



Registros Figurais em Geometria: influências na apreensão operatória e na pesquisa heurística de figuras

Figural Records in Geometry: influences on operative apprehension and figures' heuristic research

Mariana Moran¹

Valdeni Soliani Franco²

Resumo

Este artigo trata da importância do tipo de registro figural na apreensão operatória e na exploração heurística de figuras geométricas em atividades matemáticas. Serão consideradas como registros figurais as representações geométricas realizadas com Materiais Manipuláveis, *Softwares* de Geometria e Expressões Gráficas. Apresenta-se uma breve discussão teórica sobre possíveis modificações em registros figurais constituindo a produtividade heurística de figuras geométricas. Por fim, mostra-se resultados de uma pesquisa realizada com alguns professores de Matemática da Educação Básica sobre a influência do registro figural na operação de reconfiguração de figuras geométricas. Conclui-se que, durante uma atividade matemática que conta com o apoio visual de figuras geométricas, os Materiais Manipuláveis, os *Softwares* de Geometria e as Expressões Gráficas podem facilitar ou inibir a apreensão operatória e as potencialidades heurísticas das figuras.

Palavras-chave: Geometria. Registros Figurais. Apreensão Operatória. Heurística.

Abstract

This paper deals with the importance of the type of figural record in operative apprehension and heuristic exploration of geometric figures in mathematical activities. Will be considered as figural records the geometric representations made with Manipulatives, Geometry Softwares and Graphic Expressions. A brief theoretical discussion is presented regarding possible modifications in figural records constituting the heuristic productivity of geometric figures. Ultimately, the results of a research performed with some Basic Education Mathematics teachers are shown, regarding the influence of figural record on the operation of geometric figures reconfiguration. The conclusion is that, during a mathematical activity that has the visual support of geometric figures, Manipulatives, Geometry Softwares and Graphic Expression may favour or inhibit the operative apprehension and the figures' heuristic potentialities.

Keywords: Geometry. Figural Records. Operative Apprehension. Heuristics.

¹ Mestre pela Universidade Estadual de Maringá – UEM. Docente da Universidade Estadual do Paraná – UNESPAR/Campo Mourão. E-mail: marianamoránbar@gmail.com

² Doutor pelo Instituto de Ciências Matemática e Computação – ICMC/USP. Docente da Universidade Estadual de Maringá. E-mail: vsfranco@uem.br

Introdução

Em problemas de matemática, principalmente os que envolvem conceitos de geometria, o uso de imagens pode auxiliar na interpretação e resolução de um problema. A imagem ou figura pode modificar o significado do texto, oferecendo uma perspectiva específica sobre aspectos a serem considerados para chegar à conclusão necessária. Moreira (1996, p.3) observa que “Imagens são representações específicas que retêm muitos dos aspectos perceptivos de determinados objetos ou eventos, vistos de um ângulo particular, com detalhes de uma certa instância do objeto ou evento”.

Com relação a atividades que envolvam conceitos de geometria, uma representação figural pode ser vista como uma imagem que auxiliará em suas resoluções. A figura auxilia a resolver problemas matemáticos por desempenhar um importante papel no ponto de vista cognitivo e na maneira de “ver” e interpretar o problema. Conforme Duval (2012b, p. 286), “As atividades de construção de figura são atividades que privilegiam a formação de representação de um objeto matemático ou de uma situação matemática no registro figurativo”.

Duval (1999) afirma que a atividade em geometria se realiza basicamente em dois registros: o das figuras e o da língua materna ou língua natural. O primeiro tem a função de nomear as figuras e suas propriedades, enquanto que a língua natural enuncia definições, teoremas, hipóteses e propriedades pertinentes às figuras.

Com relação aos registros das figuras, Duval (2011) apresenta três características que lhes conferem um poder cognitivo particular. Em primeiro lugar, o seu valor intuitivo, que permite interpretações com um simples olhar sobre a figura; em seguida, proporcionam o reconhecimento de objetos como imagens desenhadas; e, por fim, podem ser “construídas instrumentalmente seja com régua, com o compasso ou com um *software*, pois com um desenho à mão livre não poderíamos nem distinguir uma reta de uma curva, nem verdadeiramente considerar as relações entre grandezas!” (DUVAL, 2011, p. 84).

