REVISTA DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL (UFMS)

Volume 11, número 27 – 2018

ISSN 2359-2842

Um ensaio teórico sobre *saber mais matemática* para ensinar

A theoretical essay about *knowing more mathematics* to teach

Henrique Rizek Elias[1]

Línlya Sachs[2]

RESUMO

Este artigo trata-se de um ensaio teórico que tem por objetivo problematizar um discurso recorrente, tanto entre matemáticos como entre educadores matemáticos, de que o professor precisa saber mais matemática para exercer sua tarefa de ensinar matemática na Educação Básica. Evidenciamos, a partir de três pesquisas científicas e um texto de uma coluna de jornal, que, de fato, defender que o professor deve saber mais matemática, mesmo que não se explicite o que isso significa, é recorrente quando se fala em formação de professores. Fundamentados na diferenciação entre Matemática Escolar e Matemática Acadêmica, de Moreira e David (2010), tecemos algumas considerações acerca da formação matemática do professor e selecionamos um tema matemático, o conjunto dos números inteiros, para exemplificar e pautar nossas discussões. Nossa argumentação vai na direção de defender que a matemática a ser trabalhada na formação inicial deve estar conectada aos saberes que efetivamente são mobilizados na prática docente.

PALAVRAS-CHAVE: Formação matemática de professores. Formação inicial de professores. Matemática Escolar. Matemática Acadêmica. Conjunto dos números inteiros.

ABSTRACT

This paper is a theoretical essay that aims to problematize a recurrent discourse, both among mathematicians and among mathematics educators, that the teacher needs to know more mathematics to teaches mathematics in elementary, middle, and high school. We show, from three scientific researches and a text from a newspaper column, that discourse is recurrent in teacher education, even if it isn't explicit what it means. Based on the differentiation between School Mathematics and Academic Mathematics from Moreira and David (2010), we made some considerations about the mathematical formation of the teacher and we selected a mathematical theme, the set of integers, to exemplify and guide our discussions. We argue that the mathematics to be approached in the mathematics teacher education must be connected to the knowledge that is effectively mobilized in the teaching practice.

---

[1] Doutor em Ensino de Ciências e Educação Matemática, pela Universidade Estadual de Londrina (UEL). Professor da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), câmpus Londrina, Paraná, Brasil. Endereço eletrônico: henriquerizek@hotmail.com.

[2] Doutora em Educação Matemática, pela Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" (Unesp). Professora da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), câmpus Cornélio Procópio, Paraná, Brasil. Endereço eletrônico: linlyasachs@yahoo.com.br.

KEYWORDS: Mathematical Preparation of Teacher. Mathematics teacher education. School Mathematics. Academic Mathematics. The set of integers.

Introdução

> Seja $f(x) \in F[x]$ um polinômio de grau ≥ 1. Tomemos h, uma outra variável, independente sobre $F[x]$. O polinômio $f(x+h) \in F[x,h]$ pode ser escrito:
> $$f(x+h) = f_0(x) + f_1(x)h + \cdots f_n(x)h^n$$
> Onde $f_1(x) \in F[x]$. Fazendo $h = 0$ percebemos que $f_0(x) = f(x)$. Isso implica que h divide $f(x+h) - f(x)$, donde
> $$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f_1(x) + f_2(x)h + \cdots f_n(x)h^{n-1}$$
> Definimos *derivada* de $f(x)$ como sendo o polinômio $f_1(x)$. Usaremos a notação usual para a derivada: $f'(x)$. É claro que vale a congruência:
> $$f(x+h) \equiv f(x) + f'(x)h \bmod h^2$$
> E essa congruência determina univocamente a derivada: se, para algum polinômio $g(x) \in F[x]$ tivermos $f(x+h) \equiv f(x) + g(x)h \bmod h^2$ então $f'(x)h \equiv g(x)h \bmod h^2$, de onde decorre $f'(x) \equiv g(x) \bmod h$. Isso acarreta $f'(x) = g(x)$, pois h é transcendente sobre $F[x]$. Uma aplicação direta da congruência $f(x+h) \equiv f(x) + f'(x)h \bmod h^2$ garante que
> (1) $(f+g)' = f' + g'$, $\forall\, f, g \in F[x]$
> (2) $(fg)' = f'g + fg'$, $\forall\, f, g \in F[x]$
> (3) $(af)' = af'$, $\forall\, a \in F, \forall\, f \in F[x]$
> (4) Se $f(x) = x$, então $f' = 1$
>
> Decorre dessas propriedades que se $f(x) = x^n$ então $f'(x) = nx^{n-1}$, para todo natural $n \geq 1$. Além disso, como $1^2 = 1$, se $f(x) = 1$, então $(ff)' = f' = f'f + ff' = 2f'$, ou seja, $1' = 0$. Portanto, se $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, com $a_j \in F$,
> $$f'(x) = a_1 + 2a_2x + \cdots na_nx^{n-1}$$
> (MARTIN, 2010, p. 240-241, grifo do autor).

O trecho acima foi retirado do livro *Grupos, Corpos e Teoria de Galois*, do autor Paulo Agozzini Martin, um livro originado das notas de aula do autor, professor da disciplina de Álgebra III, ministrada no Instituto de Matemática e Estatística, da Universidade de São Paulo, no ano de 1987. São dois os motivos que nos levaram a trazer esse recorte para abrir a introdução deste texto: o estranhamento e a inspiração. Estranhamento[3] explicitado em nossa primeira reação ao ler esse trecho do livro: "que coisa é essa?", "o que esse conceito de derivada, que *é* um conceito da Análise, está fazendo em um livro de Álgebra e, principalmente, sendo definido com base no conceito de congruência módulo m?". No momento posterior ao estranhamento, vieram algumas inspirações para questionar um discurso recorrente, quando se trata da formação de professores de matemática, que diz ser

[3] O sentimento de estranhamento que tivemos se assemelhou à ideia de estranhamento apresentada por Viola dos Santos e Lins (2016), uma vez que estávamos diante de uma situação matemática que era estranha a nós de tal modo que tivemos dificuldade em aceitar aquela formulação para a derivada de $f(x)$.

necessário que o professor *saiba mais matemática*, pois ela fundamenta a matemática necessária ao professor da Educação Básica para realizar seu trabalho nas escolas. O que significa *saber mais*, nesse caso? Por que esse *saber mais matemática* não inclui, também, essa definição de derivada, já que derivada é um tema abordado nos cursos de Licenciatura em Matemática? Quem delimita qual a “quantidade” de matemática é suficiente para dizer que o professor *sabe mais matemática* que seus alunos?

Adiantamos aos leitores que o foco deste artigo não será o conceito de derivada, muito menos na formulação apresentada na citação acima. É sabido que esse modo de definir esse conceito não permeia a matemática presente na formação inicial de professores, não sendo, portanto, relevante utilizá-lo como referência para debater a matemática na formação de professores. O conteúdo matemático que trazemos para o debate é o conjunto dos números inteiros em sua construção lógico-formal, em particular a multiplicação de inteiros negativos.

Assim, o presente artigo trata-se de um ensaio teórico que visa problematizar esse discurso de que o professor precisa *saber mais matemática*, levantando questionamentos e apontado uma possibilidade de direção. Iniciamos o texto mostrando como esse discurso tem sido recorrente, entre matemáticos e educadores matemáticos. Na seção seguinte, explicitamos nossa fundamentação teórica, que se pauta na diferenciação entre Matemática Escolar e Matemática Acadêmica, proposta por Moreira e David (2010). Depois, dedicamos uma seção para apresentar o caso do conjunto dos números inteiros que nos dará subsídios para, na seção seguinte, argumentar e aprofundar nas discussões acerca dessa matemática na formação inicial do professor. Finalizamos o artigo tecendo algumas considerações e apontamentos sobre a matemática em cursos de formação de professores.

