



Function Studium: concepção, desenvolvimento e validação de um software para abordar funções em uma perspectiva covariacional

Function Studium: design, development and validation of a software program to address functions in a covariational perspective

César Thiago J. Silva¹

Verônica Gitirana²

Franck Bellemain³

Ricardo Tibúrcio dos Santos⁴

RESUMO

Esta pesquisa insere-se na problemática da concepção e desenvolvimento de softwares educativos de Matemática, com o objetivo de conceber e validar um software para abordar o conceito de função em uma perspectiva covariacional. Tal processo fundamentou-se no quadro teórico-metodológico da Engenharia Didático-Informática, que alia aspectos da Didática da Matemática a aspectos computacionais. O software denominado *Function Studium* foi testado com uma dupla de licenciandos em Matemática, que resolveram duas atividades sobre a taxa de variação das funções afim e quadrática. Os resultados mostram como características e ferramentas específicas do software deram suporte ao desenvolvimento do raciocínio covariacional dos estudantes, auxiliando-os na inferência de padrões de variação das funções e de aspectos da passagem da taxa de variação média para a instantânea. Tais resultados permitiram validar o *Function Studium* como uma ferramenta de suporte ao raciocínio covariacional. Destacaram-se, ainda, a importância das fases do desenvolvimento do software e necessidades de melhorias para versões futuras.

PALAVRAS-CHAVE: Engenharia de Softwares Educativos. Engenharia Didático-Informática. Funções. Taxa de variação. Raciocínio Covariacional.

ABSTRACT

This research is part of the problematic of the design and development of educational software for Mathematics and aimed to design and validate a software to exploit mathematics functions in a covariational perspective, emphasizing the rate of change. This process was based on Didactic-Informatic Engineering theoretical framework, which seeks to combine aspects of teaching and learning of Mathematics to the computational aspects. The software called *Function Studium* was tested with a pair of mathematics preservice teachers who solved two

¹ Universidade Federal de Pernambuco – UFPE, cesarthiago.silva@gmail.com

² Universidade Federal de Pernambuco – UFPE, veronica.gitirana@gmail.com

³ Universidade Federal de Pernambuco – UFPE, f.bellemain@gmail.com

⁴ Universidade Federal de Pernambuco – UFPE, rico.tiburcio@gmail.com

activities about the rate of change of the linear and quadratic functions. The results showed how the characteristics and tools of the software supported students' covariational reasoning, such as the support to infer variation patterns and the behavior of the rate of change in the addressed functions, as well as aspects of the transition from the average rate of change to the instantaneous rate of change. These results allowed us to validate the *Function Studium* as a tool to support covariational reasoning. The importance of the phases of software development and improvement needs for future versions were also highlighted.

KEYWORDS: Educational Software Engineering. Didactic-Informatic Engineering. Functions. Rate of change. Covariational Reasoning.

Introdução

A utilização de softwares educativos no Ensino da Matemática pode oferecer um rico suporte ao ensino e aprendizagem da área, o que torna este tema um objeto de investigação crescente. A concepção e o desenvolvimento desses artefatos têm como um grande desafio atender adequadamente demandas computacionais e educativas, buscando articular especificidades do ensino e da aprendizagem dos conceitos aos aspectos informáticos.

Diante dessa problemática, mostrou-se cada vez mais necessária a sistematização do processo de concepção e desenvolvimento dos softwares educativos, para poder explorar melhor as potencialidades e ultrapassar os limites do mundo computacional e considerar as questões educativas.

Os primeiros passos para a explicitação e formalização de uma engenharia de software educativo (ESE) foram dados em trabalhos como os de Bellemain (1992) e Galvis (1992), caracterizando a ESE como uma engenharia que estuda “[...] as questões relativas ao design e à implementação de softwares educativos. Ela enfoca noções, métodos, teorias, técnicas, tecnologias ou lições aprendidas que podem facilitar o design, a implementação, a avaliação e a difusão de CBPS’s, softwares educativos e softwares de suporte a ambientes pedagógicos” (TCHOUNIKINE, 2011, p.113 apud BELLEMAIN et al, 2015, p.2 – tradução dos autores).

Mais recentemente, emergiu um quadro teórico-metodológico para fundamentar as atividades e fases da concepção e desenvolvimento de softwares educativos de matemática: a Engenharia Didático-Informática (BELLEMAIN et al, 2015; BELLEMAIN e TIBÚRCIO, 2017; RAMOS, 2014, TIBÚRCIO, 2016). A Engenharia Didático-Informática baseia-se nas contribuições da Engenharia Didática (ARTIGUE, 1996) à Engenharia de Softwares, de forma a articular às fases e técnicas utilizadas no desenvolvimento desses artefatos, os princípios e métodos utilizados no quadro teórico-metodológico da Didática da Matemática descrito por Artigue (1996), buscando aliar aspectos didáticos e informáticos no desenvolvimento dos

softwares.

Dessa forma, a pesquisa relatada neste artigo aborda o caso de aplicação de um modelo de processo de software baseado na Engenharia Didático-Informática para conceber e desenvolver um software que tem por objetivo abordar funções por uma perspectiva covariacional, ou seja, enfatizando a variação de uma variável em função da variação da outra, e, para isso, foca o conceito de taxa de variação. O software, denominado *Function Studium*, foi testado e validado na aplicação de duas atividades sobre a taxa de variação das funções afim e quadrática com uma dupla de licenciandos em Matemática.

Nas seções seguintes, abordam-se a fundamentação no quadro teórico-metodológico da Engenharia Didático-Informática e o Modelo de Processo de Software adotado. Posteriormente, fundamenta-se a abordagem de função e do conceito de taxa de variação na perspectiva do raciocínio covariacional (CARLSON et al, 2002) e, em seguida, é descrita a aplicação do modelo baseado na Engenharia Didático-Informática no processo de concepção, desenvolvimento e validação do *Function Studium*, incluindo os resultados de uma experimentação com os estudantes.

Um modelo de processo desenvolvimento de softwares educativos com base na Engenharia Didático-Informática

A Engenharia Didático-Informática (BELLEMAIN et al, 2015; BELLEMAIN e TIBÚRCIO, 2017) caracteriza-se como uma metodologia que busca fundamentar as atividades e as fases do desenvolvimento de softwares educativos para a Educação Matemática, de forma a aliar à Engenharia de Software as especificidades do ensino e aprendizagem dos conceitos matemáticos.

A Engenharia de Software, de forma geral, provê fases para a concepção e desenvolvimento de softwares, que segundo Sommerville (2003) são sistematizadas em um modelo geral de processo de software, conforme as seguintes etapas:

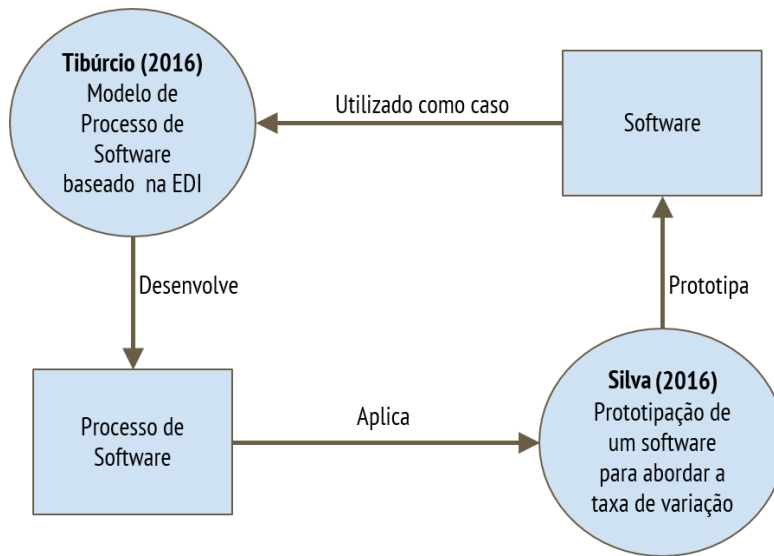
- i) Especificação: definem-se as funcionalidades do software e as restrições de sua operação;
- ii) Desenvolvimento: fase em que o software é desenvolvido;
- iii) Validação: é analisado se o software atende aos objetivos pré-estabelecidos;
- iv) Evolução: consideram-se novas necessidades geradas para o software.

No contexto da Engenharia Didático-Informática, esse modelo é articulado aos princípios e métodos da Engenharia Didática (ARTIGUE, 1996), para gerar um modelo de processo de software que alie e integre ambos os quadros metodológicos. A realização de uma Engenharia Didática leva em conta as dimensões epistemológica, didática e cognitiva dos conceitos delimitados na investigação e constitui-se das seguintes fases:

- i) Análises Preliminares: situa-se o objeto de estudo no contexto das pesquisas já realizadas e em relação aos aspectos epistemológicos, didáticos e cognitivos;
- ii) Concepção e análise *a priori*: fase na qual a sequência didática é concebida e analisada no sentido das possibilidades de respostas e comportamentos esperados dos estudantes;
- iii) Experimentação: a sequência didática é experimentada com os estudantes;
- iv) Análise *a posteriori* e validação: fase na qual os dados da experimentação são confrontados com a Análise *a priori* para a validação da sequência.

O Modelo de Processo de Software baseado na Engenharia Didático-Informática foi concebido e desenvolvido na pesquisa de Tibúrcio (2016), no âmbito do grupo LEMATEC (Laboratório de Ensino da Matemática e Tecnologias) da Universidade Federal de Pernambuco, onde integrou-se de forma colaborativa à pesquisa de Silva (2016), que teve por objetivo aplicar o modelo desenvolvido para prototipar um software para abordar funções com ênfase no conceito de taxa de variação: o *Function Studium*.

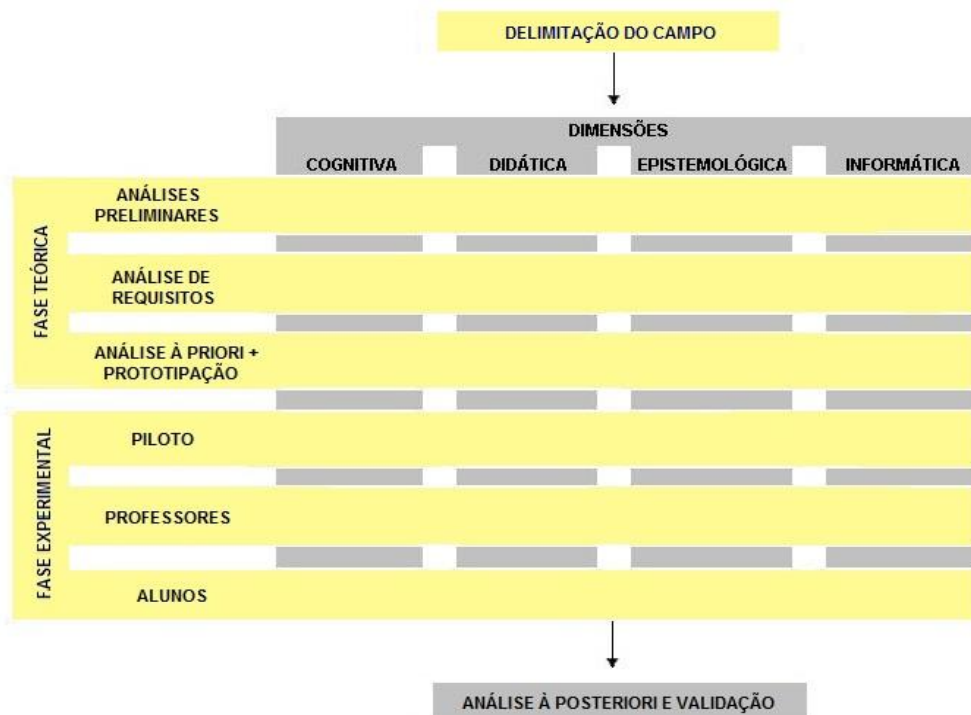
Figura 1: Articulação entre as pesquisas de Tibúrcio (2016) e Silva (2016)



Fonte: Silva (2016, p.19)

O Modelo desenvolvido em Tibúrcio (2016) constitui-se de fases cujas atividades e processos são permeados pelas dimensões cognitiva, didática e epistemológica, provenientes da Engenharia Didática, adicionadas da dimensão informática, que se articula a elas.

Figura 2: Modelo de Processo de Software baseado na Engenharia Didático-Informática



Fonte: Tibúrcio (2016, p.53)

As fases exibidas na figura 2 são descritas a seguir:

- i. Delimitação do campo: Tal delimitação define o campo de conceitos matemáticos a ser abordado pelo software.
- ii. Análises preliminares: Nesta fase o objeto matemático a ser abordado pelo software é situado no contexto das pesquisas já realizadas, abordando-se os aspectos cognitivos, didáticos, epistemológicos e informáticos relacionados ao objeto. Os resultados desta análise fundamentam as principais necessidades do software.
- iii. Análise de requisitos: Esta etapa tem por objetivo “traduzir” as necessidades geradas na fase anterior em ferramentas e características do software, ou seja, os requisitos do sistema são definidos com base nos resultados das análises preliminares.
- iv. Análise *a priori* e prototipação: Nesta fase se dão o desenvolvimento do protótipo e a análise *a priori*, ou seja, uma análise das situações de uso e dos possíveis problemas que possam decorrer da utilização do software, a fim de corrigi-los.
- v. Fase experimental (teste piloto, com professores, com alunos): Após o desenvolvimento do protótipo, se dá a fase experimental, na qual ocorrem os testes do software com os sujeitos destinados ao seu uso, como professores e/ou estudantes, antecidos por um teste piloto que pode gerar necessidades de ajustes.
- vi. Análise *a posteriori* e validação: Esta fase tem por objetivo analisar, com base nos testes do software e em comparação com a análise *a priori*, se os objetivos estabelecidos para o software foram alcançados, resultando na validação do software.

O caso de aplicação do Modelo de Processo de Software (TIBÚRCIO, 2016), foi abordado na pesquisa de Silva (2016). Esse caso é descrito a partir da seção seguinte, iniciando por uma apresentação do conceito matemático sob a perspectiva do raciocínio covariacional, conforme o quadro teórico de Carlson et al (2002).

A taxa de variação das funções e o desenvolvimento do raciocínio covariacional

A Covariação é uma das abordagens propostas para se trabalhar funções, cuja ênfase está na relação entre as variáveis, em como uma varia em função da variação da outra. Essa abordagem, segundo Confrey e Smith (1994), torna central o conceito de taxa de variação e lhe confere maior visibilidade em relação a uma abordagem de correspondência entre valores, cujo

foco é associar a um valor do domínio da função o seu correspondente na imagem.

A taxa de variação relaciona a variação entre duas variáveis em uma função. É um conceito que tem importância tanto na Matemática como nas diversas Ciências, por isso, é abordado do Ensino Médio ao Superior. A taxa de variação média de uma função f , de x_1 a x_2 do seu domínio, é expressa algebricamente como o quociente entre a diferença dos valores $f(x_2)$ e $f(x_1)$ pela diferença entre os dois valores a eles correspondentes, x_2 e x_1 :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Já a taxa de variação instantânea é obtida pelo limite da taxa de variação média quando Δx tende a zero, conforme a expressão:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Em uma abordagem variacional de função, a taxa de variação ganha importância por relacionar a variação entre as variáveis, e não apenas determinar valores que associam pontualmente uma variável à outra. Isso é essencial para o desenvolvimento do raciocínio covariacional, que é definido por Carlson et al (2002) como as “atividades cognitivas envolvidas na coordenação de duas quantidades variáveis enquanto se observam as formas como elas mudam uma em relação à outra.” (CARLSON et al, 2002, p. 354, tradução nossa).

Tais autores desenvolveram um quadro teórico de ações e níveis mentais na abordagem de situações dinâmicas de funções, que associam a cada ação mental comportamentos esperados com relação à compreensão da variação conjunta das variáveis e da taxa de variação que as relaciona.

