Espaço Amostral” (p. 120). A determinação do espaço amostral é importante não só para o cálculo de probabilidades, mas é também um elemento essencial para entender a natureza da aleatoriedade. Bryant e Nunes (2012) afirmam que problemas probabilísticos “são sempre sobre um conjunto de eventos possíveis, mas incertos [...], nós precisamos saber precisamente quais são todos os eventos possíveis” (p. 29, tradução nossa).

A determinação do espaço amostral de um evento está, ainda, intimamente relacionada ao raciocínio combinatório, visto que o levantamento das diferentes possibilidades de sucesso em dado evento demanda um processo de construção combinatória. Construção que permite, ainda, identificar o número de eventos favoráveis e o número de eventos possíveis (estando, desse modo, ligada à definição do cálculo de probabilidades comumente trabalhada no ambiente escolar). Além disso, é possível observar essa relação entre a determinação de espaços amostrais e as operações combinatórias, a partir da análise do uso do diagrama de árvore em Probabilidade e Combinatória.

Piaget e Inhelder (1951 *apud* NAVARRO-PELAYO; BATANERO; GODINO, 1996) defendem que, se o sujeito não é capaz de raciocinar sob a luz da Combinatória, não conseguirá compreender a ideia de Probabilidade, exceto em casos nos quais experimentos aleatórios muito elementares sejam tratados. O raciocínio combinatório proporciona uma importante forma de pensar sobre e compreender experimentos aleatórios, dos mais elementares aos mais elaborados.

Santos (2015) constatou que diversos de seus alunos não estimavam a probabilidade da maneira esperada devido a equívocos de interpretação de espaço amostral e buscou, em sua tese, entre outros objetivos, identificar sinais da contribuição de um estudo da Combinatória vinculado ao desenvolvimento do raciocínio probabilístico em contexto de problematização em sala de aula. A autora destaca que “conceitos relacionados à Combinatória e à Probabilidade envolvem significações do ‘possível’ e do ‘provável’, que em diferentes contextos se articulam e em outros não” (p. 163). Assim, se faz necessário um processo de ensino que permita a articulação e comunicação de ideias entre essas áreas. A importância do raciocínio combinatório para a correta compreensão da probabilidade de ocorrência de determinados eventos é evidenciada na passagem a seguir.

As pessoas acreditam que a probabilidade de um cartão com seis números alternados ser sorteado é maior do que a de um cartão com seis números consecutivos. Dificilmente a semelhança entre essas probabilidades será aceita pelas pessoas (SANTOS, 2015, p. 46).

Por outro lado, o espaço amostral, conceito probabilístico, constitui uma importante ferramenta para a resolução de problemas combinatórios, pois grande parte dos erros ao resolver problemas de natureza combinatória é motivada por erros de listagem não sistemática, que consistem na indicação das possibilidades relacionadas a um problema combinatório por “ensaio e erro, sem um procedimento recursivo que leve à formação de todas as possibilidades” (NAVARRO-PELAYO; BATANERO; GODINO, 1996, p. 33, tradução nossa).

Em Lima (2016) são apresentados e discutidos os primeiros resultados referentes a uma pesquisa de dissertação, em andamento, que investiga as relações que se estabelecem entre o raciocínio combinatório e o raciocínio probabilístico durante a resolução de problemas de Combinatória e de Probabilidade. Nesse trabalho, desenvolvido com estudantes da Educação de Jovens e Adultos (EJA), já foi possível perceber importantes contribuições entre os raciocínios investigados, visto que revisitações, sob o olhar da Probabilidade, aos diferentes problemas combinatórios propostos proporcionaram reflexões sobre os invariantes de *ordem* e de *escolha* dos mesmos, levando os estudantes a se aproximarem, e, por vezes, esgotarem, isto é, encontrar (direta ou indiretamente), o número total de possibilidades relativo aos problemas. Acredita-se, a partir dos resultados obtidos, que a articulação dos raciocínios em questão pode beneficiar o desenvolvimento dessas formas de pensamento em estudantes da Educação de Jovens e Adultos, bem como do ensino regular, em seus diferentes níveis.