Diversas pesquisas em Educação Matemática têm se utilizado de recursos tecnológicos, materiais concretos e ferramentas de desenho para o ensino e aprendizagem da matemática. Pensando nisso, buscou-se, neste artigo, enfatizar a importância destes recursos, mostrando que cada um possui suas peculiaridades e funções diante da representação e do estudo de figuras geométricas.

Esta pesquisa está focalizada, mais especificamente, no uso do registro figural para resolver problemas de equivalência de áreas e partição geométrica. Seu diferencial está em contar com o auxílio de três tipos de registros figurais: os Materiais Manipuláveis, o *Software* GeoGebra e as Expressões Gráficas. Realizou-se uma reflexão sobre a apreensão operatória e as potencialidades heurísticas das figuras geométricas, bem como a operação de reconfiguração, quando estas estão representadas em diferentes registros figurais como auxiliares para a resolução de problemas de geometria.

Na busca por investigar a influência do tipo de registro figural nas apreensões operatórias e na exploração heurística de figuras geométricas, contou-se com o auxílio de 7 (sete) professores voluntários de Matemática da Educação Básica, que participaram inicialmente de um curso com o objetivo de conhecer as diferentes formas de representação semiótica para a geometria. Logo após o curso, esses professores foram submetidos, individualmente, a uma intervenção com atividades de geometria que teve como objetivo explorar as potencialidades dos registros figurais na forma de Materiais Manipuláveis, *Software* GeoGebra e Expressões Gráficas. A pesquisa foi submetida e aprovada pelo Conselho de Ética local.

A apreensão operatória e a exploração heurística de uma figura

Em se tratando de problemas em geometria, é possível perceber a necessidade da visualização e do reconhecimento de elementos figurais que auxiliem em suas resoluções, já que nem sempre esses problemas são triviais do ponto de vista cognitivo ou matemático.

Pensando nisso, chega-se à conclusão de que as figuras formam um importante suporte intuitivo para as atividades em geometria, já que permitem visualizar mais do que os seus enunciados e também possibilitam modificações de seus elementos (DUVAL, 1999).

Essas possíveis modificações de uma figura inicial e as reorganizações dessas modificações compõem a apreensão operatória, e remetem ao papel heurístico das figuras. De acordo com Duval (2012a), a produtividade heurística de uma figura consiste em realizar tratamentos matemáticos específicos ao registro figural. Tais tratamentos estão vinculados com possibilidades de operações e/ou modificações, como, por exemplo, modificações mereológicas, óticas ou posicionais, que podem ser realizadas mentalmente e materialmente. Neste último caso, contam com o auxílio de ferramentas que constituirão os registros figurais.

A operação de modificação mereológica faz-se por meio da relação parte e todo, podendo dividir uma figura em várias sub-figuras sem alterar suas dimensões e tamanhos. Essa operação permite, por exemplo, comprovar a igualdade de áreas, conforme será visto nas atividades aplicadas neste trabalho. No entanto, aumentar, diminuir ou deformar uma figura são ações que consistem na produção de sua imagem por meio de uma modificação ótica, permitindo explorar informações por homotetia, por exemplo. Por fim, uma figura pode ser deslocada ou rotacionada, conforme necessário, configurando a modificação posicional.

Neste artigo, serão apresentadas duas atividades de geometria para cujas resoluções foi necessário recorrer especificamente a operações figurais de reconfiguração que consistem no uso de modificações do tipo mereológicas.

Operação de reconfiguração intermediária de figuras geométricas

Utilizar uma figura de modo heurístico não consiste em somente associá-la a uma situação geométrica, mas, dentre outras coisas, em proporcionar uma apreensão matemática por meio desta figura (DUVAL, 2012a, p. 125). Com o intuito de resolver problemas, a operação de reconfiguração apresenta um modo de explorar heurísticamente uma figura geométrica.

