REVISTA DO **PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA** DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL (UFMS)

Volume 7, Número 13 – 2014

O Uso do Erro como Estratégia Didática: uma nova perspectiva na reconstrução do conhecimento

The Use of Error as Didactic Strategy: a new perspective on the reconstruction of knowledge

Maria Luisa Perdigão Diz Ramos[1]

Edda Curi[2]

Resumo

Este artigo tem como objetivo descrever a estratégia didática utilizada para identificar e corrigir erros detectados em questões sobre simplificação de expressões usando a álgebra booleana e a álgebra matemática. Para isso, foram realizadas análise de conteúdo e análise de erros em 38 produções escritas de alunos do 1º ano integrado de um curso técnico em uma escola pública de Minas Gerais. A partir das análises realizadas elaborou-se um teste investigativo com a finalidade de se tratar o erro de forma didática. Após a realização do teste investigativo, formaram-se duplas para identificação e correção dos erros, além das intervenções realizadas pela professora. Como resultado, foi possível observar que a maioria dos erros cometidos era proveniente do uso incorreto da propriedade distributiva, mas, por meio da estratégia didática delineada, foi possível utilizar-se do erro na reconstrução do conhecimento.

Palavras-chave: Estratégia Didática. Álgebra Booleana. Álgebra Matemática. Tratamento dos Erros. Interação.

Abstract

This article aims to describe the didactic strategy used to identify and correct errors detected in questions about simplifying expressions using Boolean algebra and algebra mathematics. For this, we performed content analysis and analysis of errors in written productions of 38 students in the 1st year of an integrated technical course in a public school in Minas Gerais. From the analyzes was conducted a investigative test for the purpose of treating a didactic error. After the test investigative formed pairs to identify and correct the errors, and the interventions made by the teacher. As a result, it was observed that most of the errors came from the incorrect use of the distributive property, but through didactic strategy outlined, it was possible to use the error in the reconstruction of knowledge.

Keywords: Didactic strategy; Boolean Algebra, Algebra Mathematics; Treatment of Errors; Interaction.

[1] Doutoranda em Ensino de Ciências e Matemática pela Universidade Cruzeiro do Sul/Unicsul – Centro Federal de Educação Tecnológica/Cefet-MG – Belo Horizonte – Minas Gerais – Brasil – mlperdigao@yahoo.com.br.
[2] Doutora Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo/PUCSP – Universidade Cruzeiro do Sul/Unicsul – São Paulo – São Paulo – Brasil – edda.curi@gmail.com.

Introdução

É imprescindível a criação de novas estratégias didáticas para a superação das dificuldades e correção dos erros. Para isso, o professor precisa analisar minuciosamente a produção escrita do aluno para detectar e identificar os erros cometidos. Assim, é possível dar um tratamento didático ao erro, isto é, usar o lado construtivo e criativo desses enganos com o objetivo de minimizar as dificuldades.

As três fases nomeadas por detecção, identificação e correção são mencionadas por De La Torre (2007) como necessárias para se tratar o erro de forma didática. Corroborando com a mesma ideia, Ramos (2013) descreve que tratar o erro utilizando as três fases é uma estratégia didática na qual esse erro possa ser detectado pelo professor quando da correção de uma atividade e também pelo aluno “ao refazer o exercício com a colaboração de um colega ou com a ajuda de um software.” (p. 4). A autora cita ainda que essa forma de colaboração contribui não somente para a localização do erro, mas também para sua identificação e correção.

Vários são os autores que focam o seu trabalho na análise de produção escrita e, por sua vez, na análise de erros. Pinto (2000) relata em seu trabalho a pesquisa realizada com alunos de 4ª série do Ensino Fundamental de uma escola pública estadual de Ribeirão Preto. O estudo focaliza o erro cometido pelo aluno no processo de aprendizagem da matemática elementar.

O trabalho exposto por Dalto e Buriasco (2009) apresenta um estudo sobre a produção escrita de uma questão comum aos alunos de 8ª série do Ensino Fundamental e aos alunos da 3ª série do Ensino Médio, na prova de questões discursivas de Matemática da Avaliação do Rendimento Escolar do Estado do Paraná – AVA/2002. O trabalho tinha como finalidade verificar as estratégias utilizadas pelos alunos das 8ª e 3ª séries na resolução da questão.

O trabalho desenvolvido por Cury (2013) apresenta o resultado de uma investigação realizada com 141 alunos de cursos de licenciatura em matemática de oito Instituições de Ensino Superior em quatro regiões brasileiras. Foi aplicado um teste que continha cinco questões sobre conteúdos de matemática da educação básica. O objetivo do trabalho era analisar as dificuldades encontradas por esses futuros professores, com a finalidade de aprofundar os estudos sobre as possibilidades de utilização da análise de erros como abordagem de pesquisa e ensino em Educação Matemática nos cursos de formação inicial e continuada.

Em seu artigo, Ramos (2013) classifica e analisa os erros cometidos por 40 alunos em uma questão que abrange contadores assíncronos e discute suas possíveis causas, além de apresentar os resultados obtidos após intervenções realizadas na correção da questão utilizando interação aluno-aluno e o software *Electronics Workbench* – EWB. Em outro artigo, Ramos e Curi (2013) classificam e analisam os erros cometidos por 41 alunos em uma questão que abrange lógica *AND* e *flip-flop* (FF) e discute suas possíveis causas. Os artigos têm por finalidade apresentar o erro como uma forma de reavaliação da prática pedagógica.

Em seu artigo, Oliveira (2013) mostra os resultados obtidos com a utilização de questionário, recursos de PowerPoint e painel didático para identificação de dificuldades e retificação de erros dos alunos do 1º ano do Ensino Médio, no conteúdo de Química das Células, na disciplina de Biologia. Por meio da estratégia didática adotada, segundo o autor, "ficou mais fácil a reconstrução do conhecimento" (p. 9).