Dado o caráter de orientação ao ensino de Matemática possuído pelo currículo *prescrito*, buscou-se investigar o que é proposto no que se refere ao trabalho com a Combinatória e com a Probabilidade e se e como estão presentes indicações à existência de relações entre tais áreas da Matemática e orientações ao trabalho em sala de aula que explore essas relações. Foram adotados como foco de análise os documentos referentes aos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1997, 1998), PCN+ (BRASIL, 2002) e às Propostas Curriculares para a Educação de Jovens e Adultos – PCEJA (BRASIL, 2001, 2002) voltados, respectivamente, para os Anos Iniciais e Anos Finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio no ensino regular e para os anos equivalentes ao Ensino Fundamental na modalidade da Educação de Jovens e Adultos. Teve-se por objetivo levantar orientações ao ensino da Combinatória e da Probabilidade que evidenciem a possibilidade de um trabalho

articulado que promova o desenvolvimento do raciocínio combinatório e do probabilístico nos diferentes anos de escolarização que compõem a Educação Básica.

### **Combinatória e Probabilidade em materiais curriculares nacionais**

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) surgiram “diante das mudanças sociais e educacionais presentes nas décadas de 80 e 90, [...] tendo em vista a universalização da educação básica, pública e laica” (VERONEZE; NOGARO; SILVA; ZANOELLO, 2016, p. 1). A primeira coleção de documentos publicada foi a voltada para os 1º e 2º ciclos do Ensino Fundamental (atualmente Anos Iniciais), em 1997. Os documentos voltados para os 3º e 4º ciclos (Anos Finais do Ensino Fundamental) foram publicados em seguida, em 1998. No ano 2000, foram publicados os parâmetros referentes aos três anos que compõem o Ensino Médio – PCNEM, que contam com orientações complementares publicadas em 2002 (conhecidas como PCN+).

A Educação de Jovens e Adultos (EJA) conta com orientação curricular específica: a Proposta Curricular para a Educação de Jovens e Adultos (PCEJA). A primeira das propostas é voltada para o 1º segmento do Ensino Fundamental (período de escolarização equivalente aos Anos Iniciais), publicada em 2001. A proposta voltada para o 2º segmento (equivalente aos Anos Finais do Ensino Fundamental) foi publicada no ano seguinte, em 2002. Quanto ao Ensino Médio na modalidade da EJA, não há proposta curricular específica. Dessa forma, tal nível de ensino nessa modalidade adota como currículo prescrito o material direcionado à mesma etapa de escolarização do ensino regular.

Atualmente, uma nova base curricular nacional está em processo de construção. Após aprovação, a Base Nacional Curricular Comum (BNCC) substituirá os PCN como principal currículo prescrito nacional.

É importante ressaltar que, tais documentos apresentam-se não como um modelo curricular fixo e impositivo, mas como uma proposta flexível “a ser concretizada nas decisões regionais e locais sobre currículos e sobre programas de transformação da realidade educacional empreendidos pelas autoridades governamentais, pelas escolas e pelos professores” (BRASIL, 1997, p. 13). É dado destaque à relação professor-materiais curriculares como transformadora do currículo, visto que é adotada uma concepção de currículo que considera que é necessário que haja flexibilidade do mesmo “para promover discussões e reelaborações quando realizado em sala de aula, pois é o professor que traduz os princípios elencados em prática didática” (BRASIL, 1998, p. 49).

O procedimento de análise dos materiais curriculares em questão consistiu na leitura dos textos, especialmente os volumes voltados para a Matemática, visando identificar os objetivos pontuados para o trabalho com a Combinatória e com a Probabilidade nos diferentes níveis de escolarização do Ensino Regular e também da EJA. A partir dessa leitura, buscou-se levantar, também, possíveis indicações da existência/importância de relações entre essas áreas da Matemática e de orientações didáticas ao trabalho, em sala de aula, que proporcionem o desenvolvimento do raciocínio combinatório e do probabilístico.

Os PCN dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental (BRASIL, 1997) são organizados em dez volumes, sendo um deles de Introdução (que justifica as opções feitas durante a elaboração da coleção), seis documentos referentes às diferentes áreas de conhecimento (Língua Portuguesa, Matemática, Ciências Naturais, História, Geografia e Arte e Educação Física) e três volumes voltados à discussão dos Temas Transversais. Os PCN dos Anos Finais (BRASIL, 1998) também são organizados em dez volumes, sendo eles: Introdução, Língua Portuguesa, Matemática, Ciências Naturais, História, Geografia, Arte, Educação Física, Língua Estrangeira e um volume voltado para os Temas Transversais.