Segundo Duval, “É essencial, do ponto de vista cognitivo e didático, *não confundir a possibilidade de tratamentos figurais com a legitimidade, ou a justificação, matemática destes tratamentos figurais*”³ (DUVAL, 1999, p. 153). Assim, utilizando-se dessa representação em modo de registro figural, é possível que se alcance a solução matemática para problemas geométricos, ou seja, as operações que podem ser realizadas nas figuras oferecem o caminho para que o indivíduo encontre soluções e possa expressá-las em termos matemáticos comprovadamente.

Fazer a operação de reconfiguração em uma figura implica na reorganização de uma ou várias sub-figuras diferentes em outra figura. Desse modo, uma sub-figura de dimensão 2 é resultado de reagrupamentos de unidades figurais elementares também de dimensão 2: “A reconfiguração é um tratamento que consiste na divisão de uma figura em sub-figuras, em sua

³ Utilizou-se a tradução do original para o espanhol feita por Myriam Vega Restrepo: “Es esencial, desde el punto de vista cognitivo y didáctico, *no confundir la posibilidad de tratamientos figurales con la legitimidad, o la justificación, matemática de estos tratamientos figurales*”. Todas as traduções da versão utilizada são de nossa autoria.

comparação e em seu reagrupamento eventual em uma figura de um contorno global diferente”⁴ (DUVAL, 1999, p. 156).

O uso dos materiais manipuláveis, do *software* GeoGebra e das expressões gráficas como registros figurais

Para a realização desta pesquisa, utilizou-se os Materiais Manipuláveis, o *Software* GeoGebra e as Expressões Gráficas para representar figuras geometricamente. Considera-se essas três maneiras de “ver” as figuras como registros figurais, ou seja, como sistemas semióticos que permitem abstrações cognitivas utilizáveis em resolução de problemas ou em reconhecimentos de propriedades geométricas.

Para que se obtenha sucesso durante a utilização destes recursos, Duval (2011) expõe algumas questões:

Essa maneira de ver é a forma comum de ver as imagens e perceber os objetos reais? Ou é preciso subordiná-la a um “conhecimento conceitual” de que ela dependerá e que a guiará? Ou, ao contrário, ela depende das operações de reorganização puramente visuais das figuras que seriam próprias da maneira matemática de “ver”? (DUVAL, 2011, p. 85).

Duval explica que a terceira hipótese é equivalente a assumir que as figuras formam um registro de representação semiótico específico. Dessa forma, se enquadram nesse registro as representações que descrevem operações puramente figurais que permitem transformar qualquer figura em outra, com a “finalidade de fazer aparecer uma solução ou de produzir um contraexemplo ou ainda de modelar uma situação” (DUVAL, 2011, p. 85).

Ainda com esse mesmo raciocínio, o pesquisador explica que uma representação figural só é interessante à medida que ela pode se transformar em outra representação: “Existem aquelas que se apoiam diretamente na percepção e que transformam unidades figurais 2D/2D⁵ (ou objetos 3D/3D) em outras de mesma dimensão [...] realizadas por manipulações sobre objetos materiais” (DUVAL, 2011, p. 88).

⁴ “La reconfiguración es un tratamiento que consiste en la división de una figura en sub-figuras, en su comparación y en su reagrupamiento eventual en una figura de un contorno global diferente”.

⁵ “Toda passagem de uma dimensão a outra representa para o numerador da “fração”, (mD/nD) um salto cognitivo considerável, e, analogamente a passagem de uma representação física para uma representação numérica (mudança do denominador)” (DUVAL, 2011, p. 87).

Referindo-se aos Materiais Manipuláveis, entende-se que as experiências que podem ser realizadas com estes materiais se enquadram como uma oportunidade à exploração de propriedades heurísticas de figuras geométricas. Porém, é necessário ter em mente que o uso de determinados materiais concretos não pode estar centrado na ideia de que estes sempre trarão sucesso no que diz respeito ao reconhecimento de unidades figurais. O Material deve ser utilizado de modo cabível e adequado.

Entende-se por Material Manipulável tudo que pode ser manipulado pelo sujeito:

Alguns não possibilitam modificações em suas formas: é o caso dos sólidos geométricos construídos em madeira ou cartolina, por exemplo, que por serem estáticos, permitem só a observação. Outros já permitem uma maior participação do aluno: é o caso do ábaco, do material montessoriano (cuisenaire ou dourado), dos jogos de tabuleiro (LORENZATO, 2006, p. 18-19).