Discurso recorrente

Nesta seção, queremos apresentar, a partir de diferentes fontes, que é recorrente, entre matemáticos e educadores matemáticos, o discurso de que é importante que o professor *saiba mais matemática*, para fundamentar a matemática que ele ensina. Para isso, trazemos três pesquisas que explicitam esse discurso (MOREIRA; CURY; VIANNA, 2005; MOREIRA; VIANNA, 2016; VIOLA DOS SANTOS, 2012) e um texto de uma coluna de jornal (VIANA, 2017).

A primeira pesquisa que trazemos é a realizada por Moreira, Cury e Vianna (2005), que questionou matemáticos sobre a importância e a obrigatoriedade da disciplina de Análise Real nos cursos de Licenciatura em Matemática. Dos 31 entrevistados[4] (entre pesquisadores titulares do Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada e professores titulares de departamentos de matemática de universidades brasileiras), 29 responderam que, sim, essa disciplina deve ser obrigatória nos cursos e nenhum respondeu que não (os dois entrevistados restantes não responderam a essa questão).

Como complemento a essa questão, foi pedido que os entrevistados argumentassem sobre a permanência da disciplina. 12 entrevistados tiveram seus argumentos agrupados na seguinte categoria, criada pelos autores:

> A disciplina proporciona uma compreensão sólida e profunda dos conceitos básicos da matemática escolar, explica os "porquês" e dá mais segurança ao futuro professor da escola. Proporciona a construção de uma visão integrada e logicamente consistente da matemática elementar, em substituição a uma visão que a concebe como um amontoado desconexo de fórmulas e regras (MOREIRA; CURY; VIANNA, 2005, p. 22).

Nas palavras de alguns entrevistados:

> Resposta 13: Concluindo, eu ainda acho que o ensino da Análise, na formação de um licenciado em matemática, é adequado, pois é o momento que ele tem para [...] entender o "porquê" de certas afirmações... (MOREIRA; CURY; VIANNA, 2005, p. 23).
>
> Resposta 15: [...] a forma como o assunto é tratado deveria contribuir de modo significativo para que, como professor, a matemática "elementar" fosse apresentada não meramente como um amontoado de fórmulas e regras, mas com a preocupação de estimular progressivamente o aluno a argumentos lógicos e dedutivos (MOREIRA; CURY; VIANNA, 2005, p. 23-24).

Em outra pesquisa, de Moreira e Vianna (2016), os autores entrevistaram educadores matemáticos sobre o mesmo ponto – a obrigatoriedade da disciplina de Análise Real na Licenciatura em Matemática – e, a partir das respostas obtidas, buscaram traçar um paralelo entre os posicionamentos dos matemáticos e dos educadores matemáticos. Dos 18 entrevistados[5], 15 responderam que, sim, a disciplina deve ser obrigatória, dois não responderam e um disse que não necessariamente, pois poderia ser incluída em outra disciplina. Também, nenhum respondeu que não deveria ser obrigatória.

---

[4] Os autores enviaram um questionário para 80 pessoas, sendo que apenas 31 responderam (MOREIRA; CURY; VIANNA, 2005).

[5] Os autores enviaram um questionário para 80 pessoas, sendo que 28 responderam, mas, dentre esses, dez não aceitaram participar da pesquisa, por diversas razões (MOREIRA; VIANNA, 2016).

Seguindo a mesma metodologia de pesquisa, os autores questionaram quais argumentos os entrevistados utilizariam para defender a permanência da disciplina no curso. Em categoria semelhante à apresentada por Moreira, Cury e Vianna (2005), os autores reuniram as respostas de 12 entrevistados:

> A disciplina Análise Real traz ao licenciando uma fundamentação necessária a uma visão aprofundada do conhecimento matemático que se estuda na Educação Básica. Este conhecimento é necessário para que o futuro professor possa perceber problemas epistemológicos importantes nas abordagens usuais dadas a conceitos como números racionais e irracionais, sequências, funções, continuidade, entre outros. Permite ao futuro professor discutir de modo mais amplo o conhecimento que irá lecionar. Atuaria também na fundamentação da ênfase (maior ou menor) a ser dada ao ensino de certos tópicos (MOREIRA; VIANNA, 2016, p. 523).

Alguns exemplos de respostas:

> [...] Sem o que indiquei (construção dos reais a partir dos cortes, sequências de Cauchy ou intervalos encaixantes; teorema do valor intermediário tratado rigorosamente), o professor vai ensinar "números reais" sem ter a menor ideia do que sejam (Respondente 1) (MOREIRA; VIANNA, 2016, p. 524).
>
> Defendo que essa disciplina (que poderia ter até outro nome) deve fazer parte de cursos de formação para professores de matemática porque seria talvez a única oportunidade para os futuros professores refletirem a respeito desse ente tão familiar que é o número real. E entendendo isso, em sua prática talvez ele jamais tivesse dúvidas do tipo "0,999... = 1?" (Respondente 8) (MOREIRA; VIANNA, 2016, p. 524).
>
> A disciplina Análise Real traz ao licenciando uma fundamentação necessária a uma visão mais aprofundada do conhecimento matemático que se estuda na Educação Básica. Esse conhecimento é necessário para perceber problemas epistemológicos importantes nas abordagens que se dá a conceitos como números racionais e irracionais, sequências, funções, continuidade, por exemplo (Respondente 9) (MOREIRA; VIANNA, 2016, p. 524).
>
> Os futuros professores de matemática precisam, para sua prática docente, de uma compreensão ampla dos números reais para quando forem ensinar os campos numéricos e discutir conceitos tais como números racionais, irracionais, densidade e continuidade com seus alunos (Respondente 13) (MOREIRA; VIANNA, 2016, p. 524).

Comparando os resultados das duas pesquisas, os autores afirmam:

> Basicamente, o que se entende, tanto no caso dos matemáticos como no caso dos educadores matemáticos participantes dos nossos estudos, é que a disciplina Análise Real [...] permitiria ao professor olhar para os conceitos, técnicas, processos e métodos trabalhados na matemática da escola básica com a segurança de quem sabe "o que são". Possibilitaria um olhar "de cima", que, supostamente, daria segurança ao professor (MOREIRA; VIANNA, 2016, p. 529).

A terceira pesquisa que trazemos aqui é a tese de doutorado de Viola dos Santos (2012), que entrevistou matemáticos e educadores matemáticos a respeito da formação matemática dos professores de matemática.

Uma das entrevistadas, pesquisadora da Educação Matemática, afirma que "se deve trabalhar, na graduação, a matemática avançada embora na Licenciatura em especial, o professor fosse um educador capaz de fazer a ligação de sua disciplina com ideias existentes na educação básica" (VIOLA DOS SANTOS, 2012, p. 36). Ela complementa: "Isso tornaria mais fácil aos estudantes da Licenciatura, futuros professores do Ensino Fundamental e Médio, justificar inúmeras situações vividas em sala de aula" (p. 36).

Outro entrevistado, pesquisador da Matemática, diz que "o professor tem que sentir que ele sabe mais que os alunos" (VIOLA DOS SANTOS, 2012, p. 49). Para ele, o professor tem que saber mais matemática: "eu acho que tem que ter mais matemática do que aquela que ele ensina. Uma justificativa que eu daria para isso seria pela segurança e pela possibilidade de, eventualmente, ele ter uma interação com alunos" (p. 49).