Os documentos de Introdução apresentam os objetivos gerais de cada área. No que diz respeito à Matemática, foco da presente análise, é indicado que um dos objetivos gerais do seu ensino no Ensino Fundamental é levar o estudante a

fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos do ponto de vista do conhecimento e estabelecer o maior número possível de relações entre eles, utilizando para isso o conhecimento matemático (aritmético, geométrico, métrico, algébrico, estatístico, combinatório, probabilístico); selecionar, organizar e produzir informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las criticamente (BRASIL, 1997, p. 37).

Além disso, nos volumes específicos de Matemática nos Anos Iniciais e nos Anos Finais (BRASIL, 1997, 1998), é adotada uma abordagem por bloco de conteúdos, sendo considerados quatro blocos: Números e Operações, Espaço e Forma, Grandezas e Medidas e Tratamento da Informação.

No presente estudo, no que se refere aos documentos referentes ao Ensino Fundamental no ensino regular, volta-se o olhar, em especial para o bloco de conteúdos de Tratamento da Informação, que se apresenta como bloco específico (embora pudesse ser incorporado aos outros blocos) dada sua importância na sociedade atual. Nesse bloco, são integrados estudos relativos a noções de Estatística, Probabilidade e Combinatória. É dado destaque ao fato de que, nessa etapa da escolarização, “o que se pretende não é o desenvolvimento de um trabalho baseado na definição de termos ou de fórmulas envolvendo

tais assuntos" (BRASIL, 1997, p. 40). No que se refere à Combinatória e à Probabilidade, focos de investigação, tem-se que:

relativamente à combinatória, o objetivo é levar o aluno a lidar com situações-problema que envolvam combinações, arranjos, permutações e, especialmente, o princípio multiplicativo da contagem. Com relação à probabilidade, a principal finalidade é a de que o aluno compreenda que grande parte dos acontecimentos do cotidiano são de natureza aleatória e é possível identificar prováveis resultados desses acontecimentos (BRASIL, 1997, p. 40).

Ainda no que diz respeito às orientações ao Ensino Fundamental, dessa vez, voltadas para a Educação de Jovens e Adultos, tem-se a Proposta Curricular referente ao 1º segmento do Ensino Fundamental organizada em um volume único que contempla uma apresentação da proposta em questão, e indica objetivos e conteúdos relacionados a três áreas do conhecimento: Língua Portuguesa, Matemática e Estudos da Sociedade e da Natureza.

Especialmente, quanto às orientações ao trabalho da Matemática, destaca-se que, nessa modalidade de ensino,

a atividade matemática deve estar orientada para integrar de forma equilibrada seu papel formativo (o desenvolvimento de capacidades intelectuais fundamentais para a estruturação do pensamento e do raciocínio lógico) e o seu papel funcional (as aplicações na vida prática e na resolução de problemas de diversos campos de atividade) (BRASIL, 2001, p. 99-100).

Há uma organização de conteúdos matemáticos em quatro blocos, sendo esses: Números e Operações Numéricas, Medidas, Geometria e Introdução à Estatística. Dessa forma, tem-se como foco de análise, no presente estudo, o bloco de conteúdos referente à Introdução à Estatística, que reúne "conteúdos relacionados a procedimentos de coleta, organização, apresentação e interpretação de dados, leitura e construção de tabelas e gráficos" (BRASIL, 2001, p. 108).

Dessa maneira, a Combinatória e a Probabilidade não ganham grande destaque neste documento voltado ao primeiro segmento da EJA. A Combinatória é apresentada como consequência de um dos significados atribuídos à multiplicação, associada apenas à ideia de *produto cartesiano* (presente no bloco de Números e Operações Numéricas). Por sua vez, o trabalho com a Probabilidade aparece como um aprofundamento do tratamento de dados estatísticos, visando à realização de previsões a partir da identificação de características de eventos.