Desse modo, serão apresentadas atividades que foram propostas com a utilização de materiais que permitirão ou não modificações e operações visuais para resolução dos problemas.

Lorenzato (2006) reflete que os Materiais Manipuláveis facilitam a realização de descobertas e permitem um trabalho menos formal. O uso de Materiais Manipuláveis no estudo da matemática tem motivado os seus participantes a elaborarem sua própria aprendizagem: “Na disciplina de Matemática, [...], o envolvimento ativo do aluno é uma condição fundamental da aprendizagem” (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2006, p. 23). Os materiais manipuláveis também permitem que seus participantes identifiquem os conceitos elementares da matemática e construam várias representações mentais baseadas nas representações semióticas aparentes.

Como observa Tahan (1962), é importante ressaltar que o sujeito em contato com Materiais Manipuláveis precisa raciocinar e não apenas brincar com as experiências (TAHAN, 1962).

Passos (2006) afirma que:

Embora tenha ocorrido, por parte de muitos professores, uma compreensão restrita desse método, por entenderem que a simples manipulação de objetos levaria à compreensão, estudos mostraram a existência de estreita relação entre a experimentação e a reflexão (PASSOS, 2006, p. 77).

Por isso, as atividades que foram propostas para os participantes da pesquisa, adequadas aos Materiais Manipuláveis, forneceram liberdade para se trabalhar em um registro figural e, conseqüentemente, na pesquisa heurística das figuras.

Pensar no registro figural faz pensar nas suas várias representações. Desse modo, foi utilizado também um *software* de geometria para representar figuras geométricas. Mais especificamente, a pesquisa foi realizada por meio do *Software* GeoGebra, descrito adiante.

O uso de tecnologias na educação tem sido um tema presente entre professores e pesquisadores, principalmente quando se refere à matemática. Talvez, dentre outros motivos, isso se deva ao fato de que alguns conteúdos dessa ciência foram desenvolvidos por meio da informática, como, por exemplo, a construção da geometria dos fractais por Benoit Mandelbrot no início dos anos 80 do século passado. Este geômetra utilizou a informática para estudar o comportamento dos objetos matemáticos hoje conhecidos como Fractais (BATISTA *et al*, 2012).

Com o uso de tecnologias em geral, os alunos ficam suscetíveis a novas descobertas. Sendo assim, ao utilizar o GeoGebra como um registro de figuras, pode-se analisar o papel da representação figural quando esta é feita nesse *software* geométrico: “Uma das vantagens do uso do GeoGebra é que suas construções são dinâmicas [...]. Isso permite que o sujeito faça grande quantidade de experimentações que lhe possibilite construir proposições geométricas” (GERÔNIMO; BARROS; FRANCO, 2010, p. 11).

A opção pela pesquisa por meio do *software* GeoGebra se deve ao fato de que atualmente, no estado do Paraná, tem-se um programa governamental de inclusão digital das escolas públicas chamado Paraná Digital. Este programa está fundamentado na disponibilidade de recursos educacionais por meio de computadores e da internet, incluindo o *software* GeoGebra instalado em todos os laboratórios de informática das escolas públicas e universidades.

O uso do *software* permite uma mobilidade, pelo sujeito, de operações com as figuras. Por exemplo, o arrastar de um vértice sem perda de vínculos, a aproximação de um polígono inscrito ou circunscrito a uma circunferência em função do número de lados do polígono, cálculo de áreas, entre outras interações. Estes motivos despertam interesse para que se investigue como são concebidas as potencialidades heurísticas das figuras nesse ambiente computacional.

O *software* GeoGebra é um *software* gratuito que abrange conceitos de Geometria, Álgebra, Cálculo e Estatística. Ele foi desenvolvido inicialmente pelo austríaco Markus Hohenwarter, no ano de 2002. Com esse *software*, é possível construir os elementos básicos de Geometria, além de figuras, gráficos de funções, cálculo de áreas, seções cônicas que podem ser modificadas dinamicamente, dentre outras utilidades, todas envolvendo Estatística, Cálculo, Geometria e Álgebra.