O objetivo deste artigo é descrever a estratégia didática empregada para identificar e corrigir erros detectados em questões sobre simplificação de expressões usando a álgebra booleana e álgebra matemática. Para isso, foi realizada análise de conteúdo e análise de erros em 38 produções escritas de alunos do 1º ano integrado de um curso técnico de uma escola pública de Minas Gerais.

A partir das análises realizadas, elaborou-se um teste investigativo com duas finalidades: primeiramente, confirmar a hipótese de que os alunos apresentavam dificuldades em aplicar a propriedade distributiva e na sequência, tratar de forma didática os erros apresentados.

Algumas considerações sobre álgebra booleana

Circuitos digitais são utilizados em computadores, em robôs, em equipamentos de telecomunicações e também em outras áreas. Esses circuitos executam equações booleanas que representam uma determinada situação. Ao se projetar tais circuitos, é importante levar em consideração a sua simplificação, pois "uma diminuição do número de blocos lógicos utilizados, [...] significa uma diminuição no grau de dificuldade da montagem e no custo do sistema." (IDOETA; CAPUANO, 1984, p. 131).

Para realizar a simplificação dos circuitos lógicos é necessário utilizar-se da álgebra booleana, com suas propriedades e seus teoremas. As expressões booleanas são compostas por variáveis representadas por letras que assumem valores binários 0 e 1. Por exemplo, se A for uma variável booleana e assumir o valor 1, a variável oposta a ela será chamada de A’[3] e assumirá o valor 0. O resultado de uma expressão booleana, que é uma expressão matemática, assumirá também apenas dois valores: 0 ou 1.

A seguir, apresentamos os teoremas booleanos (QUADROS 1 e 2), segundo Tocci, Widmer e Moss (2011). Cada teorema recebeu um número para facilitar a sua citação ao longo do artigo. Os teoremas de (1) a (4) se referem à lógica AND (multiplicação booleana, representada pelo sinal “•”), a qual apresenta saída em 0 sempre que uma das entradas for 0. Os teoremas de (5) a (8) referem-se à lógica OR (adição booleana, representada pelo sinal “+”), a qual apresenta a saída em 1 sempre que uma das entradas for 1. Esses oito primeiros teoremas envolvem somente uma variável booleana, os seguintes envolvem mais variáveis.

Quadro 1 – Teoremas Booleanos

<table>
<tr><th>Multiplicação Booleana</th><th>Adição Booleana</th><th>Propriedade Comutativa</th><th>Propriedade Associativa</th><th>Propriedade Distributiva</th></tr>
<tr><td>(1)
$x \cdot 0 = 0$</td><td>(5)
$x + 0 = x$</td><td rowspan="2">(9)
$x + y = y + x$</td><td rowspan="2">(11)
$x + (y + z) = (x + y) + z = x + y + z$</td><td rowspan="2">(13a)
$x(y + z) = xy + xz$</td></tr>
<tr><td>(2)
$x \cdot 1 = x$</td><td>(6)
$x + 1 = 1$</td></tr>
<tr><td>(3)
$x \cdot x = x$</td><td>(7)
$x + x = x$</td><td rowspan="2">(10)
$x \cdot y = y \cdot x$</td><td rowspan="2">(12)
$x(yz) = (xy)z = xyz$[4]</td><td rowspan="2">(13b)
$(w + x)(y + z) = wy + xy + wz + xz$</td></tr>
<tr><td>(4)
$x \cdot x' = 0$</td><td>(8)
$x + x' = 1$</td></tr>
</table>

Fonte: Elaborado pela pesquisadora

[3] O apóstrofo é o indicador de inversão que usaremos neste artigo, mas em seu lugar pode ser usada a barra sobre a variável, conforme apresentado na questão aqui investigada – Figura 1.
[4] O sinal da lógica AND (•) pode ser suprimido.

Os teoremas de (1) até (13b) são lembrados facilmente, pois são iguais aos da álgebra convencional. Os teoremas (14) até (17), apresentados na sequência, não têm relacionamento com a álgebra convencional, mas podem ser demonstrados testando os valores 0 e 1 para os valores de x e y. Os três primeiros se referem à lógica booleana e os dois últimos são conhecidos como teoremas de DeMorgan (QUADRO 2). Pode-se usar da evidência e logo em seguida dos teoremas (6) e (2) para provar o teorema (14).

Quadro 2 – Teoremas Booleanos e Teoremas de DeMorgan

Teoremas Booleanos			Teoremas de DeMorgan	
(14)	(15a)	(15b)	(16)	(17)
$x + xy = x(1 + y) = x$	$x + x'y = x + y$	$x' + xy = x' + y$	$(x + y)' = x' \cdot y'$	$(x \cdot y)' = x' + y'$

Fonte: Elaborado pela pesquisadora

Como já citado, todos esses teoremas são úteis na simplificação de qualquer expressão lógica. Tal expressão, quando simplificada, “produz um circuito menos complexo que o produzido pela expressão original.” (TOCCI; WIDMER; MOSS, 2011, p. 69). Devido a isso, é fundamental saber aplicar esses teoremas em expressões booleanas, pois a simplicidade de um circuito reduz o custo e agiliza o processamento das operações lógicas.

Algumas considerações sobre o tratamento didático dos erros

A partir da análise da produção escrita dos alunos é possível criar estratégias didáticas para se trabalhar com os erros. Ao analisar o erro cometido e utilizando de recursos didáticos, o professor pode fazer intervenções junto ao aluno, para que este identifique e seja capaz de corrigir o próprio erro.

Ao atribuir um aspecto positivo ao erro, Borasi (1985) cita que o erro não deve ser desprezado, pois a autora acredita que ele possa estimular o pensamento e produzir uma compreensão mais profunda de conteúdos em Matemática. Por meio do erro, pode-se conhecer a concepção que determinadas pessoas tem sobre alguns assuntos em matemática e verificar se é válida ou não.