Já a Proposta Curricular para a EJA direcionada ao 2º segmento do Ensino Fundamental (BRASIL, 2002) apresenta-se em três volumes, sendo o primeiro de Apresentação, o segundo voltado para orientações ao trabalho com Língua Portuguesa,

Língua Estrangeira, História e Geografia e o terceiro referente às áreas de Matemática, Ciências Naturais, Arte e Educação Física.

Indica-se que, nesse nível de ensino, o trabalho matemático “deve visar o desenvolvimento de conceitos e procedimentos relativos ao pensamento numérico, geométrico, algébrico, à competência métrica, ao raciocínio que envolva proporcionalidade, assim como o raciocínio combinatório, estatístico e probabilístico” (p. 20). As orientações são organizadas com base em blocos de conteúdo relativos às diferentes formas de pensar anteriormente citadas. Adotam-se como foco, no presente texto, as orientações presentes no bloco de conteúdos relativos aos raciocínios combinatório, estatístico e probabilístico.

Por sua vez, os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio – PCNEM – (BRASIL, 2000) são organizados em diferentes volumes voltados para três áreas de conhecimento distintas: Linguagens, Códigos e suas Tecnologias, Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias e Ciências Humanas e suas Tecnologias. Essas orientações ao Ensino Médio contam, ainda, com documentos de caráter complementar, os PCN+ (BRASIL, 2002), também organizados em função das áreas de conhecimento acima citadas.

Nessa etapa final da escolaridade básica, a Matemática deve proporcionar o desenvolvimento de competências e habilidades que capacitem os estudantes “para compreender e interpretar situações, para se apropriar de linguagens específicas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões, generalizar e para muitas outras ações necessárias à sua formação” (BRASIL, 2002, p. 111).

As orientações referentes a essa área do conhecimento apresentam-se divididas em três temas estruturadores: Álgebra, números e funções; Geometria e medidas e Análise de dados. Esse terceiro tema estruturador constitui o foco da presente análise, visto que tem como objetos de estudo “os conjuntos finitos de dados, [...] o que dá origem a procedimentos bem distintos daqueles dos demais temas, pela maneira como são feitas as quantificações, usando-se processos de contagem combinatórios, freqüências e medidas estatísticas e probabilidades” (p. 126), englobando, assim, o trabalho com conceitos da Estatística, Combinatória e Probabilidade.

Dado o posto, sintetiza-se, no Quadro 2, os conteúdos e competências elencadas nos documentos específicos de Matemática, sobre o trabalho com Combinatória e Probabilidade no Ensino Fundamental e no Ensino Médio (voltados tanto ao ensino regular quanto à Educação de Jovens e Adultos).

**Quadro 2:** Conteúdos referentes à Combinatória e Probabilidade presentes em materiais curriculares nacionais

	<b>ENSINO REGULAR</b>	<b>EDUCAÇÃO DE JOVENS E ADULTOS</b>
<b>ANOS INICIAIS</b>	Exploração da ideia de probabilidade em situações-problema simples; Avaliação de probabilidades com base em informações dadas (eventos possíveis, certos, impossíveis, etc.); Resolução de problemas combinatórios usando estratégias pessoais.	Identificação das características dos acontecimentos previsíveis e utilização das informações para fazer previsões; Identificação das características de acontecimentos aleatórios e utilização das informações para avaliar probabilidades.
<b>ANOS FINAIS</b>	Representação e contagem dos casos possíveis em situações combinatórias; Construção de espaço amostral; Uso do princípio multiplicativo; Indicação da probabilidade de um evento por meio de uma razão.	Representação e contagem dos casos possíveis em situações combinatórias; Resolução de situações-problema de contagem, que envolvem o princípio multiplicativo, por meio de estratégias variadas, sem a aplicação de fórmulas; Construção do espaço amostral, utilizando o princípio multiplicativo e a indicação da probabilidade de um evento por meio de uma razão; Elaboração de experimentos e simulações para estimar e verificar probabilidades previstas.
<b>ENSINO MÉDIO</b>	Identificação de regularidades para estabelecer regras e propriedades em processos nos quais se fazem necessários os processos de contagem; Identificação de dados e relações envolvidas numa situação-problema que envolva o raciocínio combinatório, utilizando os processos de contagem; Reconhecimento do caráter aleatório de fenômenos e eventos compreendendo o significado e a importância da probabilidade como meio de prever resultados; Quantificação e previsões em situações que envolvam o pensamento probabilístico.	Não há material curricular específico.