Ele exemplifica:

> Eu acho mesmo que quando o professor dá o curso de Geometria para o pessoal do Ensino Médio ele precisa ser cuidadoso com o rigor. Ele não pode ficar chutando as coisas. Nesse sentido, ele tem que transmitir que a matemática tem um certo rigor. Isso ele tem que saber. Ele não pode "fazer de conta". É preferível que ele entre na sala de aula e diga que isso aqui se demonstra, mas que ele não vai fazer, ao invés de fazer um "faz de conta". Eu acho que se ele tem cultura, tem mais segurança. Eu não vejo muita diferença entre essa formação e as discussões que ele faz na educação básica (VIOLA DOS SANTOS, 2012, p. 57).

Em determinado momento da entrevista, o autor apresenta um texto do Felix Klein, de 1908[6], abordando a falta de relação entre o que o professor aprende na graduação e o que ensina, quando se forma. A esse respeito, o entrevistado responde:

> Eu acho que ele pode muito bem, uma vez que fez a universidade, trazer um influxo para o Ensino Médio. Não é que ele vai ensinar essas coisas, mas que ele vai ter atitude. Se levar a coisa do Klein ao pé da letra, então você não precisaria de mais que um ano para formar o professor. Porque se ele fez o Ensino Médio e depois diz: quero ser professor do Ensino Médio. Mas ele já estudou tudo, já sabe tudo, então em um ano você o treina um pouquinho e já o joga como professor. Isso para mim não faz sentido. Novamente: eu acho importante que ele saiba um pouco mais para que tenha segurança e como possibilidade para a própria carreira dele. Para mim seria um absurdo, pois se ele só vai ensinar essas coisas do Ensino Fundamental e Médio, para que ele vai estudar Cálculo Integral? Se ele não vai ensinar Cálculo

[6] "[...] Por muito tempo [...] os homens da universidade preocuparam-se exclusivamente com as suas ciências, sem considerarem as necessidades das escolas, nem mesmo se preocupando em estabelecer uma conexão com a Matemática escolar. Qual foi o resultado desta prática? O jovem universitário se encontrava, no início, confrontado com problemas que não sugeriam, de maneira nenhuma, as coisas com as quais ele tinha se ocupado na escola. Naturalmente, ele esquecia estas coisas rápida e completamente. Quando, ao fim de seus estudos, ele se tornava um professor, encontrava-se repentinamente na posição de ter que ensinar a tradicional matemática elementar da antiga e pedante maneira; e, uma vez que ele praticamente não era capaz, sem ajuda, de distinguir qualquer conexão entre esta tarefa e sua Matemática universitária, logo se acomodava ao que a tradição honrava, e seus estudos universitários permaneciam apenas uma lembrança mais ou menos agradável, que não tinha nenhuma influência sobre seu ensinar" (KLEIN apud VIOLA DOS SANTOS, 2012, p. 55).

> Integral, para que ele vai estudar? Então ensina para ele progressão aritmética... mas ele já sabe progressão aritmética. Então, não há necessidade de se estudar mais [risos] (VIOLA DOS SANTOS, 2012, p. 57-58).

Por fim, mostramos que esse discurso não está apenas elucidado em pesquisas acadêmicas, mas também na mídia. Em sua coluna semanal no jornal Folha de São Paulo, o matemático Marcelo Viana publicou, em 22 de setembro de 2017, o texto “Formação é calcanhar de Aquiles dos professores de matemática do Brasil”. Nele, o autor afirma que “a formação oferecida na maior parte das nossas licenciaturas em matemática é totalmente inadequada, além de obsoleta” (VIANA, 2017, *on-line*) e sugere que os cursos tratem de “tópicos elementares de um ponto de vista avançado”. Ele exemplifica: “Ensinamos na escola que raiz cúbica de 2 é o número que elevado ao cubo dá 2. Mas nunca gastamos tempo para mostrar ao licenciando que tal número existe”; “Para dividir duas frações devemos multiplicar a primeira pela inversa da segunda. Por quê?”; e “Também não explicamos ao futuro professor de matemática o que significa realmente a expressão decimal de um número: porque é que 0,99999999999999... é o mesmo que 1?”.

O autor finaliza seu texto, então, apresentando algumas mudanças que têm ocorrido, segundo ele, nesse sentido, na formação de professores de matemática:

> O Mestrado Profissional para Professores de Matemática (Profmat) nasceu em 2011, sob a influência das ideias de Klein, Wu e outros. Não é surpresa que o mestrado tenha sido “acusado” por alguns educadores de valorizar demais o conteúdo matemático, e por alguns matemáticos de omitir tópicos avançados ensinados em muitas licenciaturas (VIANA, 2017, *on-line*).

A seguir, apresentamos nossa fundamentação teórica a respeito da matemática na formação do professor, diferenciando a Matemática Escolar da Matemática Acadêmica (MOREIRA; DAVID, 2010).

Matemática na formação do professor

Para falarmos da matemática na formação do professor, partimos de dois pressupostos. O primeiro estabelece uma diferença entre as atividades do matemático e do educador matemático. Concordamos com Fiorentini e Lorenzato (2009), quando afirmam:

> [...] o *matemático*, por exemplo, tende a conceber a matemática como um fim em si mesma, e, quando requerido a atuar na formação de professores de matemática, tende a promover uma educação *para* a matemática, priorizando os conteúdos formais e uma prática voltada à formação de novos pesquisadores em matemática (p. 3, grifos dos autores).

Enquanto

> [...] o *educador matemático*, em contrapartida, tende a conceber a matemática como um meio ou instrumento importante à formação intelectual e social das crianças, jovens e adultos e também do professor de matemática do ensino fundamental e médio e, por isso, tenta promover uma educação *pela* matemática. Ou seja, o educador matemático, na relação entre educação e matemática, tende a colocar a matemática a serviço da educação, priorizando, portanto, esta última, mas sem estabelecer uma dicotomia entre elas (p. 3-4, grifos dos autores).

Nós, enquanto educadores matemáticos, estamos interessados em uma formação matemática que permita ao licenciando exercer sua futura atividade profissional como professor da Educação Básica, que é o objetivo primeiro dos cursos de Licenciatura – e este é nosso segundo pressuposto. Tal como estabelecem as Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura, entendemos que "os cursos de Licenciatura em Matemática têm como objetivo principal a formação de professores para a educação básica" (BRASIL, 2002, p. 15).

Na mesma direção, Fiorentini e Oliveira (2013) afirmam que a Licenciatura, assim como a odontologia, a engenharia etc., é um curso profissionalizante e visa formar um profissional da educação matemática. Portanto, antes de pensarmos em formação matemática *sólida*, que prioriza uma educação *para* a matemática e que busca formar novos pesquisadores em matemática, pretendemos pôr em debate uma formação matemática que ofereça maneiras de lidar com as demandas da prática docente e que priorize os valores da Matemática Escolar em suas múltiplas possibilidades.

A diferenciação entre Matemática Escolar e Matemática Acadêmica aqui assumida é aquela feita por Moreira e David (2010). Para esses autores, a Matemática Acadêmica é tida como aquele sistema lógico-formal-dedutivo que os matemáticos profissionais produzem. A Matemática Escolar não é entendida nem como uma matemática científica didatizada, nem como uma construção autônoma da escola, mas sim como um conjunto de saberes associados ao exercício da profissão docente (MOREIRA; DAVID, 2010). A Matemática Escolar pensada dessa maneira valoriza os significados produzidos e mobilizados pelos professores naquele contexto da sala de aula da Educação Básica, considerando toda a heterogeneidade dos modos de pensar dos estudantes. Porém, essa Matemática Escolar não é advinda somente da prática, é, também, produto de pesquisas sobre ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos.

Essa concepção de Matemática Escolar (MOREIRA; DAVID, 2003, 2005, 2010) desenvolve-se em contraposição a duas ideias: a de transposição didática, de Chevallard

(1991), e a de matemática escolar como uma construção fundamentalmente endógena à escola, de Chervel (1990).

Segundo Chevallard (1991),

> [...] um conteúdo de saber que é designado como saber a ensinar sofre, a partir de então, um conjunto de transformações adaptativas que vão torná-lo apto a ocupar um lugar entre os *objetos de ensino*. O "trabalho" que transforma um saber a ensinar em um objeto de ensino é denominado *transposição didática*. (p. 45, grifos do autor. Tradução nossa).

Não vamos nos aprofundar na noção de transposição didática de Chevallard, pois esse não é nosso objetivo. Contudo, faz-se necessário apontar em que medida a abordagem proposta por Moreira e David se distancia da de Chevallard. Segundo Moreira e David (2003), o problema é que Chevallard toma o saber científico "como a referência última que permitiria à comunidade dos matemáticos desautorizar o objeto de ensino que não seja considerado 'suficientemente próximo ao saber sábio'" (p. 61). Saber sábio significa, nesse contexto, saber científico. Desse modo, esse processo de adaptação, segundo Moreira e David (2010), estaria sujeito a "uma 'vigilância epistemológica' que não permitiria 'desvios' em relação ao conhecimento matemático científico" (p. 18-19).

Já Chervel assume a posição contrária àquela que considera as disciplinas escolares como mera vulgarização das ciências de referência e que toma a Pedagogia como um "lubrificante" do processo de vulgarização (MOREIRA, DAVID, 2003, 2010). Para Chervel (1990), as disciplinas escolares são "independentes, numa certa medida, de toda realidade cultural exterior à escola, e desfrutando de uma organização, de uma economia interna e de uma eficácia que elas não parecem dever a nada além delas mesmas, quer dizer, à sua própria história" (CHERVEL, 1990, p.180).

Ao mesmo tempo em que a perspectiva de Chervel abre a possibilidade para a concepção da Matemática Escolar como uma construção própria da escola, parece, por outro lado, fechar as portas a uma multiplicidade de elementos e processos que condicionam essa construção a partir do exterior do ambiente escolar (MOREIRA; DAVID, 2003, 2010).

Posto desse modo, para a caracterização de Matemática Escolar proposta por Moreira e David, nenhuma das duas concepções – de Chevallard e de Chervel – é satisfatória. Os autores assumem, portanto, a ideia de Matemática Escolar como aquela que não se refere tão somente às práticas efetivas que ocorrem no interior da escola e nem se reduz a uma adaptação da Matemática Acadêmica. A Matemática Escolar refere-se ao conjunto de saberes:

> [...] "validados", associados especificamente ao desenvolvimento do processo de educação escolar básica em Matemática. Com essa formulação, a Matemática

> Escolar inclui tanto saberes produzidos e mobilizados pelos professores de Matemática em sua ação pedagógica na sala de aula da escola, quanto resultados de pesquisas que se referem à aprendizagem e ao ensino escolar de conceitos matemáticos, técnicas, processos etc. (MOREIRA; DAVID, 2010, p. 20-21).

Tal concepção alinha-se com as noções do Conhecimento Pedagógico do Conteúdo, de Shulman (1986), e do Conhecimento Matemático para o Ensino, de Ball, Thames e Phelps (2008), no sentido em que a Matemática Escolar, mesmo que constituída a partir de disputas no plano das prescrições curriculares, é resultado do processo pelo qual a prática escolar, por meio de sua lógica e seus condicionantes, opera sobre tais prescrições. "Esse processo envolve elementos de produção, retradução, seleção, adaptação e também de *carência* de saberes" (MOREIRA; DAVID, 2005, p. 52, grifo dos autores).

Viola dos Santos e Lins (2016) propõem uma discussão acerca de cinco modos de pensar a(s) matemática(s) na formação inicial de professores de matemática. Para tanto, os autores levaram em conta trabalhos que argumentam em favor da existência de uma única matemática e aqueles que argumentam que existem diferentes matemáticas. Os cinco modos apresentados por Viola dos Santos e Lins (2016) foram nomeados como: 1) A Matemática e seus níveis de sofisticação; 2) Estrutura Cognitiva da Matemática; 3) Matemática Acadêmica e Matemática Escolar; 4) Matemática Escolar como um tipo Especial da Matemática Acadêmica; 5) Matemática do Matemático e Matemática do Professor de Matemática.

No artigo, os autores evidenciam que há pesquisas que se alinham com a visão de Moreira e David quando distinguem as matemáticas; contudo, há, também, aquelas que não compartilham da mesma compreensão e veem a matemática como única (e, talvez, seja esta visão que sustenta aqueles discursos recorrentes que apresentamos na seção anterior). Nossa compreensão é que estabelecer essa diferença entre as matemáticas seja essencial, pois nos permite um novo olhar sobre o debate e traz para o cerne da discussão questões como: que matemática deve ser priorizada nos cursos de Licenciatura? É relevante ao professor em formação inicial ter contato com disciplinas que contemplem aspectos da Matemática Acadêmica? Será que as discussões acerca da Matemática Escolar, de maneira mais detalhada e aprofundada, não são mais urgentes e relevantes para se abordar em cursos de formação de professores?

Para termos condições de embasar nossos argumentos na direção de esboçar respostas a esses questionamentos, abordamos, na próxima seção, um tema matemático central na Matemática Escolar, o conjunto dos números inteiros, dando enfoque a algumas justificativas para a regra $(-a).(-b) = +ab$. Nosso objetivo é utilizar esse caso para colocar em suspensão os discursos recorrentes supracitados, questionando em que medida essa Matemática Acadêmica configura-se como um *saber mais matemática* que fundamenta a Matemática Escolar e que, portanto, serve ao futuro trabalho docente na escola.

O caso do conjunto dos números inteiros

Iniciamos esta seção apresentando o que chamamos de números inteiros na Matemática Acadêmica, dada a sua desconexão com os números inteiros na Matemática Escolar. Trata-se da construção lógico-formal dos números inteiros, que, assim como as construções dos demais conjuntos numéricos, é relativamente recente na história da matemática. A partir do século XVIII, quando a matemática se fortalecia enquanto um sistema lógico-formal-dedutivo, a ideia de número passa a ser mais abstrata, deixando de ser relacionada, necessariamente, a uma quantidade. Nesse contexto, os números inteiros, que já eram conhecidos e manipulados por muitos matemáticos e não matemáticos, ganham uma “roupagem” diferente, enquanto classes de equivalência de pares ordenados de números naturais.

Essa formulação para os números inteiros, feita para dar uma explicação rigorosa e formal às expressões do tipo $(a-b)$ para quaisquer $a,b \in \mathbb{N}$, introduz a ideia de “subtrações equivalentes”. Isto é, as subtrações $5-1, 6-2$ e $8-4$ são colocadas em um mesmo conjunto, enquanto que as subtrações $5-7, 1-3$ e $0-2$ são colocadas em outro conjunto. Desse modo, a cada diferença $a-b$ associa-se um par ordenado $(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e, além disso, a igualdade em $\mathbb{N}$

$$5-3=9-7$$

equivale a $5+7=9+3$. Assim, se $a,b,c,d \in \mathbb{N}, a \geq b$ e $c \geq d$, vale a equivalência:

$$a-b=c-d \iff a+d=c+d$$

Dessa maneira, considerando, no conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, uma relação $\sim$ pode ser definida da seguinte maneira: para quaisquer (a,b) e (c,d) em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $(a,b)\sim(c,d) \iff a+d=c+b.$

A relação $\sim$ é uma relação de equivalência (pois, valem as propriedades *reflexiva*, *simétrica* e *transitiva*) e, por isso, determina uma partição desse conjnto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ em classes de equivalência. Para cada $(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, indica-se $\overline{(a,b)}$ a classe de equivalência determinada por $(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

$$\overline{(a,b)} = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} | (x,y)\sim(a,b)\} = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \,| x+b=y+a\}$$

O conjunto quociente de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ por $\sim$, isto é, o conjunto de todas as classes de equivalências $\overline{(a,b)}$, para qualquer $(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, é indicado por $\mathbb{Z}$.