Considerando o erro com significados contrários, ou seja, com conotação negativa ou positiva, teremos então formas pedagógicas opostas para o seu tratamento: a negativa por meio da “pedagogia tradicional” e a positiva por meio da “nova pedagogia”. Essas nomenclaturas são adotadas por Pinto (2000), que compartilha da ideia de Borasi (1985), ao citar que o erro pode ser considerado uma pista para conduzir o professor na organização da aprendizagem do aluno. Nessas condições, a maior preocupação do professor é compreender como o aluno aprende. Essa é a forma de tratamento didático do erro, dada pela “nova pedagogia”, assim denominada pela autora. Para a “pedagogia tradicional”, centrada no professor e contrariamente à “nova pedagogia”, o importante é evitar o erro e saber o que se ensina.

Na “nova pedagogia”, a aprendizagem é um processo dinâmico, flui nos dois sentidos: professor-aluno e aluno-professor. Nesse tipo de aprendizagem é importante o professor saber o quê e como os alunos pensam no momento em que estão aprendendo. Portanto, é importante o professor tratar o erro de uma forma mais intensa, pois, muitas vezes, o erro não é simplesmente uma falha de memória, podendo ter raízes mais profundas. Esse tratamento não deve ser feito somente pelo professor, mas também pelos próprios alunos, sob sua orientação.

Os erros cometidos pelo aluno, segundo Vigotski (2010), podem ser uma consequência do não amadurecimento do conteúdo, isto é, o aluno se encontra na zona de desenvolvimento proximal, precisando ainda de auxílio (do professor ou do colega) para solucionar os problemas. O “nível de desenvolvimento real” descrito por ele está relacionado com o resultado de processos de desenvolvimento já consolidado por uma pessoa. Para que esse nível seja atingido pelo aluno, é necessário que haja uma participação do professor e dos colegas na construção do ensino. Essa participação para a construção do processo ensino-aprendizagem é denominada por ele como “nível de desenvolvimento potencial”. Isso significa que o aluno é capaz de desenvolver sua tarefa com a ajuda de outras pessoas, mas ainda não possui capacidade suficiente para desenvolvê-la sozinho.

Vigotski (2010) afirma também que essa etapa é muito importante, representando um momento de desenvolvimento, pois nem todas as pessoas são capazes de desenvolverem uma atividade, mesmo com a ajuda de outras. Assim, quando um aluno se mostra capaz de desenvolver sozinho uma determinada atividade, significa que seu nível de desenvolvimento real foi atingido. A relação existente entre desenvolvimento e aprendizado não acontece sem o suporte de outras pessoas envolvidas no processo.

Esse suporte existe em sala de aula, um ambiente composto de interações humanas. Dessa forma, as interações professor-aluno e aluno-aluno não representam, segundo Tardif (2010), "[...] um aspecto secundário ou periférico do trabalho dos professores: elas constituem o núcleo e, por essa razão, determinam, ao nosso ver, a própria natureza dos procedimentos e, portanto, da pedagogia" (p. 118). É por meio dessas interações que o professor torna-se capaz de construir novas metodologias que poderão ajudar no processo da construção do conhecimento do aluno.

A aproximação professor-aluno contribui para o aumento da percepção do primeiro com relação às dificuldades encontradas pelo segundo, pois, dessa forma, o professor é capaz de identificar e também ajudar o próprio aluno a identificar seus erros e criar estratégias mais adequadas para corrigi-los. Assim, é importante que a correção seja feita de forma a não reprimir o aluno, pois, segundo Correia (2010) "Uma correção inadequada pode levar a auto-estima do aluno a níveis muito baixos e ele pode querer aceitar o 'rótulo' de não ser, de fato, bom em matemática, fazendo do erro uma constante aceitável e comum de seu cotidiano" (p. 182).

Temos que levar em consideração que o erro é uma forma de se obter informações sobre as dificuldades apresentadas pelo aluno, portanto, ele deve ser analisado e identificado. Se o professor ignora essas informações, ele deixará de usar o erro como uma estratégia didática, e mais ainda, fará com que o aluno permaneça com suas dificuldades e continue cometendo erros. Isso acontece com frequência, pois o professor julga os erros do aluno a partir de suas estruturas mentais e não a partir das estruturas mentais do aluno (DE LA TORRE, 2007).

Metodologia da Pesquisa

Neste artigo será descrita a estratégia didática utilizada pela professora da disciplina de Sistemas Digitais (primeira autora) após a análise da produção escrita de uma avaliação que continha uma questão sobre simplificação de expressões booleanas utilizando teoremas booleanos e teoremas de DeMorgan.

A metodologia empregada, no primeiro momento, foi análise de conteúdo realizada sobre a resolução apresentada pelos alunos. Constatou-se que somente 24% dos alunos acertaram a questão. Esse baixo percentual deixa claro quanto à importância da elaboração de uma nova estratégia didática para tratamento dos erros detectados.

No segundo momento, foi elaborado um teste investigativo composto por quatro questões. As duas primeiras foram elaboradas a partir de expressões algébricas retiradas do conteúdo da disciplina de Matemática e as duas últimas foram a repetição dos dois itens já aplicados na avaliação. A intenção com a realização desse teste era constatar se as dificuldades apresentadas na simplificação das expressões matemáticas seriam as mesmas apresentadas na simplificação das expressões booleanas, além de verificar se o aluno, ao resolver os dois primeiros itens, conseguiria identificar as dificuldades e não cometer nos dois últimos itens os mesmos erros cometidos anteriormente.

Num terceiro momento, ocorreu a discussão entre alunos sobre a resolução dos quatro itens da questão, finalizando com a explicação da professora, a qual chamou a atenção para os erros ainda persistentes. Dessa forma, os alunos que ainda não conseguiram identificar e corrigir os seus erros puderam então fazê-lo, a partir da aprendizagem colaborativa. Assim, estaremos tratando o erro de forma didática utilizando-se das três fases citadas por De La Torre (2007): detecção, identificação e correção.