O quadro 1 descreve os níveis mentais de raciocínio covariacional (CARLSON et al, 2002) e os comportamentos envolvidos em cada nível. Conforme o raciocínio covariacional dos estudantes é desenvolvido, avança-se a um nível posterior.

Quadro 1 - Níveis de raciocínio covariacional

Nível	Ações mentais suportadas
1 Coordenação	As imagens de covariação podem suportar a ação mental de coordenar a mudança de uma

	variável com a mudança em outra variável.
2 Direção	As imagens de covariação podem suportar as ações mentais de coordenação da direção de mudança de uma variável com a mudança em outra variável.
3 Coordenação quantitativa	As imagens de covariação podem suportar as ações mentais de coordenar a quantidade de mudança em uma variável com a mudança em outra variável.
4 Taxa média	As imagens de covariação podem suportar as ações mentais de coordenar a taxa média de variação da função com mudanças uniformes na variável de entrada. A taxa média de variação pode ser decomposta para coordenar a quantidade de mudança da variável de saída com mudanças na variável de entrada.
5 Taxa instantânea	As imagens de covariação podem suportar as ações mentais de coordenar a taxa instantânea de variação da função com mudanças contínuas na variável de entrada. Este nível inclui uma consciência de que a taxa instantânea de variação resulta de cada vez menores refinamentos da taxa de variação média. Também inclui consciência de que os pontos de inflexão estão localizados onde a taxa de variação muda de crescente para decrescente, e vice-versa.

Fonte: Adaptado de Carlson et al (2002, p. 358)

O trabalho de Carlson e colegas revelou dificuldades em raciocinar covariacionalmente até mesmo por estudantes de bom desempenho em Matemática, que mostraram dificuldades em interpretar a taxa de variação graficamente e em relacionar elementos do gráfico como pontos de inflexão e concavidades sob uma ótica covariacional. Além disso, a passagem de um nível de raciocínio 4 (taxa média) para o nível 5 (taxa instantânea) foi apontado como particularmente problemático para os estudantes.

O quadro teórico de Carlson et al (2002) foi tomado como um quadro de referência na concepção do software, a fim de que tal processo fosse orientado por uma proposta covariacional, e também para fundamentar a análise da contribuição do software no entendimento acerca da taxa de variação, em como o seu uso influenciou o raciocínio covariacional dos estudantes. Nesse sentido, Carlson et al (2002) apontam para a potencial que as tecnologias computacionais têm para oferecer suporte ao raciocínio dos estudantes:

Devidamente fundamentada e juntamente com formação suficiente de professores, estas tecnologias oferecem ferramentas valiosas para estudantes na aprendizagem, para aplicar o raciocínio covariacional para analisar e interpretar situações dinâmicas de funções. (CARLSON et al, 2002, p. 374, tradução nossa)

Na seção seguinte, são descritas as fases do desenvolvimento do software *Function Studium*.

Processo de desenvolvimento do software *Function Studium*

Nesta seção são descritas as fases do desenvolvimento do software, de acordo com o Modelo de Processo de Software adotado. Para fins de melhor compreensão das interações dos pesquisadores na colaboração entre as duas pesquisas, os envolvidos foram identificados no texto da seguinte forma:

- a) Pesquisador do estudo - usuário: o pesquisador do estudo de Silva (2016);
- b) Orientadora do estudo: a orientadora do estudo de Silva (2016);
- c) Engenheiro-Programador: o orientador do estudo de Tibúrcio (2016) e programador do software. O termo “engenheiro” é uma referência à Engenharia Didático-Informática;
- d) Engenheiro-Pesquisador: o pesquisador do estudo de Tibúrcio (2016).

i) Delimitação do campo

Nesta fase foi delimitado o campo de conceitos matemáticos a ser abordado pelo software, estabelecendo-se a taxa de variação como conceito principal, abordada sob uma perspectiva covariacional no contexto das funções reais. Restringiu-se a abordagem às funções polinomiais e aquelas obtidas por meio de operações básicas com tais funções (adição, subtração, produto, quociente, composição).

ii) Análises preliminares

As análises preliminares foram realizadas por meio de uma revisão de literatura sobre o conceito de taxa de variação das funções, enfatizando o contexto variacional e o desenvolvimento do raciocínio covariacional. Os resultados dessas análises em cada uma das dimensões da Engenharia Didático-Informática, estabeleceram os aspectos didáticos, epistemológicos, cognitivos e informáticos fundamentais para levantar os requisitos do software, o que forneceu uma base para a fase seguinte do processo, a Análise de Requisitos. Uma breve síntese dos resultados da fase de “Análises Preliminares” é apresentada a seguir.

a) Dimensão epistemológica

Na dimensão epistemológica, analisou-se o conceito de taxa de variação com base em análises em livros didáticos do Ensino Médio e Superior, além de uma abordagem da taxa de variação aplicada às funções afim e quadrática em Lima et al (2005), na qual os autores caracterizam tais funções em uma perspectiva variacional. Como exemplo, a função afim é caracterizada como uma função na qual “acréscimos iguais de x correspondem a acréscimos iguais de $f(x)$ ” (LIMA et al, 2005, p.100), ou seja, possui taxa de variação constante. Tais análises, mostraram a importância de aspectos como a passagem da taxa média para a taxa instantânea de variação, além da importância da articulação com os conceitos de retas secantes e tangentes na contextualização geométrica e das relações entre a taxa de variação e os aspectos do gráfico da função, como pontos de inflexão e concavidade.

b) Dimensão cognitiva

Na dimensão cognitiva, foram elencados os aspectos envolvidos na aprendizagem do conceito de taxa de variação, com ênfase nas dificuldades dos estudantes. Foi realizada uma revisão de literatura cujos resultados apontaram dificuldades dos estudantes com aspectos da taxa de variação, como: (a) a interpretação da taxa de variação no gráfico da função e sua relação com aspectos do gráfico como pontos de inflexão e concavidades (CARLSON et al, 2002), (b) a compreensão do significado da taxa de variação negativa (SILVEIRA, 2001) e (c) a compreensão da passagem da taxa média para a taxa instantânea (CARLSON et al, 2002; VILLA-OCHOA, 2011), que está relacionada diretamente à noção de limite e à coordenação conjunta da variação das variáveis da função. Um exemplo de necessidade do software originada a partir desta análise foi a da dinamização da passagem da taxa de variação média para a taxa de variação instantânea, por meio da coordenação de dois valores que mudam simultaneamente, um se aproximando de um valor limite enquanto o outro se aproxima de um valor dado, o que é possibilitado pela característica dinâmica dos ambientes computacionais. Tais aspectos de dificuldades dos estudantes forneceram uma importante base para a fase de Análise de Requisitos.

c) Dimensão didática

Na dimensão didática, foram investigados aspectos do ensino do conceito da taxa de variação das funções, com base em uma análise em livros didáticos do Ensino Médio e Superior, documentos e orientações curriculares nacionais e pesquisas sobre o ensino da taxa de variação com ênfase no uso das tecnologias computacionais (CASTRO FILHO, 2001; VILLA-OCHOA, 2011; SILVA, 2009). A análise de livros didáticos mostrou que, no Ensino Médio, a abordagem do conceito de taxa de variação é restrita a famílias específicas de funções e que, além disso, é abordado em representações específicas, resultando em uma abordagem isolada e limitada. Já nos livros do Ensino Superior, o conceito é apresentado ligado a contextos como o da velocidade ou da reta tangente, além de ser visto como uma interpretação da derivada, apesar da importância de abordá-lo já na introdução às funções.

As análises Preliminares sobre a dimensão didática, permitiram estabelecer uma breve visão sobre alguns aspectos do ensino da taxa de variação das funções, reforçando a necessidade de uma abordagem dinâmica, apoiada em diferentes representações de função e articulada com o contexto geométrico.

d) Dimensão informática

A dimensão informática levou em conta os aspectos computacionais envolvidos na representação de função em uma perspectiva covariacional. Assim, a fundamentação desta dimensão foi apoiada em uma sistematização proposta por Kaput (1992), que trata das possibilidades dos ambientes computacionais para o ensino de funções e dos conceitos relacionados, como a taxa de variação. Foram destacados os seguintes aspectos:

- **Dinamismo:** o autor aponta a mídia dinâmica computacional como a “casa natural das variáveis”, cuja representação da variação é natural, o que torna esse aspecto fundamental para um software que aborda o conceito de taxa de variação.
- **Ação sobre notações:** esta possibilidade permite, por exemplo, manipular as variáveis no gráfico de uma função, o que vai além da mera exibição na tela e possibilita explorar a covariação entre as variáveis diretamente no gráfico.
- **Sobreposição de sistemas de notações:** este aspecto representa a possibilidade de sobrepor notações, o que permite enriquecer as informações e os elementos auxiliares no gráfico, para auxiliar na interpretação do comportamento variacional da função.

- Conexão dinâmica e simultânea das ações sobre notações: este aspecto permite que ações em uma notação sejam simultaneamente refletidas em outra. Como exemplo, ao variar um dos coeficientes da função, o gráfico é alterado de forma simultânea.
- Suportes à cognição nas conversões entre notações: em tais conversões, como na articulação do modelo algébrico com o gráfico em algumas funções, há um grande esforço cognitivo para coordenar a variação. Nesse caso, ferramentas de “memorização de valores” ou “histórico de ações” são alguns exemplos de suportes.

Esses aspectos foram um importante direcionamento para o estabelecimento dos requisitos do software. No entanto, foram analisados resultados de outras pesquisas sobre a abordagem da taxa de variação por tecnologias computacionais, dentre as quais destacaram-se os trabalhos de Silva (2009), Gomes-Ferreira (1997), Villa-Ochoa (2011) e Castro Filho (2001), que apontaram entre outros resultados, que as características multi-representacionais e dinâmicas dos ambientes computacionais contribuíram para a abordagem de funções e do conceito de taxa de variação.

iii) Análise de requisitos

A análise de requisitos teve por objetivo estabelecer as características e funcionalidades do software, com base nos resultados das análises preliminares articulados aos aspectos covariacionais e aos aspectos sistematizados por Kaput (1992). Realizaram-se interações presenciais e *on-line* entre os pesquisadores, com o objetivo de explicitar os requisitos do software aos engenheiros pesquisador e programador, por meio de questionários e entrevistas realizadas por eles. Assim, com base nos resultados das análises preliminares e nos questionamentos levantados pelos engenheiros, foram definidos os seguintes requisitos fundamentais:

- Perspectiva covariacional: as ferramentas deveriam fornecer suporte à coordenação e análise da variação conjunta das variáveis;
- Dinamismo: deveria ser concebido um ambiente dinâmico, contribuindo para manipulação das variáveis da função.

- Interatividade: a noção de interação é no sentido da resposta do software às ações dos estudantes (KAPUT, 1992), contribuindo para a construção do seu conhecimento.
- Conexão dinâmica e simultânea de múltiplas representações/notações de função: tal conexão deveria permitir não só uma abordagem multirepresentacional das funções, mas também a conexão simultânea das ações entre uma notação e outra.
- Ferramentas de suporte ao raciocínio dos estudantes: tais ferramentas dariam suporte à coordenação e análise da variação dinâmica das variáveis da função.

Outras interações deram conta do aprofundamento de questões relacionadas aos requisitos, como observa-se no quadro 2 uma discussão sobre a interface do software:

Quadro 2 - Discussão sobre questões da interface

Engenheiro-Pesquisador: As múltiplas representações fazem referência aos possíveis registros de representação do conceito de função (algébrica, tabular, gráfica, etc). Como o cliente pretende viabilizar a visualização múltipla desses registros?

Sugestão do Engenheiro-Programador: A divisão da tela em partes, ou janelas que possam ser minimizadas (com o recurso de selecionar múltiplas, ou apenas uma) é uma opção para a representação de vários objetos ao mesmo tempo.

Pesquisador do estudo - usuário: Além da possibilidade da divisão da tela e de selecionar uma ou mais representações para possibilitar o trabalho com as principais representações, é pretendido contemplar um dos aspectos levantados por Kaput (1992), a sobreposição de notações/representações, quando esta for possível. A sobreposição de notações visa possibilitar por exemplo sobrepor dados numéricos ao gráfico ou objetos da geometria dinâmica como uma reta secante para representar a taxa média de variação entre dois pontos (...)

Fonte: Silva (2016, p.76)

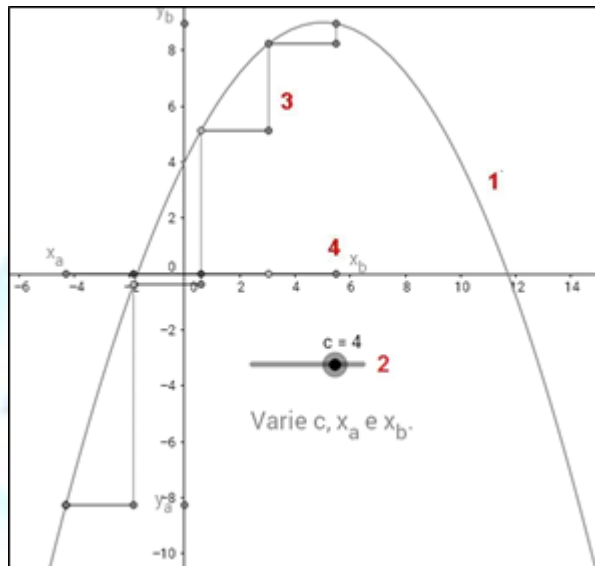
Concebeu-se ainda um quadro de requisitos específicos, onde foram detalhadas ao engenheiro-programador as sugestões de ferramentas e características desejáveis para o software. Como exemplos, podem ser citadas: (i) a requisição de uma ferramenta para calcular a taxa de variação média em intervalos sucessivos no gráfico da função e (ii) uma ferramenta para traçar retas tangentes e secantes ao gráfico da função, de forma a articular a taxa de variação ao contexto geométrico.

iv) Análise *a priori* e prototipação

Nesta fase se deram o desenvolvimento do protótipo e a análise das situações de uso e atividades possíveis com o software, a análise *a priori*. Foram utilizados dois recursos pelo pesquisador-usuário, para traçar esboços iniciais das ferramentas requisitadas e comunicar de

forma mais detalhada alguns requisitos: (i) simulações das ferramentas utilizando o software GeoGebra (HOHENWARTER, 2015) como mostra a figura 3, e (ii) simulações da tela do software utilizando um software de apresentação de *slides*.

Figura 3 - Simulação de uma ferramenta requisitada para o software utilizando o GeoGebra



Fonte: (SILVA, 2016, p. 81)

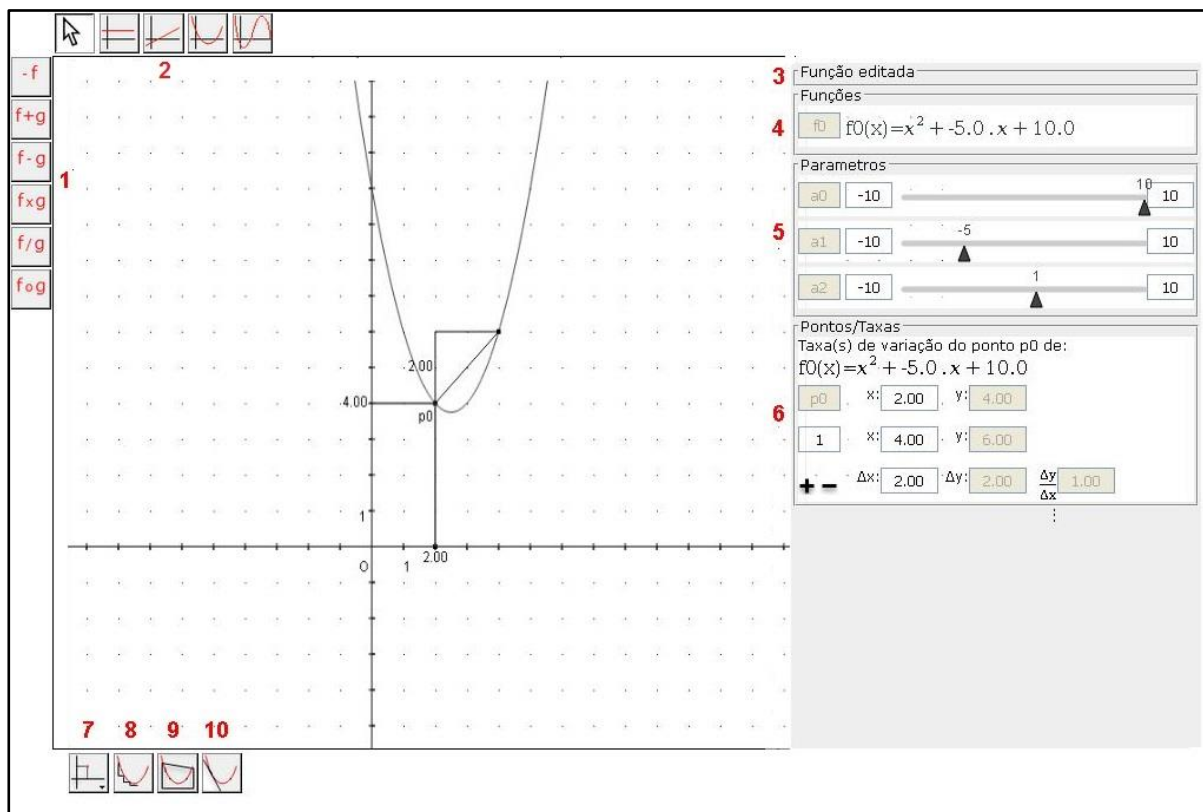
Na figura 3, o objeto indicado com o número 1 representa o gráfico de uma função quadrática, já o indicado com o número 2 representa uma ferramenta para variar o número de partições no intervalo $[x_a, x_b]$. O objeto apontado em 3 ilustra uma simulação da ferramenta taxa de variação média, que é representada em cada partição do intervalo entre x_a e x_b . A área indicada pelo número 4 representa a simulação da variação do intervalo $[x_a, x_b]$ no próprio eixo de coordenadas.

Em seguida, foi desenvolvida uma primeira versão do software pelo engenheiro-programador, sobre a qual foi realizada uma análise pelo pesquisador do estudo - usuário, a fim de explorar as principais situações de uso do software, como traçar o gráfico de uma função ou calcular a taxa de variação em um intervalo. A partir da análise da adequação do uso das ferramentas aos requisitos estabelecidos, foi fornecido um *feedback* sobre a contemplação das necessidades e dos ajustes necessários.

Após a análise e discussão da primeira versão, foram solucionadas as pendências e com isso, a versão do software para a fase experimental foi apresentada. Tal versão contemplou as principais necessidades requisitadas, os recursos pendentes serão implementados em versões

futuras, considerando a continuidade desse projeto no grupo LEMATEC. O *Function Studium* foi programado utilizando as linguagens HTML (HTML 5), CSS e JAVASCRIPT, sendo acessado via plataforma web. Os principais recursos do software são indicados na figura 4.

Figura 4 - Tela do software *Function Studium*



Fonte: Elaborado pelos autores

Na área indicada com o número 1, estão os recursos de operações com funções, considerando-se que se partiu de uma álgebra das funções tomadas como básicas. Na área indicada com o número 2 estão os tipos de função, que são a constante, afim, quadrática e polinomial de grau 3, sendo possível ainda obter outras funções polinomiais como resultado da operação com estas funções.

Na área indicada com o número 3, a janela “Função editada” exhibe o modelo algébrico da função que estiver sendo editada. Em 4, a janela “Funções” exhibe o modelo algébrico das funções definidas, já em 5 a janela “Parâmetros” exhibe os coeficientes das funções e permite alterá-los dinamicamente por meio de controles deslizantes. Na área 6, a janela “Pontos/Taxas” exhibe valores das variáveis, da sua variação e da taxa de variação das funções nos valores selecionados no gráfico ou digitados na janela.

Em 7 encontra-se a opção de definir um ponto no gráfico e em 8 a ferramenta “Taxa de variação”, que permite calcular a taxa de variação tanto entre dois pontos do gráfico quanto entre pontos associados a intervalos sucessivos em x . As áreas indicadas em 9 e 10 referem-se às ferramentas “Reta secante” e “Reta tangente”, nas quais é possível definir retas tangentes ou secantes ao gráfico da função nos pontos selecionados, para articular essas retas com a taxa de variação da função.

v) Fase experimental

Para o caso relatado neste artigo, a fase experimental foi realizada com uma dupla de estudantes da Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Pernambuco. Foram concebidas duas atividades sobre a taxa de variação, uma abordando a função afim e a outra abordando a função quadrática, as quais os estudantes deveriam realizar com o software *Function Studium*.

Realizou-se uma análise das atividades para, além de servir como referência para analisar as ações e respostas dos estudantes, fornecer dados para a melhoria do software. Para cada questão de cada atividade, foram descritos os objetivos de aprendizado, os benefícios esperados do uso do software e os fatores limitadores ou dificultadores do seu uso pelos estudantes, conforme é exemplificado no quadro 3.

Quadro 3 - Aprendizados e influências do uso do software esperados na questão 2.1

2.1 Escolha uma função quadrática, trace seu gráfico e varie a variável x usando a ferramenta taxa de variação no gráfico. Mantendo Δx fixo, descreva como Δy varia com a variação de x . Repita a operação para outras funções quadráticas e observe como se dá essa variação em cada caso.

Aprendizados esperados: Perceber que a variação de Δy não é constante para acréscimos iguais em Δx . Descrever como se dá o padrão da variação de Δy em função de x (para $a > 0$ e $a < 0$).

Benefícios com o uso do software: A variação dinâmica no gráfico e nos parâmetros, em conexão simultânea com a janela de pontos provê a exploração de várias funções quadráticas de forma rápida e prática, possibilitando a percepção de um padrão de variação de Δy .

Dificuldades/limitações com o uso do software: Variar x no gráfico e coordenar a variação simultânea de Δy na janela de pontos em uma única célula pode tornar trabalhosa a busca por um padrão. Um segundo gráfico em paralelo, no qual fosse possível visualizar a variação de Δy em função

de x poderia auxiliar o estudante na percepção do padrão de variação.

Fonte: Silva (2016, p. 111)

Os estudantes realizaram as atividades com o apoio de fichas em papel e um computador para acessar o software. Os instrumentos de coleta de dados foram: uma câmera filmadora para registro dos diálogos e interações entre os estudantes, um software de captura de tela para registrar as ações no software, as fichas em papel e as anotações do pesquisador, que assumiu um papel de observador.

O experimento foi organizado em uma única sessão na qual os estudantes tiveram 2 horas para realizar as duas atividades, após uma breve exposição das ferramentas do software. Posteriormente, os dados em vídeo dos diálogos dos estudantes e da tela do software foram explorados para analisar, na fase seguinte, como o software contribuiu ou limitou a atividade dos estudantes com a taxa de variação.

vi) Análise *a posteriori* e validação

A análise *a posteriori* teve como objetivo analisar os dados da “Experimentação”, no sentido de avaliar como o software contribuiu ou limitou o entendimento dos estudantes sobre a taxa de variação das funções no contexto do raciocínio covariacional, resultando na validação do software. Nessa etapa, os arquivos de vídeo do experimento foram assistidos e transcritos pelo pesquisador, articulando-se o vídeo dos diálogos entre os estudantes com o vídeo da tela do computador, que registrou as ações deles no software.

As atividades do experimento concentraram-se nos dois últimos níveis de raciocínio covariacional (Carlson et al., 2002), isto é, na coordenação da taxa de variação média e da taxa de variação instantânea, embora aspectos dos níveis iniciais estivessem naturalmente incluídos nas questões. São destacados os seguintes resultados da análise *a posteriori*:

a) A variação dinâmica da variável independente no gráfico, conectada simultaneamente à variação da variável dependente, permitiu que os estudantes coordenassem a variação da taxa de forma contínua, possibilitando inferências sobre o comportamento variacional das funções como abordado por Lima et al (2005) e sobre o comportamento da taxa de variação no gráfico (CARLSON et al, 2002) . Como exemplo, a questão 1.4 foi discutida pelos estudantes no quadro

4, no qual eles inferiram o comportamento da função afim, após variar o x no gráfico e observar, para um valor fixo de Δx , o comportamento de Δy .

Quadro 4 - Discussão dos estudantes na questão 1.4

1.4 (Use a ferramenta “taxa de variação” e em um intervalo qualquer de x faça o Δx cada vez menor no gráfico ou diretamente na janela “pontos/taxas” (por exemplo, 1; 0,5; 0,1; 0,05; 0,01; 0,001; 0,0001), observando o comportamento do valor da taxa de variação. No software, quando Δx é pequeno o suficiente, por exemplo $\Delta x = 0,0001$, é possível simular o limite da função no ponto x_0 quando x tende a x_0 .)

Ao simular o processo descrito acima, tome diferentes funções afim e varie a variável x observando o valor de $\Delta y/\Delta x$. Como esse valor varia em função de x ? O que isso sugere a respeito da taxa de variação na função afim?

Estudante 1: (...) O delta x não tá mudando né? Só o x ... (Varia o x no gráfico e observa a invariância do valor da taxa para todos os pontos alcançados)

Estudante 1: Entendesse? (Questiona se o colega teve a mesma conclusão) O valor do “delta y sobre delta x ” ... Ele não varia. Quando você faz o delta x ser sempre pequenininho e aí você vai mudando o valor de x , ele (Refere-se ao $\Delta y/\Delta x$) não vai variar.

Estudante 2: Ok...

Estudante 1: O que isso sugere a respeito da variação na função afim? (...) Hum... Ah que a variação dela é constante. (...) O que tu achas?

Estudante 2: Assim, a taxa de variação dela é constante. Sempre igual ao coeficiente angular

Fonte: Adaptado de Silva (2016), p. 125

b) A ferramenta denominada “taxa de variação”, que permite calcular a taxa em intervalos sucessivos do domínio da função, foi um recurso importante para que os estudantes pudessem coordenar a variação da taxa média e perceber padrões de variação na função quadrática (LIMA et al, 2005). O suporte à coordenação da taxa média de variação foi uma importante contribuição, visto que as análises preliminares mostraram dificuldades dos estudantes com os dois últimos níveis de raciocínio covariacional. Um exemplo dessa contribuição pode ser visto no recorte da discussão da questão 2.3 no quadro 5 e na figura 5.

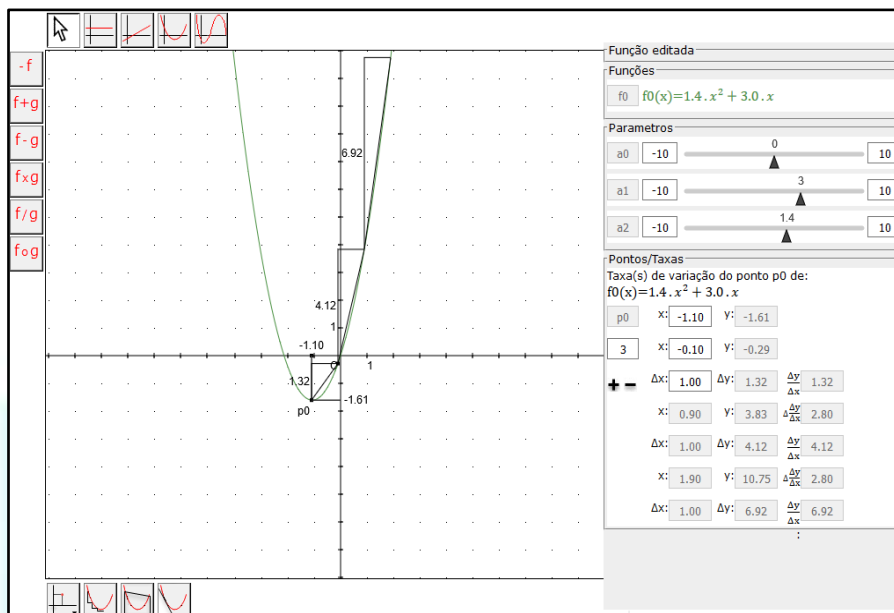
Quadro 5 - Conclusão de um estudante na questão 2.3

2.3 Ainda na simulação do item anterior, varie a variável x no gráfico e observe a variação da taxa de variação $\Delta(\Delta y/\Delta x)$ na janela “Pontos/Taxas”, como se comporta $\Delta(\Delta y/\Delta x)$ com a variação de x ? Teste outras funções quadráticas, descreva o que você percebeu e o que isso sugere em relação à variação nas funções quadráticas.

Estudante 1: Em questão da taxa de variação, quando você varia o x, a taxa de variação vai variar... Só que aí a diferença entre um “delta y dois sobre delta x dois” e o “delta y um sobre delta x um” é constante. A diferença entre as taxas de variação vai ser constante...

Fonte: Adaptado de Silva (2016, p. 131)

Figura 5 - Tela do software na resolução da questão 2.3



Fonte: Silva (2016, p.131)

c) A exploração da janela de pontos/taxas auxiliou os estudantes a coordenarem a variação da taxa de variação média (quadro 6), pois exibia em uma mesma área a variação dos valores de Δx , Δy e $\Delta y/\Delta x$ simultaneamente à variação da variável no gráfico.

Quadro 6 - Conclusões de um estudante na questão 2.1

Estudante 1: (Escolhe a função $x^2 - 2x + 2$ e usando a ferramenta taxa de variação varia o valor de x no gráfico, enquanto visualiza a variação de Δy na janela de pontos.)

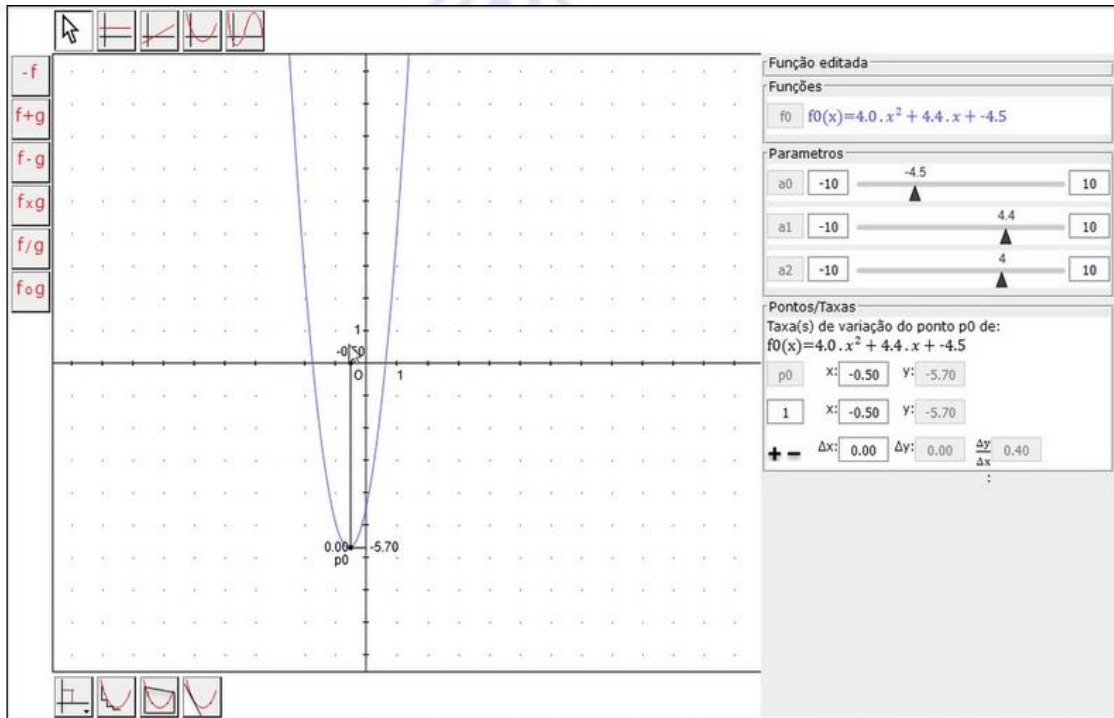
Estudante 1: Olha, tô mudando aqui o x ó, e olha só pra o delta y... O delta x é o mesmo, tá “um”, e aí o delta y vai aumentando. Consequentemente a taxa de variação né? Porque se o delta x tá sempre igual a “um” e o delta y tá aumentando, então a taxa de variação vai aumentar também. (...)

Fonte: Adaptado de Silva (2016, p. 127)

d) No que diz respeito à coordenação da taxa de variação instantânea, os estudantes puderam variar o valor de Δx na janela de pontos/taxas (figura 6), tornando-o cada vez mais próximo de 0, enquanto observavam a variação de Δy se aproximando de um valor específico.

Dessa forma, eles puderam coordenar a passagem da taxa média para a taxa instantânea, por meio de refinamentos cada vez menores de Δx , obtidos tanto na janela de pontos/taxas como diretamente no gráfico. O suporte dado pelo software à passagem da coordenação da taxa média para a taxa instantânea pode contribuir para a superação de dificuldades dos estudantes com essa passagem apontadas nas pesquisas (CARSON et al, 2002; VILLA-OCHOA, 2011).

Figura 6 - Atividade dos estudantes na coordenação da taxa de variação instantânea



Fonte: Adaptado de Silva (2016, p. 135)

e) A conexão simultânea das ações nas diferentes notações do software deu suporte aos estudantes na coordenação da variação da taxa instantânea, conforme eles variavam a variável independente no gráfico (quadro 7). Essa conexão possibilitou aos estudantes explorarem aspectos como: (i) a taxa de variação negativa, que foi apontada como de difícil interpretação pelos os estudantes (SILVEIRA, 2001), (ii) a variação da taxa em função da variável independente e (iii) elementos do gráfico como concavidade e pontos de inflexão vistos sob uma ótica variacional, ou seja, relacionando-os com o comportamento da taxa de variação, conforme defendido por Carlson et al (2002).

Quadro 7 - Discussão dos estudantes na questão 2.5

2.5 Escolha uma função quadrática e use a simulação do limite (descrito na atividade 1) para observar como a taxa de variação no ponto varia em função de x . Quando x cresce, como se comporta o valor da taxa de variação? Em que intervalo a taxa é negativa e quando ela muda para positiva, e o que isso tem a ver com o gráfico dessa função?

Estudante 1: (Escolhe a função quadrática $f(x) = 4x^2 + 4,4x - 4,5$)

Estudante 1: (Inicia a variação do x a partir do valor $x = -0,10$ e observa o valor da taxa no ponto)

Estudante 1: Aqui nesse x tá “três ponto seis” (refere-se ao valor da taxa de variação em $x = -0,10$) ... Aumentando o x ela vai aumentando, mas ele tá perguntando onde é que ela vai mudar de... (refere-se à mudança de sinal da taxa)

Estudante 2: Passa pra o lado negativo pra ver o que acontece... (refere-se ao eixo x)

Estudante 1: (Varia o x no gráfico nas duas direções) Na hora que ela chega em zero (refere-se à variável no eixo x) ainda assim é positivo (refere-se à taxa de variação), perto de zero... em zero ela é positiva. Só que depende do gráfico...

Estudante 1: Sim, a pergunta é: em que intervalo a taxa é negativa e quando ela muda pra positiva.

Estudante 2: Ela muda no.... Nesse cume aí né?

Estudante 1: No vértice.

Estudante 2: No vértice da parábola.

Estudante 1: (Continua variando o x) Olha, ela é zero mesmo. Também pode dizer que ela é negativa de... De menos infinito...

Estudante 2: Volta, volta pra lá (pede para que o colega varie o x para valores à esquerda do “ x do vértice”) ... Isso, tá ok agora, a taxa de variação, negativa. Aí ela chega a zero quando passa no vértice e quando passa pra o positivo (refere-se a valores a direita do x do vértice) ela fica positiva. Então... a taxa de variação é negativa quando eu “tô” antes do x do vértice e ela é positiva quando tá depois do x do vértice.

Fonte: Adaptado de Silva (2016, p. 134)

Também foram apontados aspectos e recursos do software que limitaram ou dificultaram o raciocínio covariacional dos estudantes. Dentre eles (i) a *disposição das variáveis na janela de pontos/taxas* (como mostra a Figura 5), tal disposição limitou a visualização de padrões de variação (LIMA et al, 2005) (ii) a *desconexão entre as ferramentas “reta tangente” e “taxa de variação”*, que limitou a articulação entre esses dois conceitos e (iii) a ausência de algumas ferramentas requisitadas para o suporte ao raciocínio, como memória, calculadora ou variação automática, o que limitou a análise da variação.

O processo de validação do software considerou tanto os benefícios quanto as limitações e dificuldades proporcionadas pelo seu uso. Assim, os resultados da validação mostraram que os aspectos e as ferramentas do *Function Studium* ofereceram um importante suporte ao raciocínio covariacional dos estudantes, levando-os a coordenar a taxa de variação e seus

aspectos nas funções abordadas, embora seja importante discutir e implementar melhorias para minimizar as limitações que surgiram na fase experimental.

Considerações finais

Este artigo abordou o processo de concepção, desenvolvimento e validação do *Function Studium*, uma ferramenta computacional para o desenvolvimento do raciocínio covariacional (CARLSON et al, 2002). Tal percurso foi conduzido por um modelo de processo de software baseado na Engenharia Didático-Informática (BELLEMAIN et al, 2015; BELLEMAIN e TIBÚRCIO, 2017), que busca atender tanto aspectos relativos ao ensino e aprendizagem da Matemática quanto aspectos computacionais na concepção de softwares educativos.

Na fase experimental, o *Function Studium* foi utilizado por uma dupla de estudantes da Licenciatura em Matemática da UFPE, para resolver duas atividades sobre a taxa de variação das funções afim e quadrática, cujos dados serviram para analisar como os recursos do software contribuíram ou limitaram o raciocínio covariacional dos estudantes.

Entre as contribuições, as que mais se destacaram foram as ferramentas que possibilitaram a conexão dinâmica e simultânea entre as notações matemáticas e a simulação dinâmica da taxa instantânea, que permitiram a exploração de aspectos da taxa de variação apontados como importantes nas análises preliminares e revelaram um potencial para auxiliar na superação das dificuldades em interpretar a taxa de variação por uma perspectiva covariacional. Já entre as limitações, destacaram-se a disposição da janela de pontos/taxas, a desconexão das ações nas ferramentas “taxa de variação” e “reta tangente” e a ausência de alguns recursos de suporte ao raciocínio.

Confrontando-se os dados com o Quadro de Raciocínio Covariacional (CARLSON et al, 2002), foi verificado que de forma geral o software contribuiu para o raciocínio covariacional dos estudantes ao oferecer suporte na coordenação das variáveis envolvidas na taxa de variação, apesar da necessidade de melhorias e ajustes.

Considerando o caráter colaborativo da pesquisa de Silva (2016) e Tibúrcio (2016), também foi analisado como os métodos e as fases do Modelo de Processo influenciaram nos resultados obtidos, concluindo-se: (i) a importância da articulação das análises preliminares e de requisitos com a fase de prototipação, para que as necessidades levantadas fossem traduzidas em requisitos e ferramentas implementadas no software, e (ii) a necessidade de ajustar o Modelo

para contemplar a participação dos usuários finais no início da prototipação, para que o software atenda melhor às necessidades de utilização deles.

Possibilidades de futuras investigações com o *Function Studium* incluem, além da análise do seu uso para o desenvolvimento do raciocínio covariacional, a sua integração ao ensino, considerando os diversos contextos da sala de aula.

Referências

- ARTIGUE, M. Engenharia Didática. In: BRUN, J. **Didática das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. Cap 4, p. 193 -217.
- BELLEMAIN F., **Conception, réalisation et expérimentation d'un logiciel d'aide à l'enseignement de la géométrie, Cabri-géomètre**, Tese de doutorado, Université Joseph Fourier, 1992
- BELLEMAIN, F. G. R.; RAMOS C. S.; dos SANTOS, R. T. Engenharia de Softwares Educativos, o caso do Bingo dos Racionais. In: VI SIPEM - Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 2015, Pirenópolis. **Anais do VI SIPEM**. Brasília: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2015. v. 1. p. 1-12.
- BELLEMAIN, F., TIBÚRCIO, R. Processo de desenvolvimento de software educativo: análise teórica e experimental com recurso a teoria da orquestração instrumental. In: 1º Simpósio Latino-Americano de didática da Matemática, 2017, Bonito-MS. **Anais LADIMA**. Campo Grande: UFMS, 2017.
- CARLSON, M. et al. Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. **Journal for Research in Mathematics Education**, v.33, n.5, p.352-378, 2002.
- CASTRO FILHO, J. A. Novas Tecnologias e o ensino de função, taxa de variação e acumulação. In: VII Encontro Nacional de Educação Matemática - VII Enem, 2001, Rio de Janeiro. **Anais do VII Encontro Nacional de Educação Matemática**, Brasília: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2001.
- CONFREY, J.; SMITH, E. Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit. **Educational Studies in mathematics**, v. 26, n. 2-3, p. 135-164, 1994.
- GALVIS, A. H. **Ingeniería de Software Educativo**. Santafé de Bogotá: Ediciones Uniandes, 1992.
- GOMES FERREIRA, V. G. **Exploring Mathematical Functions through dynamic microworlds**. 1997. Tese de Doutorado. Institute of Education (University of London).
- HOHENWARTER, M. et al. **GeoGebra - Dynamic Mathematics for Everyone**, versão 5.0.146.0, Windows, Mac OS X e Linux. Linz: Austria, 2015. Disponível em: <<http://www.geogebra.org/>> Acesso em: 31 de agosto de 2015
- KAPUT, J. Technology and Mathematics Educacion. In: D.A. Grows (Ed.) **Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning**, Macmillan, NY, 1992, p. 515-556.

- LIMA, E. L. et al. **A Matemática do Ensino Médio**. v.1, 8 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005.
- RAMOS, C. S. **Princípios de Engenharia de Software Educativo com base na Engenharia Didática: uma Prototipação do Bingo dos Racionais**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) - Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, UFPE, Recife, 2014.
- SILVA, C.T.J. **A Caracterização da função quadrática com o auxílio de softwares**. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas e da Natureza, UFPE, Recife, 2009.
- SILVA, C.T.J. **A Engenharia Didático-Informática na prototipação de um software para abordar o conceito de taxa de variação**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) - Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, UFPE, Recife, 2016.
- SILVEIRA, E. **Uma Sequência Didática para aquisição/construção da noção de taxa de variação média de uma função**. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-graduação em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2001.
- SOMMERVILLE, I. **Engenharia de Software**. São Paulo. 6 ed. Pearson Education Companion, 2003.
- TIBÚRCIO, R.S. **Processo de desenvolvimento de software educativo: Um estudo da prototipação de um software para o ensino de função**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) - Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, UFPE, Recife, 2016.
- PORTAL DO LEMATEC. Home. Disponível em: <<http://lematec.net.br/lematecNEW/>>. Acesso em 13 de julho de 2017.
- VILLA-OCHOA, J. A. Raciocínio “covariacional”: O caso da função quadrática. In: XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática, 2011, Recife. **Anais da XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática**. Recife: Comitê Interamericano de Educação Matemática, 2011.

Submetido em Março de 2018

Aprovado em Outubro de 2019

Anexos

Atividade 1

1.1) No software, trace a função $f(x) = 0,7x - 3,8$ para responder as seguintes questões:

a) Use a ferramenta “Taxa de variação” no gráfico da função e insira os valores abaixo na janela “Pontos/Taxas” para responder: quando x varia de 0,5 a 1,5 qual a variação em y ? E quando x varia de 3,5 a 4,5? E de -2,5 a -1,5?

b) Com o valor $\Delta x = 1$, varie o valor de x no gráfico para obter diferentes valores para x e y e observe o comportamento de Δy na janela “Pontos/Taxas”. O que você percebe em relação ao comportamento de Δy ?

c) Escolha diferentes valores para Δx , insira-os na janela “Pontos/Taxas” e varie x para observar o comportamento da variação Δy para cada Δx . Como se comporta Δy nos valores do domínio da função alcançados?

1.2) Escolha outras funções afim e para cada caso teste o item (c) da questão anterior. O que você percebeu no item anterior continua válido para esses casos? O que isso sugere em relação à variação na função afim?

1.3) Mantendo o Δx fixo, varie os coeficientes da função afim e observe a variação da taxa média de variação $\Delta y/\Delta x$. Que relações você percebe entre tais coeficientes e o valor de $\Delta y/\Delta x$?

Use a ferramenta “taxa de variação” e em um intervalo qualquer de x faça o Δx cada vez menor no gráfico ou diretamente na janela “pontos/taxas” (por exemplo, 1; 0,5; 0,1; 0,05; 0,01; 0,001; 0,0001), observando o comportamento do valor da taxa de variação. No software, quando Δx é pequeno o suficiente, por exemplo $\Delta x = 0,0001$, é possível simular o limite da função no ponto x_0 quando x tende a x_0 .

1.4) Ao simular o processo descrito acima, tome diferentes funções afim e varie a variável x observando o valor de $\Delta y/\Delta x$. Como esse valor varia em função de x ? O que isso sugere a respeito da taxa de variação na função afim?

Atividade 2

2.1 Escolha uma função quadrática, trace seu gráfico e varie a variável x usando a ferramenta *taxa de variação* no gráfico. Mantendo Δx fixo, descreva como Δy varia com a variação de x . Repita a operação para outras funções quadráticas (Para isso, altere os valores dos coeficientes na janela “Parâmetros”) e observe como se dá essa variação em cada caso.

2.2 Ainda utilizando a ferramenta *taxa de variação*, aumente o número de incrementos na janela “Pontos/Taxas” para calcular a taxa média de variação entre intervalos sucessivos com Δx fixo. Ao analisar a sequência de valores de $\Delta y/\Delta x$ na janela “Pontos/Taxas” que relação você observa na sua variação $\Delta(\Delta y/\Delta x)$ e o que tal relação sugere?

2.3 Ainda na simulação do item anterior, varie a variável x no gráfico e observe a variação da taxa de variação $\Delta(\Delta y/\Delta x)$ na janela “Pontos/Taxas”, como se comporta $\Delta(\Delta y/\Delta x)$ com a variação de x ? Teste outras funções quadráticas, descreva o que você percebeu e o que isso sugere em relação à variação nas funções quadráticas.

2.4 Que influência você percebe do valor dos coeficientes da função quadrática sobre o valor de $\Delta(\Delta y/\Delta x)$?

2.5 Escolha uma função quadrática e use a simulação do limite (descrito na atividade 1) para observar como a taxa de variação no ponto varia em função de x . Quando x cresce, como se comporta o valor da taxa de variação? Em que intervalo a taxa é negativa e quando ela muda para positiva, e o que isso tem a ver com o gráfico dessa função?

2.6 Na mesma função que você escolheu no item anterior, use a função “reta tangente” para observar como a inclinação dessa reta varia quando se varia o valor de x . Que relações você percebe entre a inclinação da reta tangente ao gráfico e o comportamento da taxa de variação no ponto?

2.7 Teste outras funções quadráticas e observe as relações entre a concavidade da parábola que representa o gráfico da função e o comportamento da taxa de variação no ponto ao variar x no gráfico. O que você percebeu?

2.8 Trace uma função polinomial de grau 3 no gráfico e simule a taxa de variação no ponto. Em seguida, varie x no gráfico e observe como a taxa de variação varia em função de x . Como a taxa de variação da função se comporta na mudança de concavidade no gráfico? Teste outros casos desse mesmo tipo de função e descreva o que você percebeu.