Fonte: Síntese construída a partir de documentos curriculares (BRASIL, 1997, 1998, 2001, 2002, 2002)

É possível perceber, nesses materiais curriculares, uma abordagem de trabalho contínuo acerca de conceitos relacionados à Combinatória e à Probabilidade. A partir das análises realizadas, identificou-se, também, que é proposto um aprofundamento e formalização de estratégias relacionadas à resolução de problemas combinatórios e probabilísticos ao longo dos anos de escolarização que compõem a Educação Básica.

Visou-se, contudo, além de levantar os conteúdos referentes a tais áreas da Matemática presentes nos documentos analisados, investigar se e como estão postas discussões que embasem o estabelecimento de relações entre o trabalho com Combinatória e Probabilidade, podendo favorecer, conjuntamente, o desenvolvimento do raciocínio combinatório e do probabilístico.

A importância do trabalho com a Combinatória, no Ensino Fundamental, é explicitada em função de suas contribuições inclusive para o desenvolvimento de conhecimentos em outras áreas da Matemática, como a Probabilidade e a Estatística:

a resolução de problemas de contagem, no ensino fundamental, coloca o aluno diante de situações em que é necessário agrupar objetos, em diferentes quantidades, caracterizando os agrupamentos feitos. Ao tentar solucionar essas situações, ele poderá aperfeiçoar a maneira de contar os agrupamentos e desenvolver, assim, o raciocínio combinatório. Consequentemente, poderá desenvolver maior segurança e criatividade para enfrentar situações-problema de caráter aleatório, que dependem de uma contagem sistematizada, e dispor de uma ferramenta útil e motivadora para a aprendizagem da probabilidade e da estatística (BRASIL, 1998, p. 136-137).

Na passagem acima, é possível perceber o estabelecimento de relações entre Combinatória e Probabilidade, visto que a exploração de situações combinatórias é apontada como algo que pode contribuir, também, para o desenvolvimento do raciocínio probabilístico. Por outro lado, é possível identificar, no mesmo documento, indicações da existência de tais relações no sentido inverso, isto é, o estudo da Probabilidade pode trazer contribuições importantes para o desenvolvimento do raciocínio combinatório, visto que é indicado que no trabalho com a Probabilidade se faça uso de ferramentas também relacionadas ao raciocínio combinatório.

No trabalho com probabilidade é fundamental que os alunos compreendam o significado de espaço amostral e sua construção pela contagem dos casos possíveis, utilizando-se do princípio multiplicativo e de representações como uma tabela de dupla entrada ou um diagrama de árvore (BRASIL, 1998, p. 137).

Espera-se, portanto, que o contato dos estudantes com problemas combinatórios, desde o início da escolarização proporcione a familiarização com a contagem de agrupamentos de objetos. O uso da listagem proporcionada pela explicitação de espaços amostrais é

apresentado como uma estratégia inicial de resolução de problemas combinatórios, havendo espaço, posteriormente, no decorrer dos anos de escolarização, para a formalização de outros conceitos e estratégias de resolução desses problemas, como o princípio multiplicativo, que se apresenta como estratégia eficiente para a resolução de problemas combinatórios com número de possibilidades mais elevados. Nos PCN (BRASIL, 1998), esse princípio é apresentado como associado a situações combinatórias de *produto cartesiano*, “tal princípio está quase sempre associado a situações do tipo: Se cada objeto de uma coleção A for combinado com todos os elementos de uma coleção B, quantos agrupamentos desse tipo pode-se formar?” (p. 137), entretanto, é uma estratégia pertinente para a resolução dos diferentes tipos de situações combinatórias.

A partir da análise da Proposta Curricular para a Educação de Jovens e Adultos direcionada ao 1º segmento (BRASIL, 2001) foi possível perceber que não há grande destaque dado ao trabalho com Probabilidade e que a Combinatória aparece apenas como um dos significados atribuídos ao conceito de multiplicação (apenas situações de *produto cartesiano*), não estando inserida no mesmo bloco de conteúdos referentes à Estatística e à Probabilidade. Dessa maneira, não se identificou, nesse documento, indicações da existência de relações entre o raciocínio combinatório e o probabilístico. No documento voltado para o 2º segmento do Ensino Fundamental (BRASIL, 2002) aparecem mais fortemente orientações ao trabalho com conceitos combinatórios e probabilísticos. Entretanto, não há, explicitamente, sugestões a um trabalho articulado entre os mesmos.