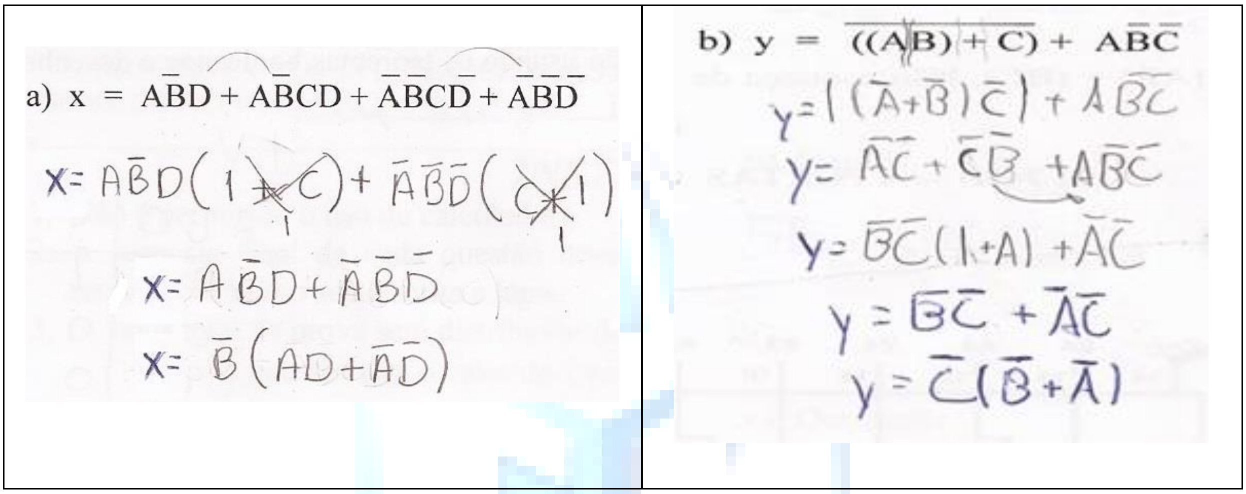
A seguir, apresentaremos as questões com as resoluções apresentadas por alguns alunos e também a análise dos enganos cometidos por eles.

Apresentação e Análise dos dados

O aluno será aqui identificado pela letra A acompanhada de um número, com o intuito de resguardar sua identidade. Serão apresentados, em primeiro lugar, os erros cometidos na avaliação realizada pelos alunos, os quais nos levaram à elaboração do teste investigativo. Em seguida, serão apresentados os erros detectados no teste investigativo. Esses erros confirmaram a nossa hipótese de investigação, de que a maioria dos erros cometidos resultou-se da aplicação indevida da propriedade distributiva.

A questão proposta na avaliação compunha-se de dois itens e apresentava o seguinte enunciado: Simplificar as expressões usando os teoremas booleanos e de DeMorgan. As resoluções corretas para cada expressão estão exibidas na Figura 1. Para exibição dessas respostas utilizamos as resoluções apresentadas pelos alunos. Isso é importante, pois, segundo De La Torre (2007), é fundamental utilizar-se de uma resposta padrão dada por um dos alunos, e assim, em função dela, analisar as resoluções apresentadas pelos demais.

Figura 1 – Respostas corretas apresentadas por A3 e A5, respectivamente.



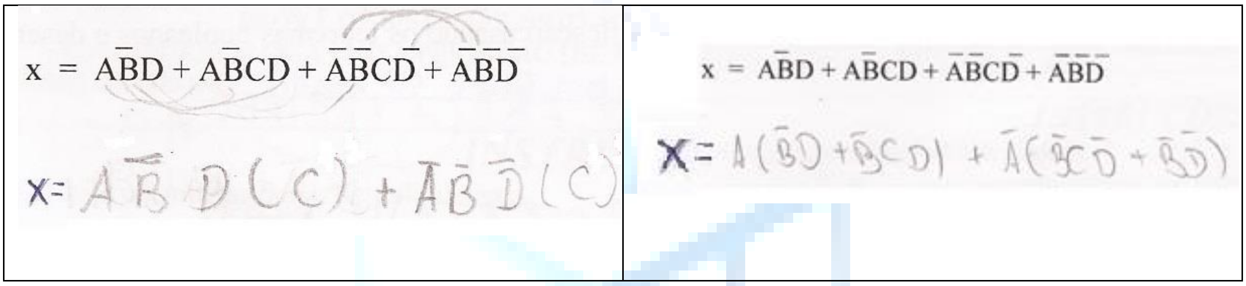
Fonte: Avaliação mensal da disciplina de Sistemas Digitais

Na resolução do item a, A3 colocou em evidência as variáveis comuns dos dois primeiros termos e as variáveis comuns dos dois últimos. Dessa forma, ele encontrou o teorema booleano (6), no qual C + 1 = 1, simplificando a expressão. Na resolução apresentada no item b, A5 usa da propriedade distributiva para em seguida colocar em evidência os termos comuns que levam ao teorema booleano (6) 1 + A = 1, simplificando, assim, a expressão inicial (TOCCI; WIDMER; MOSS, 2011). Nas duas resoluções, tanto A3 quanto A5 colocam variáveis comuns em evidência com o objetivo de reduzir o número de portas lógicas necessárias para a implementação do circuito.

Os erros que trataremos neste artigo foram cometidos por uma parte significativa de alunos. Devido a isso, e como estratégia didática, decidimos aplicar um teste investigativo, no primeiro momento, com o intuito de verificar se esses mesmos tipos de erros seriam cometidos pelos alunos em simplificação de expressões algébricas associadas à matemática. Nas Figuras 2 e 3 estão expostos exemplos dos tipos de erros cometidos na simplificação das expressões booleanas apresentada na avaliação. A identificação dos erros só foi possível devido à análise realizada na produção escrita do aluno, sendo essa uma das estratégias definidas pela "nova pedagogia" (BORASI, 1985; PINTO, 2000; DE LA TORRE, 2007; CURY, 2008).