Duval acrescenta que, “Além disso, a construção instrumental das figuras, sobretudo utilizando *software*, confere às figuras uma confiabilidade e uma objetividade que permitem efetuar verificações e observações” (DUVAL, 2011, p. 84).

Destaca-se também que, com base em estudos sobre os conceitos de registros figurais, elaborados por Duval, admitem-se as figuras realizadas por meio da Expressão Gráfica como um registro figural. Entende-se por Expressões Gráficas o uso de materiais que auxiliam a construção de desenhos e, principalmente, figuras em geral, como, por exemplo, régua, transferidor, esquadro, compasso, lápis etc. As figuras assim construídas formam imagens passíveis de comunicar uma ideia, um conceito ou um pensamento.

É importante enfatizar que o uso de *softwares* diferencia-se do uso de Expressões Gráficas, pois, nos *softwares*, será levado em consideração o contato do sujeito com uma máquina e a dinâmica que seus programas proporcionam. Ou seja, o indivíduo, ao compreender os comandos básicos do *software* em questão, além de perceber os conceitos matemáticos envolvidos para uma representação adequada, terá a oportunidade de realizar e visualizar determinadas operações impossíveis de serem feitas à mão com tanta precisão e rapidez, além da dinâmica obtida, principalmente, sem a perda de vínculos. Tais possibilidades constituem motivo suficientemente relevante para diferenciar o uso de tecnologias (*software*) do uso do pincel e do quadro, ou lápis, papel e outros instrumentos básicos da Expressão Gráfica.

O uso de Expressões Gráficas como figuras simboliza, perceptivelmente, informações e dados numéricos que podem ser difíceis de serem aprendidos diretamente (MACHADO, 1999), principalmente quando se estuda conteúdos matemáticos que perceptivelmente são inacessíveis. Referindo-se ao conteúdo estruturante Geometrias, alguns objetos geométricos, quando baseados em sua definição por extenso, não permitem visualização sem o apoio de uma figura ou imagem.

A construção de figuras com materiais de desenho exige do sujeito o conhecimento de conceitos, propriedades e teoremas de geometria para chegar ao objetivo de tal atividade.

Destaca-se que, em cada situação, seja com os Materiais Manipuláveis, com o *software* GeoGebra ou com as Expressões Gráficas, o sujeito deve manipular a construção ou a operação da figura proposta em cada atividade: “as atividades de construção ‘ensinam a ver’, isto é, permitem descobrir, mobilizar e controlar a **produtividade heurística** das figuras” (DUVAL, 2012b, p. 287).

Atividades

As duas aplicações a seguir são de uso de reconfiguração na equivalência de áreas e partições geométricas. Foram realizadas individualmente com 7 (sete) professores participantes da pesquisa e propostas em forma de atividades nas quais os professores construam as figuras e as exploravam contando com o auxílio de três tipos de registros figurais, alternadamente: os Materiais Manipuláveis, o *software* GeoGebra e as Expressões Gráficas.

ATIVIDADE 1) O problema de Euclides: mostrar a equivalência das partes 1 e 2, qualquer que seja a posição do segmento \overline{AB} (DUVAL, 1999, p. 157).

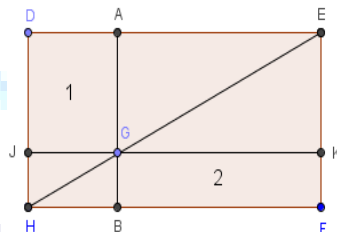


FIGURA 1: Retângulo

Fonte: Autores, baseado em Duval, 1999.

Este problema pode ser resolvido por uma modificação figural do tipo mereológica, fazendo-se uma operação de reconfiguração que consiste no fracionamento da figura inicial em sub-figuras. Neste caso, por congruência entre os triângulos $\widehat{G\hat{A}E} \equiv \widehat{E\hat{K}G}$ e entre $\widehat{H\hat{J}G} \equiv \widehat{G\hat{B}H}$, conclui-se que há igualdade entre as áreas dos quadriláteros 1 e 2.