Por fim, no documento relativo às orientações direcionadas ao Ensino Médio (BRASIL, 2002), o raciocínio combinatório é apontado como importante ferramenta ao desenvolvimento dos raciocínios probabilístico e estatístico. A Estatística e a Probabilidade são compreendidas “como um conjunto de ideias e procedimentos que permitem aplicar a Matemática em questões do mundo real. [...] formas de a Matemática quantificar e interpretar conjuntos de dados ou informações que não podem ser quantificados direta ou exatamente” (p. 126) e o desenvolvimento de conhecimentos combinatórios é indicado como algo que proporciona uma abordagem mais completa da Probabilidade.

Entretanto, o trabalho com a Combinatória não é apresentado simplesmente como ferramenta ao desenvolvimento do raciocínio probabilístico, visto que é dado destaque ao fato de que por si só, o trabalho com conceitos inseridos nessa área de conhecimento matemático permite o desenvolvimento de uma nova forma de pensar em Matemática: o raciocínio combinatório. O desenvolvimento desse raciocínio constitui uma ferramenta que permite “decidir sobre a forma mais adequada de organizar números ou informações para poder contar

os casos possíveis” (p. 126). É dado destaque, ainda, à importância de que não se faça o uso excessivo de fórmulas durante o trabalho com conceitos combinatórios:

as fórmulas devem ser consequência do raciocínio combinatório desenvolvido frente à resolução de problemas diversos e devem ter a função de simplificar cálculos quando a quantidade de dados é muito grande. Esses conteúdos devem ter maior espaço e empenho de trabalho no Ensino Médio, mantendo de perto a perspectiva da resolução de problemas aplicados para se evitar a teorização excessiva e estéril (BRASIL, 2002, p. 127).

Diante do exposto, constatou-se que o currículo *prescrito* apresentado nos materiais curriculares nacionais analisados, apresenta indícios da existência de relações entre Combinatória e Probabilidade e da importância da construção de conhecimentos relacionados a uma e outra área para o desenvolvimento dos raciocínios combinatório e probabilístico na Educação Básica.

## Considerações Finais

No presente trabalho foram analisados materiais curriculares nacionais, que compõe o currículo *prescrito* referente à Educação Básica (ensino regular e EJA). Buscou-se levantar as orientações relativas ao ensino da Combinatória e da Probabilidade, bem como identificar indícios da sugestão de um trabalho articulado que promova o desenvolvimento do raciocínio combinatório e do probabilístico nos Anos Iniciais e Anos Finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio.

Constatou-se que, no geral, os materiais curriculares analisados (PCN, PCN+ e PCEJA – (BRASIL, 1997, 1998, 2001, 2002, 2002)) apresentam indicações das relações existentes entre as áreas da Matemática focos de discussão e, dessa maneira, podem embasar o desenvolvimento de propostas de articulação entre conceitos de Combinatória e Probabilidade, visando o desenvolvimento de ambos os raciocínios nos diferentes níveis e modalidades de ensino da Educação Básica.

Destaca-se ainda, a presença de orientações didáticas nos materiais analisados que evidenciam a importância da exploração de estratégias variadas durante o trabalho com Combinatória e Probabilidade (como listagem, princípio multiplicativo ou princípio fundamental da contagem, simulações para estimativa de probabilidades, entre outras), adequadas aos diferentes níveis de ensino, desde os anos iniciais até chegar a uma maior formalização no Ensino Médio. O uso dessas diferentes estratégias permite que a utilização excessiva de fórmulas seja evitada, o que é muito importante para o desenvolvimento de ambos os raciocínios.

É importante reafirmar, ainda, que, para que haja reflexo das discussões curriculares em sala de aula, é importante que o professor, através de sua relação com os materiais curriculares aqui analisados e outros como, por exemplo, o livro didático, levante reflexões que embasem a atividade docente com o fim de desenvolver um e outro raciocínio, além de explorar as relações existentes entre ambos.