A1 errou quando colocou os termos em evidência (FIGURA 2). Evidenciando AB’D, errou em não apresentar como resposta (1 + C), errando também quando colocou A’B’D’ em evidência e não apresentando (C + 1) como resposta. O aluno demonstrou não saber que quando os termos são iguais na evidência, o resultado é 1 (TOCCI; WIDMER; MOSS, 2011). O número 1 foi simplesmente eliminado por ele da expressão. Assim, a simplificação da expressão, dessa linha em diante, ficou errada.

Figura 2 – Parte das resoluções apresentadas por A1 e A22, respectivamente.



Fonte: Avaliação mensal da disciplina de Sistemas Digitais

A22 não cometeu erro ao realizar a evidência (FIGURA 2). Mas, com o tipo de evidência que utilizou A22 não obteve nenhum tipo de simplificação com relação à expressão original. Para dar continuidade à simplificação, A22 teria que colocar todas as variáveis comuns em evidência, de dois em dois termos, para conseguir chegar a um dos teoremas booleanos e conseguir simplificar a expressão (TOCCI; WIDMER; MOSS, 2011). Só que isso não foi feito por ele e nem pelos demais alunos que cometeram o mesmo engano.

Na Figura 3 é mostrada parte da resolução apresentada por A8, onde ele usou, de maneira correta, os teoremas de De Morgan (16 e 17) e da propriedade distributiva (teoremas 13a e 13b) para chegar à expressão y = A’C’ + B’C’ + AB’C’. Também na mesma figura podemos observar o resultado apresentado por A18, que diferentemente de A8, após aplicar a propriedade distributiva, apresentou como resposta somente um único termo A’B’C’, ao invés de apresentar os termos A’C’ + B’C’ igualmente apresentado por A8. É possível perceber que A18 apresenta dificuldades nesse conteúdo, pois ao aplicar a propriedade distributiva, ele simplesmente transformou o sinal de soma entre (A’ + B’) em multiplicação.

Figura 3 – Parte da resolução apresentada por A8 e A18, respectivamente.

$y = \overline{((AB) + C)} + A\bar{B}\bar{C}$ $y = (\bar{A} + \bar{B}) \cdot \bar{C} + A\bar{B}\bar{C}$ $y = \bar{A}\bar{C} + \bar{B}\bar{C} + A\bar{B}\bar{C}$	$y = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}\bar{C}$

Fonte: Avaliação mensal da disciplina de Sistemas Digitais

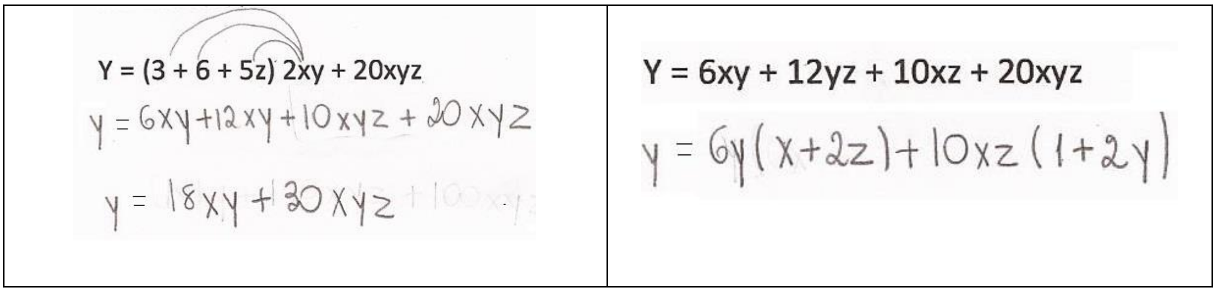
Como já afirmamos, a identificação dos erros só é possível quando o professor analisa minuciosamente a produção escrita dos alunos. De La Torre (2007) compartilha dessa ideia ao afirmar que esse é "o ponto de apoio para passar de uma pedagogia do êxito, baseada no domínio de conteúdo, para uma 'didática do erro', centrada nos processos, nas estratégias e nos procedimentos" (p. 28), ou seja, passar da "pedagogia tradicional" para a "nova pedagogia" (PINTO, 2000).

Baseando-se nas propostas da "nova pedagogia" (PINTO, 2000), ou seja, analisar os erros minuciosamente (CURY, 2008), verificando as estratégias utilizadas pelos alunos durante a resolução das questões (DALTO e BURIASCO, 2009), decidiu-se certificar como os alunos resolveriam expressões similares em matemática, com a finalidade desses erros não se tornarem recorrentes. Para isso, foi aplicado o teste investigativo, composto por duas questões utilizando expressões algébricas convencionais, similares às expressões booleanas apresentadas até o momento, além disso, foi solicitada novamente a resolução dos dois itens apresentados na Figura 1.

Na Figura 4, apresentamos as resoluções corretas descritas por A19 dos itens referentes às duas primeiras questões do teste investigativo. O enunciado de cada item era:

1. Simplifique a expressão algébrica aplicando a propriedade distributiva.
2. Reescreva a expressão colocando em evidência fatores comuns de dois em dois termos.

Figura 4 – Respostas corretas apresentadas por A19 para os itens 1 e 2, respectivamente.



Fonte: Teste Investigativo

Percebe-se que, ao resolver a questão 1, A19 indica na resolução a aplicação da propriedade distributiva, demonstrando dessa forma o passo utilizado na resposta apresentada. Alguns alunos deram continuidade à simplificação, apresentando mais uma linha de raciocínio na resolução, colocando em evidência o termo semelhante e chegando ao seguinte resultado: 6xy(3 + 5z). Dentre os alunos que deram continuidade, alguns apresentaram como resposta: xy(18 + 30z), não percebendo que também poderiam colocar em evidência a parte numérica.

Analisando os erros cometidos no teste investigativo, a fim de verificar as dificuldades apresentadas na questão da avaliação, foi possível notar que os erros desse teste foram semelhantes aos erros cometidos na avaliação. Na resolução do teste, percebermos dificuldades na aplicação da propriedade distributiva, o que não conseguiríamos notar somente analisando a questão da avaliação. Dessa forma, foi possível perceber que é fundamental traçar uma nova estratégia didática utilizando-se de metodologia mais adequada às necessidades dos alunos (PINTO, 2000; DE LA TORRE, 2007).

A seguir, apresentaremos e analisaremos alguns desses erros. Na Figura 5 estão apresentados erros cometidos na questão 1 do teste investigativo e na Figura 6, erros cometidos na questão 2. Optamos por não mostrar os erros dos itens 3 e 4 do teste investigativo, pois esses são repetições dos itens da avaliação e os erros persistentes foram similares aos apresentados nas Figuras 2 e 3.

Conforme Figura 5, A18 começou a resolução de forma correta ao somar 3 + 6 dentro dos parênteses. O erro cometido por ele foi ter aplicado a propriedade distributiva também no termo 20xyz, demonstrando não compreender que a propriedade distributiva só deveria ter sido aplicada no termo 2xy, pois somente esse termo está multiplicando os outros termos que se encontram nos parênteses. A18 também não se preocupou em elevar z ao quadrado (mesmo não estando certo o que foi feito), quando multiplicou 5z por 20xyz. Esse tipo de raciocínio foi apresentado por A38, que desenvolveu tudo igual a A18, mas ao multiplicar 5z por 20xyz apresentou o termo $100xyz^2$.

Figura 5 – Resoluções apresentadas por A18, A38 e A14, respectivamente.

$$Y = (3 + 6 + 5z)\, 2xy + 20xyz$$
$$y = (9 + 5z)\, 2xy + 20xyz$$
$$y = 18xy + 10xyz + 180xyz + 100xyz$$
$$y = 18xy + 290xyz$$

$$Y = (3 + 6 + 5z)\, 2xy + 20xyz$$
$$(9 + 5z)\, 2xy + 20xyz$$
$$18xy + 10xyz + 180xyz + 100xyz^2$$
$$18xy + 190yz + 100xyz^2$$

$$Y = (3 + 6 + 5z)\, 2xy + 20xyz$$
$$y = 6xy + 12xy + 10xyz + 60xyz + 120xyz + 100xyz \quad (\div 2)$$
$$y = 3xy + 6xy + 5xyz + 30xyz + 60xyz + 50xyz$$
$$y = 3xy(1 + 2) + 5xyz(1 + 6 + 12 + 10)$$
$$y = 9xy + 145xyz$$

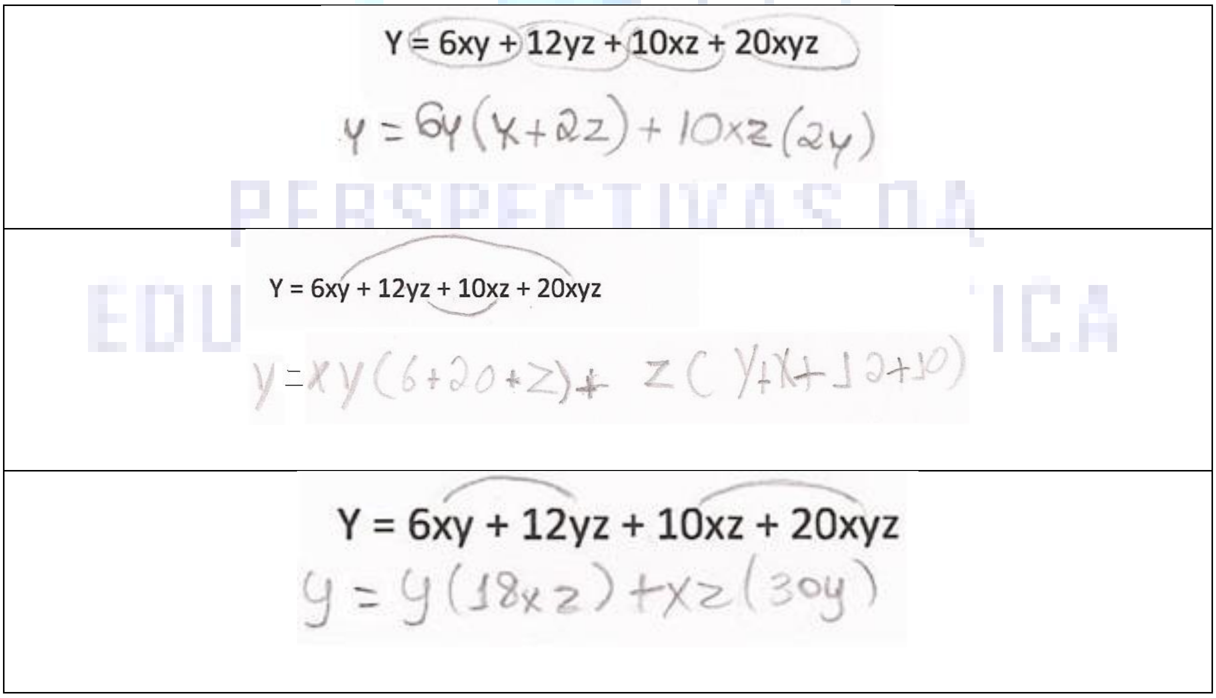
Fonte: Teste Investigativo

A14 apresentou solução semelhante a A18, só que aplicou a propriedade distributiva antes de realizar a soma (3 + 6). Também aplicou de forma errada a propriedade distributiva no termo 20xyz. Assim, A14 cometeu todos os erros que A18 havia cometido, porém, dividiu os coeficientes de cada termo por 2, sendo, portanto, os coeficientes de sua resposta a metade dos coeficientes das respostas encontradas por A18.

As dificuldades aqui citadas, também foram apontadas por Dias (2004) em seu trabalho realizado com alunos da 5ª e da 7ª séries do Ensino Fundamental e alunos do 1º ano do Ensino Médio ao aplicar a propriedade distributiva. A autora aponta que os alunos apresentaram mais dificuldades em trabalhar com a “[...] propriedade distributiva quando esta se encontra no contexto de resolução de problemas, bem como, conteúdos como soma algébrica, estudos das variáveis [...]” (p.7).

Analisando os erros apresentados na segunda questão (FIGURA 6), temos que, ao colocar o terceiro e quarto termos em evidência, A10 não escreveu o resultado correspondente ao terceiro termo, apresentando assim a resposta (2y) ao invés de (1+ 2y). Esse mesmo erro foi cometido por vários alunos na avaliação ao resolverem os itens apresentados na Figura 1. Ao colocar dois termos em evidência, o aluno não representa o resultado do termo quando a evidência apresenta resposta 1. Assim, a quantidade de termos apresentada dentro dos parênteses, depois da evidência, será menor do que a quantidade de termos apresentada na expressão original.

Figura 6 – Resoluções apresentadas por A10, A1 e A38, respectivamente.



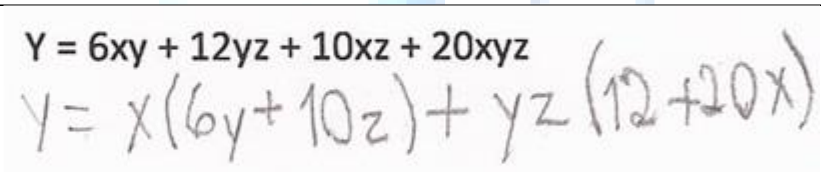
Fonte: Teste Investigativo

A1 optou por colocar o primeiro termo com o quarto em evidência e o segundo termo com o terceiro. Ao colocar xy em evidência no primeiro e no quarto termos, apresentou como resposta todos os termos unidos pela operação de adição, repetindo o mesmo raciocínio em relação ao segundo e terceiro termos. Esses termos que estavam sendo multiplicados, a partir da evidência realizada por A1, passaram a ser somados.

Ao colocar os dois primeiros termos em evidência e os dois últimos, A38 somou os coeficientes e repetiu as variáveis que não foram colocadas em evidência. A38 demonstra não compreender que quando colocamos termos em evidência, a quantidade de termos não se altera.

Vários foram os alunos que apresentaram resolução semelhante a A12 (FIGURA 7). Esse tipo de solução é que levou A22 e outros alunos a cometerem erros semelhantes na avaliação, pois, nas simplificações de expressões algébricas booleanas deve-se colocar todas as variáveis comuns em evidência, de dois em dois termos, para se encontrar teoremas booleanos e assim, poder reduzir a expressão.

Figura 7 – Resolução apresentada por A12.



Fonte: Teste Investigativo

Considerações finais

Cury (2008) aborda a análise de erros como metodologia de pesquisa e metodologia de ensino. No primeiro caso, a análise de erros está relacionada, por exemplo, às pesquisas da área de Educação Matemática que se utilizam dela para realizar suas investigações em produções escritas. No segundo caso, a análise de erros apresenta sugestões para se utilizar o erro na reconstrução do conhecimento, provocando assim, mudanças na estratégia didática do professor.

Assim, compreendemos que a análise de erros pode ser assinalada como uma metodologia de ensino, isto é, uma estratégia didática, pois é uma proposta de exploração e análise da produção escrita do aluno com o intuito de gerar uma fonte de construção de novos conhecimentos. Isso é possível, pois quando o aluno comete um erro ele está mostrando para o professor os seus conhecimentos e aguardando um retorno que confirme ou não a utilização desses conhecimentos.

D'AMORE (2007) cita a importância de se estabelecer uma estratégia didática entre professor e alunos, quando descreve que,

> Uma situação didática é um conjunto de relações explicitamente e/ou implicitamente estabelecidas entre um aluno ou um grupo de alunos, algum elemento do entorno (inclusive instrumentos ou materiais) e o professor, com a finalidade de permitir aos estudantes aprender – isto é, reconstruir – algum conhecimento. (D'AMORE, 2007, p.237).

Ao percebermos que os erros cometidos pelos alunos poderiam ser provenientes da aplicação errônea da propriedade distributiva utilizada para simplificar expressões algébricas convencionais, conteúdo esse estudado no ensino fundamental II nos 7º e 8º anos (RIBEIRO, 2010a, 2010b) na disciplina de matemática, foi traçada uma estratégia didática para identificação e correção desses erros. Essa estratégia só foi possível ser definida devido à realização da análise de erros feita na produção escrita dos alunos. Assim, podemos notar a importância de se analisar o erro de forma detalhada, pois o mesmo pode fazer parte da estratégia didática utilizada.

Borasi (1985) assinala que o erro pode contribuir para uma melhor compreensão e aprendizagem da matemática, além de apontar diversas maneiras em que os erros podem ser utilizados para fins educacionais. Na maioria das vezes, o professor acredita que a melhor forma de capacitar o aluno é por meio da transmissão direta do assunto a ser lecionado. Ele não percebe que o aluno pode chegar a uma compreensão mais profunda de um conteúdo matemático a partir do estudo, análise e exploração criativa de alguns erros.

Assim, por exemplo, uma das formas de sanar o erro cometido por A10, seria pedi-lo para aplicar a propriedade distributiva na resposta apresentada e comparar à resposta encontrada com a expressão original. Dessa forma, o aluno pode perceber de maneira rápida e clara que o processo de evidência utilizado por ele não está correto.

Com a aplicação do teste investigativo foi possível identificar os erros cometidos pelos alunos na avaliação realizada. Ao solicitar aos alunos para refazerem os itens da avaliação no teste investigativo logo após a resolução das expressões algébricas convencionais, percebemos que houve uma redução dos erros cometidos na simplificação das expressões booleanas. Ao aplicar de forma correta a propriedade distributiva na expressão matemática, alguns alunos perceberam que poderiam fazer o mesmo nas expressões booleanas.

Foi notado que A1 (FIGURAS 2 e 6) e A18 (FIGURAS 3 e 5) cometeram um tipo de erro na avaliação e outro diferente no teste investigativo, mas ambos cometeram erros quando aplicaram a propriedade distributiva para resolver a questão. Dessa forma, confirmamos que A1, A18 e outros alunos que cometeram erros similares, apresentaram dificuldades nesse conteúdo. A38 também apresentou dificuldades ao utilizar a propriedade distributiva, conforme mostrado nas Figuras 5 e 6.

Conforme citado por De La Torre (2007) e Vigotski (2010), o trabalho em grupo, a colaboração entre colegas, o diálogo entre alunos e professores, tudo isso é permitido e faz parte do conjunto de recursos didáticos, além de ser utilizado também como objeto de avaliação. De La Torre (2007) ainda afirma que na "nova pedagogia", isto é, aquela que trata o erro didaticamente, "A avaliação se estende à atuação do professor, à sua metodologia, aos recursos e às estratégias utilizadas e aos meios de que dispõe" (p. 80).

Assim, logo após o teste investigativo, foi importante cada aluno poder conferir e corrigir junto com o colega a resolução de cada questão. Antes do término da aula, percebendo que alguns alunos ainda permaneciam com dúvidas, a professora então procurou sanar, de forma individual, os erros que ainda persistiam.

Correia (2007) afirma que a análise individualizada da produção escrita do aluno, possibilita ao professor, detectar erros não esperados e que necessitam ser corrigidos, também, de forma individualizada. Compartilhando da mesma ideia, Pinheiro (2009) cita que quando a correção é realizada com o aluno, de forma individual, ela "[...] pode estimular competências de argumentação. Permite ao professor compreender as hipóteses, as dúvidas e relações equivocadas que os alunos estabelecem entre os conceitos e suas aplicações." (p.59).

Com a realização da análise de erros na produção escrita dos alunos, com a aplicação de um teste investigativo, com o trabalho colaborativo entre colegas e a intervenção realizada pela professora, quando solicitada e de forma individual, o erro foi utilizado como uma estratégia didática, possibilitando assim, segundo Oliveira (2013), a reconstrução do conhecimento.

Referências

BORASI, R. **Using errors as springboards for the learning of mathematics:** an introduction. Focus on learning Problems in Mathematics. v. 7, n. 3-4, p.1-14, 1985.

CORREIA, C. E. F. Os erros no processo ensino/aprendizagem em matemática. **Educação:** Teoria e Prática, Rio Claro, v. 20, n. 34, p. 169-186, jan.-jun. 2010.

CORREIA, E. O. **O compreender das diferenças individuais dos alunos:** uma forma de evitar o fracasso escolar. 2007. 132 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

CURY, H. N. **Análise de erros**: o que podemos aprender com as respostas dos alunos. 1. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2008. Coleção Tendências em Educação Matemática.

CURY, H. N. Análise de erros: uma possibilidade de trabalho em cursos de formação inicial de professores. In: XI Encontro Nacional de Educação Matemática, 11., 2013, Curitiba. **Anais**... Curitiba: ENEM-PR, p. 1-15, 2013. 1 CD-ROM.

DALTO, J. O.; BURIASCO, R. L. C. Problema proposto ou problema resolvido: qual a diferença? **Educação e Pesquisa**, São Paulo, v. 35, n. 3, p. 449-461, 2009.

D'AMORE, B. **Elementos de didática da matemática**. São Paulo: Livraria da Física, 2007.

DE LA TORRE, S. **Aprender com os erros:** o erro como estratégia de mudança. Porto Alegre: Artmed, 2007.

DIAS, J. L. **A propriedade distributiva da multiplicação**: uma visão diagnóstica do processo. 2004. 184f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática)-Universidade Federal do Pará, Belém, 2004.

IDOETA, I. V.; CAPUANO, F. G. **Elementos de eletrônica digital**. São Paulo: Érica, 1984.

OLIVEIRA, T. P. D. Bebidas artificiais não alcoólicas: adolescentes leem e compreendem seus rótulos? **Revista Urutágua**, Maringá, n. 29, p. 55-63, 2013.

PINHEIRO, L. C. O. **Episódios de correção:** informações sobre como o professor lida com produções matemáticas de seus alunos. 2009. 126 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática), Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2009.

PINTO, N.B. **O erro como estratégia didática**. São Paulo: Papirus, 2000.

RAMOS, M. L. P. D. Detecção, identificação e retificação: as três fases no tratamento e na correção dos erros. In: XI Encontro Nacional de Educação Matemática, 11., 2013, Curitiba. **Anais**... Curitiba: ENEM-PR, p. 1-14, 2013. 1 CD-ROM.

RAMOS, M. L. P. D.; CURI, E. Análise de erro em avaliação de sistemas digitais: uma questão com lógica AND e flip-flop. **Revista Eletrônica em Educação Matemática**, Florianópolis, v.8, n.1, p. 232-247, 2013.

RIBEIRO, J. **Matemática:** 7º ano. São Paulo: Scipione, 2010a.

RIBEIRO, J. **Matemática:** 8º ano. São Paulo: Scipione, 2010b.

TARDIF, M. **Saberes docentes e formação profissional**. 10. ed. Petrópolis: Vozes, 2010.

TOCCI, R. J.; WIDMER, N. S; MOSS, G. L. **Sistemas Digitais:** princípios e aplicações. São Paulo: Pearson, 2011.

VIGOTSKI, L. S. **A formação social da mente**. 7. ed. São Paulo: Martins Fontes, 2010.

Submetido em janeiro de 2014

Aprovado em agosto de 2014