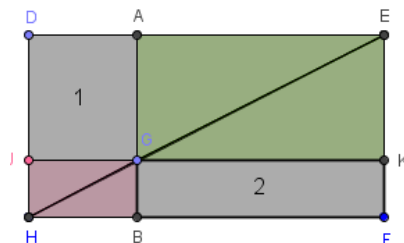


FIGURA 2: Solução da Atividade 1

Fonte: Autores, baseado em Duval, 1999.

Para resolver esta atividade, disponibilizou-se para os professores participantes, em um primeiro momento, o retângulo construído no *software* GeoGebra de tal forma que o segmento de reta \overline{AB} pudesse ser movimentado percorrendo a diagonal \overline{HE} por meio do ponto de intersecção G entre \overline{JK} e \overline{AB} .

Como o GeoGebra é um *software* dinâmico, a figura se modificava, podendo ficar das seguintes formas:

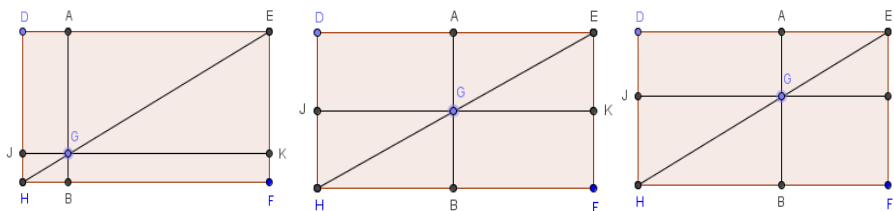


FIGURA 3: Modificações posicionais no retângulo

Fonte: Autores

Como é possível observar, tal registro é um facilitador para estas operações, tendo em vista que o GeoGebra proporciona essa dinamicidade, não encontrada em outros registros, e, consequentemente, a identificação clara das unidades figurais presentes (ponto de intersecção, diagonal, segmentos de reta) e das sub-figuras (triângulos e quadriláteros). Além disso, o *software* proporciona uma forte congruência entre o registro da língua natural (o enunciado do problema) e o registro figural (representação da figura no *software*), por permitir visualizar a equivalência das partes 1 e 2, qualquer que seja a posição do segmento AB. Do total de professores, 3 (três) conseguiram resolver a atividade utilizando este registro.

Aos professores que não conseguiram resolver a atividade com o *software*, foi disponibilizada, em seguida, uma folha branca com o desenho do retângulo incidindo no registro da Expressão Gráfica. O único professor que resolveu a atividade neste registro apresentou-se mais suscetível a fazer marcações e tentativas de provar a equivalência das áreas por símbolos matemáticos quando foi submetido ao uso da Expressão Gráfica.

E, finalmente, aos professores que não resolveram a atividade com o uso do *software* GeoGebra ou com a Expressão Gráfica, foi disponibilizado o recurso em forma de Material Manipulável. Ou seja, um papel cartão no formato do retângulo em questão, de tal forma que o professor pudesse usar materiais adicionais do tipo tesoura, cola, régua, entre outros. Nesta etapa, 3 (três) professores resolveram a atividade, porém de modos diferentes.

Um professor, especificamente, recortou a área 1 e a dividiu em sub-figuras (também com recorte), encaixando e colando as partes recortadas sobre a área 2, conseguindo “mostrar” a equivalência das áreas. Os outros dois professores utilizaram uma régua graduada e mediram os lados dos quadriláteros 1 e 2, calculando suas áreas e comparando-as.

Com base nas ações nestes registros, observa-se o empirismo provocado na apreensão operatória durante o uso dos materiais. Além disso, uma demonstração matemática é feita dedutivamente, e não por tentativas, principalmente no caso de Materiais Manipuláveis, já que estes são representações de objetos matemáticos perfeitos.

Outro fator relevante, ainda nesta etapa, é o fato de que as figuras devem servir como suporte para o raciocínio matemático, e, neste caso, em forma de registro material, elas constituíram o raciocínio matemático. Isso traz uma reflexão sobre a influência que os registros figurais materiais podem ter, sendo erroneamente utilizados para provar afirmações matemáticas enquanto deveriam ser utilizados somente com a finalidade de subsidiar conclusões puras.

ATIVIDADE 2) Fazer a partição deste quadrado em três partes iguais, a partir do ponto médio do lado AB (DUVAL, 2012a, p. 128).