## Referências

BATANERO, Maria Carmen; GODINO, Juan Díaz; NAVARRO-PELAYO, Virginia. **Razonamiento Combinatorio**. Madrid: Síntesis, 1996.

BORBA, Rute. Antes cedo do que tarde: o aprendizado da Combinatória no início da escolarização. **Anais do Encontro de Combinatória, Estatística e Probabilidade dos Anos Iniciais – Encepai**. Recife, 2016.

BRASIL. **Educação para Jovens e Adultos**: ensino fundamental: proposta curricular - 1º segmento. Brasília: MEC, 2001.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais +**: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC / Secretaria da Educação Média e Tecnológica, 2002.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: introdução aos parâmetros curriculares nacionais. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Fundamental, 1997.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. 1º e 2º ciclos. Brasília: MEC / Secretaria de Ensino Fundamental, 1997.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. 3º e 4º ciclos. Brasília: MEC / Secretaria de Ensino Fundamental, 1998.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: introdução aos parâmetros curriculares nacionais. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Fundamental, 1998.

BRASIL. **Proposta Curricular para a Educação de Jovens e Adultos**: segundo segmento do ensino fundamental: 5ª a 8ª série. v. 3. MEC / Secretaria de Educação Fundamental, 2002.

BRYANT, Peter; NUNES, Terezinha. **Children's understanding of probability**: a literature review. Nuffield Foundation. 2012, 86p. Disponível em:  
[http://www.nuffieldfoundation.org/sites/default/files/files/Nuffield\\_CuP\\_FULL\\_REPORTv\\_FINAL.pdf](http://www.nuffieldfoundation.org/sites/default/files/files/Nuffield_CuP_FULL_REPORTv_FINAL.pdf).

CAMPOS, Tânia M. M.; CARVALHO, José Ivanildo. Probabilidade nos anos iniciais da educação básica: contribuições de um programa de ensino. **Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana – Em Teia**. v. 7, n. 1, 2016.

FISCHBEIN, Efraim. **The intuitive sources of probabilistic thinking in children.** Dordrecht, 1975.

GODINO, Juan Díaz; BATANERO, Maria Carmen; CAÑIZARES, Maria José. **Azar y probabilidad.** Madrid: Síntesis, 1991.

JANUARIO, Gilberto; LIMA, Kátia; PIRES, Célia Maria. A relação professor-curriculum e os diferentes usos dos materiais curriculares de Matemática. **Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM.** São Paulo, 2016.

LIMA, Ewellen. Raciocínios combinatório e probabilístico na EJA: investigando relações. **Anais do XX Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática – EBRAPEM.** Curitiba, 2016.

MORGADO, Augusto César; PITOMBEIRA DE CARVALHO, João Bosco; PINTO DE CARVALHO, Paulo César; FERNANDEZ, Pedro. **Análise combinatória e probabilidade.** Rio de Janeiro: Graftex, 1991.

NAVARRO-PELAYO, Virginia; BATANERO, Maria Carmen; GODINO, Juan Díaz. Razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria. **Educación Matemática**, v.8(1), p. 26-39, 1996.

PESSOA, Cristiane; BORBA, Rute. Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1<sup>a</sup> a 4<sup>a</sup> série. *p.105-150. Zetetiké: Revista de Educação Matemática*, Campinas, SP, v. 17, n. 31, dez. 2009.

REMILLARD, Janine T. Examining key concepts in research on teachers' use of Mathematics Curricula. **Review of Educational Research**, Washington, v. 75, n. 2, p. 211–246, jun. 2005.

SACRISTÁN, J. Gimeno. **O currículo: Uma reflexão sobre a prática.** 3. ed., Porto Alegre: Artmed, 2000.

SANTOS, Jaqueline Aparecida Foratto Lixandrão. **A produção de significações sobre Combinatória e Probabilidade numa sala de aula do 6º ano do Ensino Fundamental a partir de uma prática problematizadora.** (Tese. Pós-graduação em Educação). Universidade São Francisco. Itatiba, 2015.

VERONEZE, Daniela; NOGARO, Arnaldo; SILVA, Fernanda; ZANOELLO, Simone. Consensos e dissensos entre os Parâmetros Curriculares Nacionais e a Base Nacional Comum Curricular. **Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM.** São Paulo, 2016.

Submetido em maio de 2017

Aprovado em julho de 2017