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \times \mathbb{N}/\sim\; = \left\{\overline{(a,b)}\ |(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\right\}$$

São exemplos disso:

$$+1 = \overline{(1,0)} = \{(1,0), (2,1),\ (3,2), \dots\}$$

$$0 = \overline{(0,0)} = \{(0,0),\ (1,1), (2,2), \dots\}$$

$$-1 = \overline{(0,1)} = \{(0,1),\ (1,2),\ (2,3)\}$$

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, +1, +2, \dots\}$$

Desse modo, o número inteiro é uma classe de equivalência, ou seja, cada número inteiro é um conjunto. Retomaremos esse ponto mais adiante.

Construído o conjunto dos números inteiros, são definidas as operações de adição e multiplicação sobre esse conjunto. É possível mostrar, a partir da forma como são definidas essas operações, que algumas propriedades dessas operações sobre os números inteiros são válidas e que, por isso, o conjunto dos números inteiros munido dessas operações forma um anel, o anel dos inteiros $(\mathbb{Z}, +, .)$.

Vamos apresentar, aqui, apenas a definição da multiplicação em $\mathbb{Z}$, para não fugirmos de nossas pretensões neste artigo.

Sendo $m = \overline{(a,b)}$ e $n = \overline{(c,d)}$ elementos quaisquer de $\mathbb{Z}$, chama-se produto de m com n, e se indica por mn (ou $m.n$), o elemento de $\mathbb{Z}$ definido por:

$$m.n = \overline{(ac + bd, ad + bc)}$$

Essa definição, certamente, não foi feita ao acaso. Ela é do modo que é simplesmente pelo fato de que precisa manter todas as propriedades que já eram conhecidas antes mesmo da construção lógico-formal dos números inteiros. Por isso, essa definição mantém e justifica, por exemplo, o fato de que $(-a).(-b) = +ab$. Vamos mostrar esse fato e o chamaremos de *justificativa 1*:

Sejam $m = \overline{(a,b)}$, $-m = \overline{(b,a)}$, $n = \overline{(c,d)}$ e $-n = \overline{(d,c)}$.

Pela definição de multiplicação entre inteiros apresentada anteriormente, segue que:

$$(-m).(-n) = \overline{(bd + ac, bc + ad)} = \overline{(ac + bd, ad + bc)} = m.n$$

Logo, $(-m).(-n) = +m.n$, como era esperado.

Agora, contrastamos essa explicação para $(-m).(-n) = +m.n$, notadamente distante dos números inteiros da Matemática Escolar, com três outras explicações[7] que, ao nosso ver, podem se conectar, efetivamente, ao trabalho docente na Educação Básica.

A primeira delas, que chamaremos de *justificativa 2*, retirada de Pontes (2010), é sugerida pelo *National Council of Theachers of Mathematics* (NCTM). Nessa justificativa, os estudantes da Educação Básica são levados a se convencerem de que $(-a).(-b) = +a.b$. A explicação está presente na Figura 1:

Figura 1: Justificativa para a regra dos sinais, proposta pelo NCTM

$4 \times 5 = 20$	-5	$4 \times -5 = -20$	+5
$3 \times 5 = 15$	-5	$3 \times -5 = -15$	+5
$2 \times 5 = 10$	-5	$2 \times -5 = -10$	+5
$1 \times 5 = 5$	-5	$1 \times -5 = -5$	+5
$0 \times 5 = 0$	-5	$0 \times -5 = 0$	+5
$-1 \times 5 = ?$	-5	$-1 \times -5 = ?$	+5
$-2 \times 5 = ?$	-5	$-2 \times -5 = ?$	+5
$-3 \times 5 = ?$	-5	$-3 \times -5 = ?$	+5
$-4 \times 5 = ?$	-5	$-4 \times -5 = ?$	+5

Fonte: Pontes (2010, p. 153-154)

A segunda explicação, que chamamos de *justificativa 3*, para o fato de que $(-a).(-b) = +a.b$ vem da história da matemática. Trata-se do argumento utilizado por Leonhard Euler (1707-1783), que não fazia uso de conhecimentos como aqueles apresentados na justificativa 1, uma vez que a construção formal dos números inteiros e racionais não havia sido feita em sua época. Segundo Glaeser (2010):

> Em seus artigos científicos, ele [Euler] maneja os números relativos e complexos com engenhosidade e arrojo, sem levantar muitas questões a respeito da legitimidade de suas construções. No entanto, em uma obra destinada a principiantes (Euler, 1770), a intenção pedagógica o fez sentir-se obrigado a fornecer explicações, tentando, especificamente, *justificar a regra dos sinais* (p. 79, grifos do autor).

Para justificar o fato de que $(-a).(-b) = +ab$, Euler tinha o seguinte argumento, dividido em três partes:

> 1. A multiplicação de uma *dívida* por um número positivo não apresenta qualquer dificuldade: três dívidas de a escudos fazem uma dívida de $3a$ escudos. Logo $b \times (-a) = -ab$.

[7] Para conhecer outras explicações possíveis, ver Pontes (2010).

— Observa-se, neste exemplo, que a multiplicação é uma *operação externa*. O argumento fica, pois, sem valor, se o multiplicador não for um inteiro natural.
2. Por comutatividade, Euler deduz daí que $(-a) \times b = -ab$.
— Argumento sem valor para uma lei externa. Que significa (-3) ganhos de a escudos?
3. Resta determinar o que é [...] o produto $(-a)$ por $(-b)$.
— É claro, diz Euler, que o valor absoluto é ab. Trata-se, portanto de decidir entre $+ab$ e $-ab$. Como $(-a) \times b$ já vale $-ab$, a única possibilidade restante é de que $(-a) \times (-b) = +ab$. (!!!) (GLAESER, 2010, p. 79-80, grifos do autor).

A última explicação, que chamamos de *justificativa 4*, retirada de Pontes (2010), também vem da história da matemática. Hermann Hankel (1839-1873), em sua obra *Teorias do sistema dos números complexos*, propõe a regra dos sinais, que respeita a propriedade distributiva à direita e à esquerda, da seguinte maneira:

$$0 = a.0 = a.(b + (-b)) = ab + a.(-b) \qquad (I)$$

$$0 = 0.(-b) = \big((-a) + a\big).(-b) = (-a).(-b) + a.(-b) \qquad (II)$$

Igualando (I) e (II), segue que: $ab + a.(-b) = (-a).(-b) + a.(-b)$

Logo, $(-a).(-b) = ab$.

Apresentadas essas quatro justificativas, vamos, agora, aprofundar a discussão sobre o papel dessa Matemática Acadêmica na formação inicial de professores de matemática.

Discussão

Na seção anterior, apresentamos quatro justificativas distintas para explicar a regra de sinal $(-a).(-b) = +a.b$, para números inteiros. Cada uma delas, em nosso entendimento, serve a um determinado contexto e propósito. As justificativas 2, 3 e 4 são completamente plausíveis para se trabalhar na Educação Básica, uma vez que são acessíveis à compreensão dos estudantes e compatíveis com a natureza da própria concepção de conjunto dos números inteiro que é assumida. No contexto escolar, assim como durante um longo período na história da matemática, os números inteiros são apresentados aos estudantes sem a necessidade de uma construção formal e, portanto, uma justifica que os convença[8] da validade de uma determinada regra ou propriedade é mais potente do que fazer uso de uma demonstração rigorosa e inacessível, que o estudante não compreenderá.

[8] A ideia de convencer, aqui, foi inspirada em Tall (1991), quando afirma que a passagem de uma matemática mais elementar para uma matemática mais avançada envolve uma transição importante que corresponde à passagem da *descrição* à *definição*, do *convencer* ao *provar* de uma forma lógica baseada em definições.

Por outro lado, a justificativa 1 está muito distante da matemática praticada nas escolas. Seria essa justificativa, por se tratar de uma construção lógico-formal, que difere[9] daquele conhecimento de número inteiro veiculado na escola, útil (no sentido de ser acessível para os estudantes da Educação Básica) para o professor explicar a regra dos sinais? Afinal, qual o propósito de o professor lançar mão de uma explicação incompreensível para os estudantes? Seria para diferenciá-lo dos estudantes, colocando-o em uma posição hierárquica superior àqueles e reforçando estereótipos de professor como detentor do conhecimento e discursos como “ele sabe muito para si, mas não sabe ensinar”?

Ao analisar disciplinas ofertadas no curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais e livros usados como referência nessas disciplinas, Moreira e David (2004) detalham aspectos fundamentais que distinguem as construções formais de $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ – a partir de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$, respectivamente – das sucessivas extensões dos conjuntos numéricos que se desenvolvem no processo de escolarização básica. Para eles, as construções da Matemática Acadêmica visam produzir uma “abstração que expresse formalmente as características ‘essenciais’ de um objeto que, a menos da construção formal, já é, de certo modo, conhecido” (p. 6), enquanto que, na escola, as extensões numéricas têm natureza totalmente diferente, já que o conjunto numérico e a estrutura que resultam do processo de extensão são um universo genuinamente novo para o estudante, exigindo um tratamento didático-pedagógico específico das várias etapas desse processo (MOREIRA; DAVID, 2004).

As distinções apontadas por Moreira e David (2004) indicam, portanto, diferenças não apenas didático-pedagógicas, mas, também, epistemológicas entre os conjuntos numéricos na Matemática Acadêmica e na Matemática Escolar. Sem focar nos conjuntos numéricos, Fiorentini e Oliveira (2013) também reconhecem diferenças ao afirmarem que a matemática do professor “difere epistemológica e metodologicamente da matemática do matemático acadêmico, embora haja muitos aspectos e elementos em comum” (p. 924).

Algumas dessas diferenças epistemológicas podem ser debatidas a partir do que apresentamos na seção anterior. O que é um número inteiro, no contexto da Educação Básica? Como eles são compreendidos? Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais,

> Os números inteiros podem surgir como uma ampliação do campo aditivo, pela análise de diferentes situações em que esses números estejam presentes. Eles podem representar diferença, falta, orientação e posições relativas. As primeiras abordagens

[9] Discutiremos essa questão das diferenças (epistemológicas e metodológicas) na sequência do texto.

> dos inteiros podem apoiar-se nas idéias intuitivas que os alunos já têm sobre esses números por vivenciarem situações de perdas e ganhos num jogo, débitos e créditos bancários ou outras situações. O estudo desses números não poderá, no entanto, restringir-se apenas a esses aspectos mas incorporar situações que permitam a compreensão das regras do cálculo com os inteiros pela observação de regularidades e aplicação das propriedades das operações com os naturais (BRASIL, 1998, p. 66).

Essas ideias intuitivas que podem embasar as primeiras abordagens dos inteiros, bem como o que esses números representam (diferença, falta, orientação e posições relativas) se perdem quando os números são entendidos do ponto de vista da Matemática Acadêmica. Na construção lógico-formal, como vimos, um número inteiro é um conjunto, já que é uma classe de equivalência. Imaginemos isso para um estudante que está aprendendo os números inteiros. Como um número inteiro pode ser um conjunto? Se um número inteiro é um conjunto, como posso somar e multiplicar, tal como fazemos, sendo que as operações entre conjuntos que conhecemos são distintas da adição e da multiplicação com números? O que significa a raiz quadrada de um conjunto?

A noção de que um número pode ser "qualquer coisa", inclusive um conjunto, é característica da Matemática Acadêmica. Moreira e David (2003) nos trazem um exemplo, mas com os números reais. Esses números

> [...] são cortes de Dedekind? São classes de equivalência de seqüências de Cauchy? São seqüências de intervalos encaixantes? Para o matemático profissional, a distinção entre essas formas de conceber o número real não é relevante. O mesmo objeto matemático — número real — pode ser pelo menos três "coisas" completamente diferentes (p. 65).

Para o matemático profissional, não importa o que significa o número, importa que satisfaça a estrutura que o contém. Ao contrário, na Matemática Escolar, descompactar diferentes significados de um dado conceito é uma atividade essencial para que o professor possa orientar seus estudantes para além de regras e algoritmos, sendo esta característica (a de descompactar diferentes significados) mais um aspecto que distingue a Matemática Escolar da Matemática Acadêmica, como apontam Moreira e David (2011).

As operações entre números inteiros também indicam naturezas distintas. Enquanto na Matemática Escolar, como nos apontam os Parâmetros Curriculares Nacionais, as regras do cálculo com os inteiros são concebidas pela observação de regularidades e aplicações das propriedades das operações com os naturais, na Matemática Acadêmica as operações são definidas e suas definições são intencionais (pois já se sabe o que se quer) e pautadas no que já se conhece (os números naturais).

Ainda sobre as diferenças epistemológicas, a construção lógico-formal dos números inteiros nos diz que $2 = \overline{(2,0)} = \{(2,0), (3,1), (3,2), \ldots\}$. A contrução lógico-formal dos números racionais[10] nos diz que: $\frac{2}{1} = \overline{(2,1)} = \{(2,1), (4,2), (6,3), \ldots\}$. Como a classe de equivalência 2 de $\mathbb{Z}$ é diferente da classe de equivalência $\frac{2}{1}$ de $\mathbb{Q}$, seríamos conduzidos a dizer que $\mathbb{Z}$ não está contido em $\mathbb{Q}$, contrariando o que usualmente é feito na Educação Básica. Mas, como já ressaltamos, a construção lógico-formal dos conjuntos numéricos não pode contrariar aspectos já conhecidos antes mesmo da formalização dessas construções. Desse modo, a própria Matemática Acadêmica tem uma saída para isso. Define-se um isomorfismo $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, como $f(m) = \frac{m}{1}$, $m \in \mathbb{Z}$, de modo que $Im(f) = \left\{\frac{m}{1}, m \in \mathbb{Z}\right\}$ pode ser vista como uma cópia de $\mathbb{Z}$ e cada inteiro m se confunde com sua imagem $\frac{m}{1}$ (isto é, $m = \frac{m}{1}$) e, portanto, $\mathbb{Z}$ pode ser identificado com $Im(f)$. Como $Im(f) \subset \mathbb{Q}$, segue que $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ (DOMINGUES, 2009, p. 194-195).

Em um estudo histórico sobre os números racionais, Elias (2017) apresenta como esse novo olhar para os conjuntos numéricos se deu por uma demanda interna da própria matemática, não por uma necessidade pedagógica para o ensino desses números. Inclusive a construção lógico-formal dos conjuntos numéricos deu-se em ordem distinta da própria criação dos números. O conjunto dos números reais, por exemplo, foi formalmente construído em 1872, com Richard Dedekind, enquanto que a construção do conjunto dos números naturais deu-se em 1889, com Giuseppe Peano. Não por acaso essas construções se deram no século XIX, um século favorável para novas percepções da matemática, que ficou conhecido como "a idade do rigor". Segundo Roque (2012),

> A noção de rigor se transformou na virada do século XVIII para o século XIX porque os matemáticos da época se baseavam em crenças e técnicas que não eram mais capazes de resolver os problemas que surgiram no interior da própria matemática. Ou seja, isso não se deu por preocupações formalistas, nem por um interesse metamatemático de fundamentar essa disciplina. O rigor é um conceito histórico, e a noção de rigor de Lagrange era diferente da de Cauchy, que, por sua vez, também seria criticado por Weierstrass, baseado em sua própria concepção aritmética (p. 407).

---

[10] O conjunto dos números racionais, denotado por $\mathbb{Q}$, é definido pelo conjunto quociente $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*/\sim$, isto é, $\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*/\sim$. A relação de equivalência $\sim$ é definida como $(a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow a.d = b.c$ ou $\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d} \Leftrightarrow a.d = b.c$ (com $a, c \in \mathbb{Z}$ e $b, d \in \mathbb{Z}^*$).

Nessa perspectiva, o rigor (atual) da matemática deu-se devido a necessidades internas, pela insuficiência dos argumentos da época para responder às questões que se apresentavam aos matemáticos. Um desses problemas internos a demandar uma nova noção de rigor, segundo Roque (2012), surgiu da crítica à concepção de números como quantidades. Associar números a quantidades passou a impedir o desenvolvimento da matemática; por exemplo, a discussão sobre quantidades negativas mostra que somente os números absolutos eram aceitos. Portanto, para avançar, “era preciso migrar para um conceito abstrato de número não subordinado à ideia de quantidade” (ROQUE, 2012, p. 407).

Assim, temos que nos questionar até que ponto essa matemática que difere epistemologicamente, que tem propósitos e valores distintos, serve ao trabalho docente na Educação Básica. Os discursos recorrentes trazidos neste artigo indicam que o papel da Matemática Acadêmica na formação do professor é “justificar inúmeras situações vividas em sala de aula” ou fornecer “uma compreensão ampla dos números reais para quando forem ensinar os campos numéricos” ou, dito de outra forma, que “ela justifica regras”. Mas, se, como vimos para o caso da multiplicação entre inteiros negativos, essas matemáticas são diferentes, de que modo uma vai contribuir para o ensino da outra? Se a matemática abordada nas escolas difere epistemologicamente da Matemática Acadêmica, de que modo esta pode justificar situações vividas em sala de aula?

Nesse mesmo sentido, Lins (2005) rebate esse discurso recorrente de que as disciplinas de conteúdo matemático – ou, em termos de Moreira e David (2010), Matemática Acadêmica – servem para “prover os *verdadeiros* fundamentos daquilo que se vai ensinar” (p. 119, grifo do autor). Para sustentar sua resposta, Lins (2005) considera o exemplo do matemático suíço Euler, que resolveu difíceis problemas matemáticos de diversas áreas. Contudo,

> Euler não sabia nada de análise, não sabia nada de estruturas, nem algébricas nem outras (grupo, anel, corpo, ordem, topologia…), não sabia nada de representação geométrica ou como pares ordenados de números complexos, nem de cortes nem de nada disso, inclusive geometrias não-euclidianas, simplesmente porque estas coisas não existiam em sua época. Não sabia praticamente nada do que o matemático de hoje diz que é Matemática mesmo, com exceção de coisas da Teoria Não-Analítica dos Números. Mas, como ele resolvia problemas que interessariam ao matemático de hoje, e como fazia afirmações que o matemático de hoje faria, diz-se que ele tratava de Matemática. Mais importante, eu penso que é difícil imaginar alguém que conhece um pouco da história e trabalho de Euler, que diria que ele não seria um bom professor dos ensinos fundamental (5a a 8a) e médio – embora possivelmente, já que em sua época não existiam teorias cognitivas como as de hoje, nem teorias didáticas como as de hoje, ele fosse um professor bastante “tradicional” (p. 120).

O ponto levantado por Lins (2005) é o de que muitos matemáticos, não apenas Euler, tinham vasto conhecimento matemático e criaram muitas coisas (dentro e fora da matemática) sem ter contato com essa estrutura lógico-formal da matemática (acadêmica) contemporânea. Portanto, afirmar que os futuros professores devem ter as estruturas algébricas em sua formação inicial porque elas provêm os verdadeiros fundamentos seria o mesmo que afirmar que matemáticos como Euler e Newton não os tinham.

É interessante notar que este argumento trazido por Lins (2005) se conecta com a justificativa 3 que apresentamos. Euler, com objetivo puramente pedagógico (GLAESER, 2010), estabeleceu uma regra para justificar a regra $(-a).(-b) = +a.b$, sem lançar mão de toda uma construção lógico-formal da matemática. Assim, a matemática do professor, ao se desenvolver com o objetivo central de ensinar matemática, não deve, ao nosso ver, estar sujeita a uma "vigilância epistemológica" (MOREIRA; DAVID, 2010) da Matemática Acadêmica. Pelo contrário, a Matemática Escolar deve ter autonomia para se desenvolver de modo a cumprir seus propósitos. As justificativas 2, 3 e 4 que trouxemos indicam, justamente, esse caminho. Essas justificativas não se submetem a uma explicação via justificativa 1, pois elas ganham vida própria para o ensino da regra da multiplicação entre inteiros negativos.

O que significa, então, *saber mais matemática* para poder ensinar? No caso da regra de multiplicação de números inteiros negativos, consideramos que seja relevante ao professor conhecer e dominar as nuances de cada uma dessas justificativas 2, 3 e 4 (e outras justificativas acessíveis para os estudantes). Que tipo de equívocos os estudantes podem ter ao aprender uma ou outra justificativa? Que limitações essas justificativas podem causar na continuidade da aprendizagem da matemática dos estudantes? Em que ano do Ensino Fundamental uma justificativa é mais válida do que outra? E no Ensino Médio?

Concordamos com Lins quando afirma que o professor precisa saber *mais* matemática, mas que esse *mais* não significa conteúdo e, sim, uma maior *lucidez* sobre a matemática e isso inclui compreender que produzimos significados diferentes para o que *parece ser* a mesma coisa, mesmo dentro da matemática do matemático (LINS, 2005). A *lucidez* sobre a matemática, sugerida por Lins, indica-nos um caminho para se pensar a formação matemática do professor: oportunizar ao futuro professor condições de se preparar para o centro de sua atividade profissional, que é "ler os alunos e tomar decisões sobre o que está acontecendo e como seguir" (LINS, 2005, p. 120).

Nessa perspectiva, retomamos as indagações iniciais, feitas na introdução, e afirmamos que, para nós, quem delimita o que significa *saber mais matemática* é a própria prática docente e os saberes que ela exige do professor para exercer seu trabalho de ensinar matemática. Dessa maneira, os saberes trabalhados no processo de formação matemática do professor na Licenciatura em Matemática devem estar conectados aos "saberes *efetivamente* mobilizados no exercício profissional docente na escola básica" (MOREIRA; DAVID, 2003, p. 59, grifo nosso). Se não colocarmos a prática docente como o parâmetro para definir que matemática se deve trabalhar na formação inicial do professor, ficamos reféns de discursos que não se efetivam na prática, que valorizam a matemática por si e não a matemática para o/no ensino. Sem a prática docente como parâmetro, aquela definição complexa de derivada poderia muito bem estar presente em ementas de disciplinas de conteúdo matemático na Licenciatura em Matemática, já que alguém poderia dizer que aquela definição é necessária para *saber mais matemática* do que vai ensinar.

Considerações finais

Neste artigo, buscamos problematizar um discurso que, como vimos, é recorrente, inclusive na Educação Matemática, de que é preciso *saber mais matemática* para ensinar, porém, sem delimitar o que seria esse *mais*. Tal discurso tem servido de fundamento para a manutenção da Matemática Acadêmica em cursos de Licenciatura em Matemática.

O caso dos números inteiros foi usado como exemplo para fundamentar nossos argumentos. Por questão de espaço, não trouxemos outros casos que poderiam, certamente, servir de exemplo para as diferenças entre a Matemática Escolar e a Matemática Acadêmica e que aprofundaria o debate. Poderíamos trazer o caso apresentado em Elias (2017), que apresenta diferentes formas de se justificar o fato de que $0{,}9999\ldots = 1$, exemplo tomado por Marcelo Viana para justificar o estudo de "tópicos elementares de um ponto de vista avançado", no sentido de Felix Klein. Há diferentes formas de se justificar a igualdade $0{,}9999\ldots = 1$ que são acessíveis aos estudantes da Educação Básica, sem entrar na discussão de séries infinitas. Entretanto, caso estudos e pesquisas sobre a prática docente no âmbito da Educação Matemática evidenciarem que trabalhar noções de séries infinitas seja *efetivamente* relevante ao trabalho docente de ler seus estudantes (isto é, compreender os diferentes significados que estão sendo produzidos no interior de uma atividade) e lançar mão desse conhecimento para explicar a eles que 0,9999 ... = 1, então essas noções passam a compor o conjunto de saberes associados ao exercício da profissão docente (MOREIRA; DAVID, 2010) e, dessa forma, passam a integrar o que estamos entendendo por Matemática Escolar. Cabe à Educação Matemática, enquanto uma área do conhecimento, esse papel de investigar a prática docente com vistas a reconhecer o que deve ser incluído nesse conjunto de saberes chamado Matemática Escolar.

Finalizamos este artigo apontando que matemática vislumbramos para compor os cursos de formação inicial de professores. Tal como apresentamos em Elias (2018), a matemática a ser trabalhada na Licenciatura deve ter como ponto de partida e de chegada a Matemática Escolar. Enquanto ponto de partida, a Matemática Escolar se coloca como aquilo a ser tratado, o objeto de estudo. Enquanto ponto de chegada, a Matemática Escolar deve estar impregnada de novas reflexões do licenciando como futuro professor e não mais como ex-estudante da Educação Básica. A formação matemática do professor, nesse sentido, tem o papel de alterar qualitativamente o conhecimento do futuro professor sobre a Matemática Escolar. Não se trata, portanto, de uma alteração quantitativa, de *saber mais matemática* (em termos de quantidade de conteúdo), sem conexão com aquela a ser tratada na Educação Básica; pelo contrário, trata-se de passar por processos de questionamento, reflexão e aprofundamento aqueles saberes associados ao exercício da profissão docente.

Referências

BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education*, v. 59, n. 5, p. 389-407, Nov./Dec. 2008.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais – terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental*: Matemática. Brasília: MEC, 1998.

BRASIL. Parecer CNE/CES 1.302/2001. Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura. *Diário Oficial da União*, Brasília, 05 mar. 2002. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/CES13022.pdf>. Acesso em: 16 fevereiro 2017.

CHERVEL, A. História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa. *Teoria & Educação*, Porto Alegre, n. 2, p. 177-229, 1990.

CHEVALLARD, Y. *La Transposición Didáctica*: del saber sabio al saber enseñado. Buenos Aires: Aique, 1991.

DOMINGUES, H. H. *Fundamentos de Aritmética*. Florianópolis: UFSC, 2009.

ELIAS, H. R. *Fundamentos teórico-metodológicos para o ensino do corpo dos números racionais na formação de professores de matemática*. 2017. 325 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2017.

ELIAS, H. R. Os Números Racionais na Matemática Acadêmica: uma discussão visando à formação matemática de professores. *Bolema*, Rio Claro (SP), v. 32, n. 61, p. 439-458, ago. 2018.

FIORENTINI, D; LORENZATO, S. *Investigação em Educação Matemática*: percursos teóricos e metodológicos. Campinas: Autores Associados, 2009.

FIORENTINI, D.; OLIVEIRA, A. T. C. C. O lugar das Matemáticas na Licenciatura em Matemática: que matemáticas e práticas formativas? *Bolema*, Rio Claro, v. 27, n. 47, p. 917-938, 2013.

GLAESER, G. Epistemologia dos Números Relativos. *Boletim Gepem*, Rio de Janeiro, p. 65-104, jul./dez. 2010.

LINS, R. C. A formação pedagógica nas disciplinas de conteúdo matemático nas Licenciaturas em Matemática. *Revista de Educação*, Campinas, n. 18, p. 117-123, jun. 2005.

MARTIN, P. A. *Grupos, Corpos e Teoria de Galois*. São Paulo: Livraria da Física, 2010.

MOREIRA, P. C.; CURY, H. N.; VIANNA, C. R. Por que análise real na licenciatura? *Zetetiké*, Campinas, v. 13, n. 23, p. 11-42, jan./jun. 2005.

MOREIRA, P. C.; VIANNA, C. R. Por que Análise Real na Licenciatura? Um paralelo entre as visões de educadores matemáticos e matemáticos. *Bolema*, Rio Claro, v. 30, n. 55, p. 515-534, 2016.

MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. M. S. Matemática escolar, matemática científica, saber docente e formação de professores. *Zetetiké*, Campinas, v. 11, n. 19, p. 57-80, jan./jun. 2003.

MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. M. S. Números Racionais: conhecimentos da formação inicial e prática docente na escola básica. *Bolema*, Rio Claro, SP, v. 21, p. 1-19, 2004.

MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. M. S. O conhecimento matemático do professor: formação e prática docente na escola básica. *Revista Brasileira de Educação*, Rio de Janeiro, n. 28, p. 50-61, jan./abr. 2005.

MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. M. S. *A formação matemática do professor*: Licenciatura e prática docente. Belo Horizonte: Autêntica, 2010.

MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. M. S. Matemática Acadêmica e Matemática Escolar: dissonâncias e conflitos. In: LOPES, E. M. T.; PEREIRA, M. R. (Org.). *Conhecimento e inclusão social*: 40 anos de pesquisa em Educação. Belo Horizonte: UFMG, 2011. p. 193-222.

PONTES, M. O. *Obstáculos superados pelos matemáticos no passado e vivenciados pelos alunos na atualidade: a polêmica multiplicação de números inteiros*. 2010. 157 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2010.

ROQUE, T. *História da matemática*: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SHULMAN, L. S. Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, v. 15, n. 2, p. 4-14, Feb. 1986.

TALL, D. The psychology of advanced mathematical thinking. In: TALL, D. (Ed.), *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht: Kluwer, 1991. p. 3-21.

VIANA, M. Formação é calcanhar de Aquiles dos professores de matemática do Brasil. *Folha de São Paulo*, 22 set. 2017. Disponível em: http://www1.folha.uol.com.br/colunas/marceloviana/2017/09/1920520-formacao-e-calcanhar-de-aquiles-dos-professores-de-matematica-do-brasil.shtml. Acesso em 3 de outubro de 2017.

VIOLA DOS SANTOS, J. R. *Legitimidades possíveis para a formação matemática de professores de matemática*. 2012. 355 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2012.

VIOLA DOS SANTOS, J. R.; LINS, R. C. Movimentos de Teorizações em Educação Matemática. *Bolema*, Rio Claro (SP), v. 30, n. 55, p. 325 - 367, ago. 2016.

VIOLA DOS SANTOS, J. R.; LINS, R. C. Uma Discussão a Respeito da(s) Matemática(s) na Formação Inicial de Professores de Matemática. *Educação Matemática e Pesquisa*, São Paulo, v. 18, n. 1, p. 351-372, 2016.

Submetido em Outubro de 2017

Aprovado em Novembro de 2018