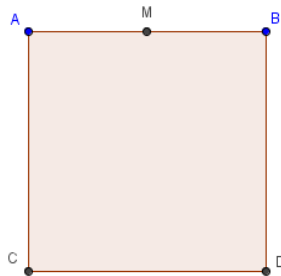


FIGURA 4: Quadrado
Fonte: Autores

Duval (2012a) relata, em sua pesquisa, que um aluno do *cinquième*⁶ efetuou a partição do quadrado em seis colunas iguais, conforme a figura a seguir:

⁶ A série *cinquième* corresponde ao 7º ano do Ensino Fundamental no Brasil, ou seja, alunos com idade entre 12 e 13 anos.

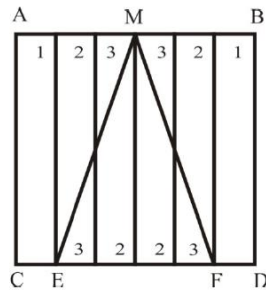


FIGURA 5: Reconfigurações intermediárias
Fonte: Duval, 2012a, p. 128.

Conforme a numeração nas unidades figurais da Figura 5, o aluno explicou a igualdade das reconfigurações intermediárias entre AMEC, MFE e MBDF. Observa-se que este é um problema que não oferece uma congruência entre as unidades figurais diretamente visíveis e as unidades figurais necessárias para sua resolução. Isto significa que este problema é complexo tanto do ponto de vista cognitivo quanto do ponto de vista matemático.

Nenhum professor conseguiu resolver a atividade do mesmo modo que o aluno do *cinquième*, e somente 2 (dois) professores a resolveram, ambos utilizando o *software* GeoGebra.

Em um primeiro momento, foi entregue a cada professor um papel cartão recortado como um quadrado com a marcação de seus vértices e ponto médio M, conforme a Figura 4. Porém, este registro figural dificultou a pesquisa heurística e, conseqüentemente, as operações na figura, visto que os professores não sentiam segurança para rabiscar e recortar o material, já que não encontravam recursos matemáticos e de medida para comprovar a igualdade entre as três áreas. Por fim, não houve soluções para a atividade com este registro figural material.

Logo após, disponibilizou-se aos professores outro tipo de registro figural: o *software* GeoGebra. O mesmo quadrado da Figura 4 foi exposto aos professores de modo que eles pudessem efetuar as operações que achassem necessárias. Dentre os 7 (sete) professores, 4 (quatro) afirmaram encontrar facilidade no reconhecimento e na pesquisa junto aos elementos figurais que representavam o problema no *software*. Desses 4 (quatro), somente 2 (dois) professores chegaram à solução correta. Segue a imagem das duas soluções:

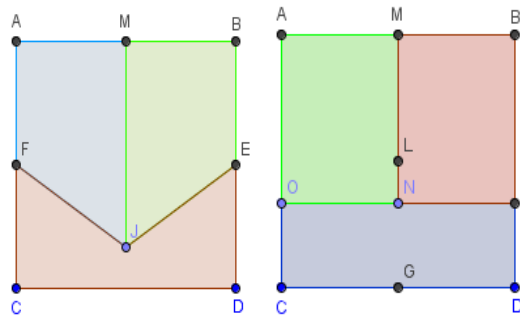


FIGURA 6: Soluções 1 e 2
Fonte: Autores

Ambas as soluções se apoiaram em conceitos matemáticos, e também em uma ferramenta do *software* GeoGebra que é capaz de calcular com precisão áreas de polígonos, contribuindo para a conclusão correta da atividade. O *software* possibilitou a liberdade de movimentação e modificação das sub-figuras sem perda de vínculos, facilitando, assim, chegar à solução do problema. As unidades figurais também foram facilmente reconhecidas pelos professores.

Por fim, aos professores que não resolveram a atividade por meio dos Materiais Manipuláveis ou do *software* GeoGebra, indicou-se o uso da Expressão Gráfica. Nesta etapa, 2 (dois) professores não conseguiram resolver, e 1 (um) professor chegou ao que ele acreditava ser uma solução, mas incorreta. A atividade representada em forma de registro de Expressão Gráfica, conforme escreveu um professor:

[...] seria mais fácil para ser assimilada uma vez que poderia traçar os pontos médios e fazendo as tentativas que os polígonos pudessem ser iguais.

Quanto às apreensões operatórias e à exploração heurística da figura neste registro, conclui-se que diversas tentativas de modificações foram feitas, utilizando-se de lápis e régua, porém, sem sucesso.

Conclusões

Oferecer diferentes tipos de registros figurais para resolução de problemas de geometria pensando nas possibilidades de apreensões operatórias e heurística das figuras é permitir que cada atividade seja explorada até seu potencial máximo. Ou seja, cada atividade possui seu grau de dificuldade tanto do ponto de vista cognitivo quanto do ponto de vista

matemático. Assim, um registro figural material, por exemplo, poderá auxiliar positiva ou negativamente em uma solução, dependendo do tipo de atividade que está sendo proposta.

Desse modo, as apreensões operatórias, bem como a operação de reconfiguração em uma figura, podem ser mais fáceis ou não, dependendo do registro figural em que ela acontece. As operações de reconfiguração que podem ser desenvolvidas em uma figura nem sempre se fazem evidentes, e um dos motivos para isso pode ser a não congruência entre os enunciados e as figuras representadas.

Há que se considerar que, nos exemplos demonstrados, tanto para a Atividade 1 quanto para a Atividade 2, o *software* GeoGebra foi o registro figural de destaque na possibilidade de operação de reconfiguração intermediária. Isto é, habilidades tais como modificar uma figura em diferentes posições, visualizá-la, dividi-la em várias sub-figuras, calcular suas áreas, e, de posse dessas informações, raciocinar matematicamente, puderam ser desenvolvidas mediante este registro figural computacional.

Enfim, é de extrema importância para o ensino que, em atividades de geometria, o aluno conheça as várias possibilidades de representações figurais para que, de acordo com a atividade proposta, possa escolher aquela que heurísticamente proporciona maiores apreensões e conduz ao raciocínio matemático final.

Referências

BATISTA, M. C.; DEGTIAR, S.; FANCA JUNIOR, D. C.; SILVA, A. T.; BOHM, P. A. F.; OLIVEIRA, C.; SANCHES, F. M.; PORFIRIO, M. R.; BARRETO, M. R. **Antigas invenções modernas explicações**. Maringá: Massoni, 2012.

DUVAL, R. **Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y Aprendizajes intelectuales**. Tradução: Myriam Vega Restrepo. Cali, Colombia: Universidade del Valle, 1999.

_____. **Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representação semióticas**. Org.: Tânia M. M. Campos; tradução: Marlene Alves Dias. São Paulo: PROEM, 2011.

_____. Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência. Tradução: Mércles Thadeu Moretti. **Revista Eletrônica de Educação Matemática – Revemat**: Florianópolis, v.07, n.1, p.118-138, 2012a.

_____. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Tradução: Mércles Thadeu Moretti. **Revista Eletrônica de Educação Matemática – Revemat**: Florianópolis, v.07, n.2, p. 266-297, 2012b.

GERÔNIMO, J. R.; BARROS, R. M. de O.; FRANCO, V. S. **Geometria Euclidiana Plana:** um estudo com o *software* Geogebra. Maringá: Eduem, 2010.

LORENZATO, S. Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis. In: _____ (Org.). **O Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores.** Campinas, SP: Autores Associados, 2006.

MACHADO, N. J. **Epistemologia e didática:** as concepções de conhecimento e inteligência e a prática docente. São Paulo: Cortez, 1999.

MOREIRA, M. A. **Modelos mentais.** In: Investigações em Ensino de Ciências. Porto Alegre, v. 1, n. 3, pp. 193-232, 1996.

PASSOS, C. L.B. Materiais manipuláveis como recursos didáticos na formação de professores de matemática. In: LORENZATO, Sergio (Org.). **O Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores.** Campinas, SP: Autores Associados, 2006.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula.** Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

TAHAN, M. **Didática da Matemática.** São Paulo: Edição Saraiva, 1962.

Recebido em junho de 2014

Aprovado em agosto de 2014

PERSPECTIVAS DA
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA