

**O Uso de Tratamentos em Registros Figurais:
representações na forma de Material Manipulável, Software
e Expressão Gráfica**

**The Use of Treatments in Figural Records: representations
in the form of Manipulatives, Software and Graphic
Expression**

*Mariana Moran*¹

*Valdeni Soliani Franco*²

RESUMO

Este texto apresenta resultados de uma pesquisa de doutorado e analisa os tratamentos figurais realizados pelos participantes, durante a resolução de uma tarefa de Geometria, por meio do uso de Material Manipulável (MM), Software GeoGebra (SG) e Expressão Gráfica (EG) como representações figurais. A teoria utilizada para tal investigação se baseia nos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval. A influência do tipo de representação figural nos tratamentos figurais foi investigada com a participação de quinze professores de Matemática da Educação Básica, de uma cidade ao norte do Estado do Paraná-Brasil. Com base nos dados obtidos, foi possível concluir que os tratamentos figurais realizados pelos participantes, diferem de acordo com o tipo de representação utilizada.

PALAVRAS-CHAVE: Representações Figurais. Tratamentos Figurais. Geometria.

ABSTRACT

This paper presents results of a PhD research and analyzes the figural treatments performed by the participants during the resolution of a Geometry task, through Manipulatives (MM), GeoGebra Software (SG) and Graphic Expression (EG) like figural representations. The theory used for this

¹ Doutora em Educação Matemática e professora da Universidade Estadual de Maringá (UEM/PR). Professora do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (PRPGEM) – Universidade Estadual do Paraná (UNESPAR/PR). E-mail: mbarroso@uem.br. <https://orcid.org/0000-0001-8887-8560>.

² Doutor em Matemática pelo Instituto de Ciências Matemática e Computação (ICMC/USP). Professor do Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática (PCM) – Universidade Estadual de Maringá (UEM/PR). E-mail: vsfranco@uem.br. <https://orcid.org/0000-0002-9202-4434>.



research is based on the Registers of Semiotic Representations, by Raymond Duval. The influence of the type of figural representation in the figural treatments has been investigated with the participation of fifteen Mathematics teachers from Basic Education in a town in northern Paraná-Brazil. Based on the data obtained, it was possible to conclude that the figural treatments performed by the participants differ according to the type of representation that is used.

KEYWORDS: Figural Representations. Figural Treatments. Geometry.

Introdução

Neste artigo são apresentados aspectos referentes à influência do tipo de representação, nos tratamentos figurais, durante a resolução de uma tarefa de Geometria. Entende-se por Registros de Representação Semiótica, de acordo com Duval (2009), a consideração de sistemas semióticos que identificam o objeto matemático e uma operação cognitiva de conversão das representações de um sistema semiótico para outro que possibilita a compreensão do conceito envolvido. Raymond Duval, filósofo e psicólogo de formação e autor da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, realizou diversos trabalhos acerca dos tratamentos que podem ser realizados nas figuras geométricas com o intuito de resolver um problema de geometria.

A figura que compõe o problema a ser resolvido neste texto foi representada por meio de um registro figural, nas seguintes representações, utilizadas para a investigação: Material Manipulável (MM), o *Software* GeoGebra (SG) e a Expressão Gráfica (EG). Duval (2011) explica que os registros são sistemas cognitivamente “criadores”, de representações sempre novas. O problema abordado nesta pesquisa, contempla conteúdos de Geometria plana, tais como: pontos colineares, segmentos de reta, ponto médio, entre outros.

Este estudo se justifica, sobretudo, por oferecer aos professores e futuros professores da Educação Básica e do Ensino Superior uma investigação sobre as influências, no que diz respeito aos tratamentos figurais, durante a exploração de conceitos de Geometria, em um contexto de resolução de problema. Além disso, apresenta as possibilidades de representações figurais que podem ser utilizadas no trabalho com conteúdos de Geometria em aulas de Matemática.

Para o desenvolvimento desta pesquisa, contou-se com a participação de 15 professores de Matemática da rede pública de ensino, de uma região ao noroeste do Estado do Paraná-Brasil. A pesquisa foi submetida e aprovada pelo Conselho de Ética. A escolha por trabalhar com professores parte do princípio de que estes sujeitos compreendem conceitos básicos de Geometria. Desse modo, é possível fazer a análise das influências das representações figurais com esses professores,

de tal modo que o objeto de estudo sejam as representações, e não o conhecimento dos colaboradores.

Nesse contexto, a Teoria dos Registros de Representação Semiótica ofereceu fundamentações para as investigações propostas na pesquisa, principalmente porque ela abrange, no conhecimento matemático, aspectos de “referência a um objeto” (DUVAL, 2011) e, além disso, proporciona diversas opções metodológicas para o trabalho com a matemática.

O problema que contemplou o instrumento de pesquisa foi elaborado com base na possibilidade de diversidade de reações e respostas que pudessem ser analisadas à luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica. Para a análise, buscou-se identificar os tratamentos realizados em cada tipo de representação figural.

Portanto, no presente artigo descreveremos aspectos sobre os Registros de Representação Semiótica em Geometria; o uso de Materiais Manipuláveis, Softwares de Geometria e Expressão Gráfica como forma de representações figurais; a metodologia utilizada na pesquisa e os resultados obtidos da Tarefa proposta aos professores participantes.

Os Registros de Representação Semiótica em Geometria

Em se tratando da Geometria na Educação Básica, Duval (1999) explica que a atividade matemática se realiza em dois registros: o das figuras e o da língua natural. O registro das figuras é utilizado para auxiliar a visualização e reconhecer, desse modo, suas propriedades; e o registro da língua natural enuncia conceitos, teoremas, hipóteses, descreve os objetos e etc. Mesmo com o reconhecimento de professores e pesquisadores sobre a importância das representações figurais no ensino de geometria, Duval (1999) ressalta que poucos trabalhos têm se dedicado ao estudo dos diferentes tratamentos e à importância desse registro.

Em muitos conceitos matemáticos, principalmente de Geometria, o uso de figuras pode auxiliar a compreensão e a resolução de um problema. A figura pode modificar o significado do texto, oferecendo uma perspectiva específica sobre aspectos a serem considerados para se chegar à conclusão necessária e pode oferecer novas perspectivas da ideia proposta pelo texto, sem abandoná-lo (DUVAL, 2012a). A figura auxilia ainda a resolver tarefas matemáticas por desempenhar um importante papel do ponto de vista cognitivo e na maneira de se ver e compreender a tarefa proposta.

Duval (2011) apresenta três características que conferem às figuras um poder cognitivo particular. Em primeiro lugar, o seu valor intuitivo, que permite interpretações comuns com um simples olhar. Em seguida, proporcionam o reconhecimento de objetos, como imagens desenhadas, e, por fim, podem ser “construídas instrumentalmente seja com régua, com o compasso ou com um *software*, pois com um desenho à mão livre não poderíamos nem distinguir uma reta de uma curva, nem verdadeiramente considerar as relações entre grandezas!” (DUVAL, 2011, p. 84).

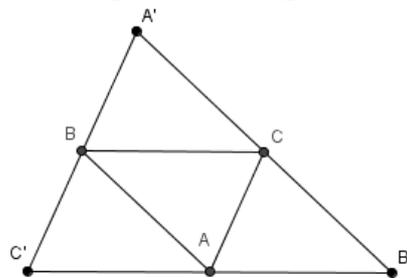
Para que possa haver uma figura, Duval (1999) explica que é necessário de alguma forma um contraste ou um destaque sobre um suporte material do tipo folha de papel, tela de computador, entre outros, possibilitando uma representação visual de dois grandes tipos: das dimensões: 0D (um ponto), 1D (uma linha), 2D (uma área) ou 3D (um volume) e das variações qualitativas: de forma (linha reta ou linha curva; contorno aberto ou contorno fechado de uma área), de tamanho, de posição (observado no plano frontal-paralelo), variações de granulação, de cor etc.

Desse modo, as variações dimensionais e qualitativas que constituem uma figura, possibilitam a determinação de elementos que são denominados, por Duval (1999), de unidades figurais elementares.

A tarefa a seguir, encontrada em Duval (1999), foi realizada com estudantes do *troisième*, e é possível identificar que na figura têm-se seis unidades figurais de dimensão 1, descritas no enunciado do problema, e também oito unidades figurais de dimensão 2, que são triângulos e paralelogramos.

Tarefa: Considerando que $A'C'$ e AC são paralelas; $A'B'$ e AB são paralelas; $B'C'$ e BC são paralelas. Demonstrar que A é o ponto médio do segmento $(B'C')$.

Figura 1 – Triângulo



Fonte: Duval (1999, p. 154).

Para resolver o problema, é necessário que o olhar do sujeito se volte a essas unidades de dimensão 2, principalmente aos paralelogramos $ACBC'$ e $AB'CB$; porém, Duval (1999) afirma que essas são as menos imediatamente visíveis.

O tratamento figural é uma transformação realizada internamente ao registro que consiste em efetuar operações materialmente ou mentalmente sobre as unidades figurais em uma figura geométrica de modo a se obter uma modificação da configuração dela (DUVAL, 2012b). O autor (1999) explica que os tratamentos figurais não podem ser confundidos com legitimação ou demonstração matemática, mas podem ser utilizados como suporte para a posterior formalização matemática.

Como um suporte intuitivo, as figuras oferecem perspectivas diferentes e, além disso, auxiliam na resolução de tarefas. Neste trabalho, foi investigada, a influência da representação de uma figura quando a realização de tratamentos se torna necessária. Essa possibilidade remete às relações parte-todo da figura, sendo dos tipos: óticas (visuais), posicionais e modificações em geral.

Os Materiais Manipuláveis, o Software GeoGebra e as Expressões Gráficas como Representações Figurais

Para esta pesquisa, utilizaram-se os Materiais Manipuláveis, o *Software GeoGebra* e as Expressões Gráficas para representar figuras geometricamente. Essas três formas de “ver” as figuras são consideradas representações figurais de registros de representação semiótica, ou seja, sistemas semióticos que permitem abstrações cognitivas utilizáveis em resolução de problemas para reconhecimentos de propriedades geométricas. Para tal propósito, Duval (2011) estabelece algumas questões:

Essa maneira de ver é a forma comum de ver as imagens e perceber os objetos reais? Ou é preciso subordiná-la a um “conhecimento conceitual” de que ela dependerá e que a guiará? Ou, ao contrário, ela depende das operações de reorganização puramente visuais das figuras que seriam próprias da maneira matemática de “ver”? (DUVAL, 2011, p. 85).

O pesquisador explica que a terceira hipótese é equivalente a assumir que as figuras formam um registro de representação semiótico específico. Dessa forma, enquadram-se, nesse registro, as representações que descrevem operações puramente figurais que permitem transformar qualquer figura em outra com a “finalidade de aparecer uma solução ou de produzir um contra exemplo ou ainda de modelar uma situação” (DUVAL, 2011, p. 85).

Ainda segundo o pesquisador (2011, p. 98) “Como exemplo de registros, consideramos a língua e as figuras geométricas euclidianas cujas formas podem ser

reconhecidas ou construídas materialmente em 3D/3D³". O pesquisador (2011) acredita que a abordagem empírica no estudo de objetos num contexto de problemas pode ser identificada como uma mudança na maneira de ensinar Geometria e isso não somente motiva o ensino, mas torna os objetos geométricos imediatamente acessíveis aos alunos.

De modo geral, as operações a serem realizadas com os objetos geométricos têm relações diretas com o tipo de instrumento utilizado. "Os instrumentos que se toma para poder reproduzir uma figura dada direcionam a maneira de olhar" (DUVAL, 2005, p. 14) e, em consequência favorecem em maior ou menor escala o raciocínio geométrico. Isso significa que determinadas tarefas de Geometria podem ser resolvidas mais facilmente quando o instrumento utilizado para a representação figural evidencia aspectos importantes dessa figura.

Uma maneira de se realizarem tratamentos figurais e explorar diversos tipos de instrumentos de reprodução, é por meio de execução de tarefas. Tanto do ponto de vista cognitivo quanto do ponto de vista geométrico, as tarefas podem ser completamente diferentes conforme o tipo de instrumento utilizado na reprodução de uma figura (DUVAL, 2005). Para compreensão do presente artigo, será descrito o entendimento a respeito das expressões "Material Manipulável"; "Software de Geometria" e "Expressões Gráficas".

Neste contexto entenda-se por Material Manipulável todo material útil ao ensino que pode ser manuseado com fins em aprendizagem como por exemplo, figuras geométricas recortadas em cartolinas ou EVA, poliedros de papel ou de madeira, isopor, barbantes etc. Porém, são considerados registros de representação semiótica figurais, os materiais manipuláveis que puderem ser utilizados com fim didático e que cumprirem duas condições básicas (DUVAL, 2011): possibilitar a produção de representações que permitem o acesso a objetos perceptiva ou instrumentalmente inacessíveis e proporcionar uma rede de operações específicas que permita a transformação de representações produzidas em novas representações.

As experiências que podem ser realizadas com os MM se enquadram como uma oportunidade para a exploração de conceitos e propriedades geométricas. Lorenzato (2006), explica que, ao se utilizar qualquer tipo de material, é primordial a

³ "Toda passagem de uma dimensão a outra representa para o numerador da 'fração', (mD/nD) um salto cognitivo considerável, e, analogamente a passagem de uma representação física para uma representação numérica (mudança do denominador)" (DUVAL, 2011, p. 87). Ou seja, o numerador representa a dimensão real da figura e o denominador, a dimensão de sua representação.

atividade mental por parte do aluno, enquanto o professor deve planejar cuidadosamente a passagem do concreto ao abstrato, formalizando o conteúdo.

Os MM também possibilitam que os participantes identifiquem os conceitos elementares da matemática e construam várias representações mentais, baseadas nas representações semióticas aparentes, favorecendo a aprendizagem e o reconhecimento dos elementos geométricos (BRANDT, 2005). Também, é possível verificar, mostrar ou chegar a resultados matemáticos por meio dos MM. Porém, os mesmos não substituem as demonstrações matemáticas, servindo somente para ilustrar certos raciocínios e auxiliar na busca de soluções (LORENZATO, 2006).

Outro fator interessante é a manifestação do empirismo que o material pode despertar no sujeito. A manipulação de objetos materiais provoca no aprendiz a curiosidade de ações como “tentativa e erro” para comprovar ou não afirmações matemáticas. E, muitas vezes, faz com que o indivíduo recorra a aspectos métricos sem pensar na possibilidade de erros e falácias que os Materiais Manipuláveis podem sugerir. Duval (2011, p. 92) explica que, “Para aprender a ver, os alunos devem aprender a trabalhar sem recorrer primeiro aos aspectos métricos”. Por isso, a importância da mediação do professor perante a interação “sujeito – objeto” indicando ao aluno o caminho a ser percorrido sem, porém, percorrer esse caminho no lugar do aluno.

Os *softwares* se apresentam como outra possibilidade de construção de figuras, pois confere-lhes confiabilidade e objetividade que possibilitam as necessárias verificações e observações. Duval (2011) afirma que os *softwares* também proporcionam a visualização das representações dos objetos a serem trabalhados. E, Bairral e Marques (2016) destacam que o ambiente de geometria dinâmica (AGD) permite ao usuário observar a figura construída em diferentes perspectivas (tamanhos, posições e etc.), ou seja, em diversas variações qualitativas e quantitativas.

O fato de *softwares* permitirem o “arrastar” de figuras ou de suas partes, sem perda de vínculos, e a utilização de um recurso que Gravina (1996) denominou de “régua e compasso eletrônicos” que preserva as relações geométricas, é o que diferencia o desenhar ou construir figuras de outras representações. Além disso, os *softwares* possibilitam manipular e conjecturar em matemática.

As funções citadas são reconhecidas como tratamentos, e Duval (2011) denomina-as “instantâneas” e “ilimitadas”, quando efetuadas em um *software*,

possibilitando uma ideia de simulação que permite a exploração heurística de tarefas matemáticas.

Nesse sentido, Duval (2011) expõe sua concepção a respeito do uso dos *softwares* computacionais nas aulas de matemática, ao afirmar que o monitor e o teclado vieram para substituir o papel, a caneta e o quadro negro. Com base nesse raciocínio, o pesquisador explana as contribuições do computador para o desenvolvimento da atividade cognitiva no sujeito em formação:

Os computadores não constituem um novo registro de representação. E isso por uma razão simples: *as representações que eles exibem são as mesmas que aquelas produzidas graficamente no papel para uma apreensão visual. [...] No entanto, eles constituem um modo fenomenológico de produção radicalmente novo, fundamentado na aceleração dos tratamentos.* Eles exibem no monitor tão rapidamente quanto à produção mental, mas com uma potência de tratamento ilimitada em comparação com as possibilidades da modalidade gráfico-visual. Obtemos, imediatamente, muito mais que tudo o que poderíamos obter à mão livre após, talvez, vários dias de escritas e cálculos ou construção de figuras (DUVAL, 2011, p. 137).

É possível observar que os SG e as EG desempenham basicamente as mesmas funções e compõem um mesmo registro, porém são representações com potências de tratamentos diferentes. É nesse aspecto que está fundamentada a diferença entre a resolução de uma tarefa por meio das EG ou por meio dos SG.

O uso do computador, também requer do sujeito a elaboração e execução de tarefas cognitivas por meio da interação com seu *menu* de comandos. Nesse sentido, observa-se que as ações do sujeito estão interligadas entre a tarefa a ser resolvida, os comandos disponíveis pelo *software* e a atividade cognitiva necessária para a resolução da tarefa (DUVAL, 2011). Desse ponto de vista, a tarefa a ser executada nesse ambiente pode ser mais complexa, pelo maior número de variáveis envolvidas no processo de resolução.

No presente estudo foi utilizado o *software* GeoGebra, pois ele é gratuito e abrange conceitos de geometria, álgebra, cálculo e estatística. Atualmente, com esse *software*, é possível: construir os elementos básicos de geometria, além de figuras, gráficos de funções; fazer cálculo de áreas, de seções cônicas que podem ser modificadas dinamicamente, dentre outras funções, todas envolvendo estatística, cálculo diferencial e integral, geometria e álgebra.

O *software* GeoGebra possibilita observar, por meio de várias janelas simultâneas, de acordo com a necessidade, de modo a viabilizar o andamento do trabalho desejado. É possível ter à disposição janelas de álgebra, de Geometria, de

ferramentas e de comandos ao mesmo tempo. Duval (2015, p. 7) explica que “os programas computacionais atuais oportunizam, não só construir as figuras, mas explorar transformações de figuras por um simples deslocamento de um “objeto”: um ponto, um segmento, etc.

Outra vantagem é a realização de construções e operações e a facilidade em apagá-las ou salvá-las, quantas vezes for necessário, até a chegada de conclusões novas e da solução da tarefa: “Uma das vantagens do uso do GeoGebra é que suas construções são dinâmicas [...]. Isso permite que o sujeito faça grande quantidade de experimentações que lhe possibilite construir proposições geométricas” (GERÔNIMO; BARROS; FRANCO, 2010, p. 11).

Os *Softwares* de Geometria também permitem: a construção de figuras geométricas planas e espaciais; a identificação de elementos figurais, como pontos médios; a construção precisa de planos, retas paralelas e perpendiculares com comandos básicos; a medida exata de comprimentos e de áreas de figuras geométricas planas; além da visualização exterior e interior de objetos tridimensionais em diferentes perspectivas.

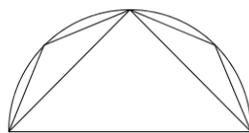
No entanto, o fato de os *softwares* serem dinâmicos e permitirem a movimentação de unidades figurais, pode, por exemplo, induzir o sujeito a generalizar conclusões e resultados que são verdadeiros somente para casos particulares.

Outro ponto merecedor de discussão é a facilidade com que os SG permitem apelar a aspectos métricos, enquanto estão sendo solicitadas demonstrações matemáticas. Tal ponto não é de todo negativo, visto que os aspectos métricos oferecidos pelos SG, em geral, dão uma boa aproximação e, desse modo, podem contribuir para a busca de uma solução que não poderia ser encontrada sem acesso a esse tipo de informação.

É primordial destacar também que, com base no conceito de registro figural de Raymond Duval, admite-se nesta pesquisa as figuras realizadas por meio da Expressão Gráfica como uma representação figural no registro figural, com a finalidade de simbolizar, perceptivelmente, informações e, também, dados numéricos que poderiam ser difíceis de serem aprendidos diretamente (MACHADO, 1999).

Por fim, é destacado na sequência o uso das EG. As figuras construídas por meio das EG, formam imagens passíveis de comunicar uma ideia, um conceito ou um pensamento. Considere a representação da Figura 2, a seguir:

Figura 2 – A aproximação de uma curva por uma sequência de segmentos de reta



Fonte: Duval (2011).

Nessa figura, é possível sempre marcar pontos intermediários entre os já marcados, de modo a obter, cada vez mais, segmentos menores. Ao se repetir por várias vezes esse processo, a cadeia de segmentos se aproxima visualmente da curva desenhada. Duval (2011) explica que, nesse momento de aproximações sucessivas, ocorre um salto do visual discreto para o visual contínuo, e este passa pelo enigma da relação impossível que é o desafio de aproximar uma curva por uma sequência de segmentos de reta. Nesse momento, a Expressão Gráfica torna-se um sistema semiótico produtor, ou criador, de novas representações em que as unidades figurais (os segmentos de reta) são matematicamente pertinentes.

A construção de figuras com materiais de desenho exige do sujeito precisão e conhecimento de conceitos, propriedades e teoremas da Geometria para se chegar ao objetivo proposto. As Expressões Gráficas representam um tipo de registro figural convencional, consistindo em uma das representações mais utilizadas nas aulas de geometria, por sua facilidade de acesso e forte presença nos livros didáticos de matemática.

Para fazer uma representação na forma de Expressão Gráfica, o aluno poderá dispor de folhas de papel, lápis, borracha, régua graduada ou não, compasso, esquadro – ou seja, instrumentos comuns para desenho –, e dos conhecimentos específicos para a ação. Dessa forma, é necessário, além de tudo, que o indivíduo mobilize conhecimentos específicos sobre o objeto a ser representado ou também reconheça suas propriedades e principais características ao visualizá-lo na forma de Expressão Gráfica.

Materiais e Métodos

Com a finalidade de investigar como ocorre a influência dos MM, do SG e das EG nos tratamentos figurais, foi realizada uma pesquisa qualitativa, de caráter interpretativo, na modalidade de estudo de casos múltiplos, que contou com o auxílio de 15 professores de matemática da Educação Básica da Rede Estadual de Ensino, de uma região ao noroeste do Estado do Paraná-Brasil.

Esta pesquisa qualitativa é inspirada na perspectiva interpretativa (PONTE, 2006), em que a investigação reconstrói uma experiência, com a adoção de métodos

diretos ou que se aproximam dessa experiência. Bogdan e Biklen (1994) explicam que deve haver uma preocupação, por parte dos investigadores, em compreender efetivamente o pensamento subjetivo dos participantes (*insider*) nos seus estudos, sem, contudo, utilizar o seu próprio ponto de vista (*outsider*).

Conforme Yin (2010), o estudo de caso contribui para pesquisas com base em fenômenos individuais, grupais, organizacionais, sociais, políticos e relacionados, para responder a questões do tipo “como” e “por que” que esclarecem a natureza do estudo. O autor também esclarece a importância dos experimentos de estudos de caso, pois com eles é possível realizar generalizações às proposições teóricas e não às populações ou universos. Ponte (2006, p. 107) afirma que, “Na Educação Matemática, os estudos de caso têm sido usados para investigar questões de aprendizagem dos alunos, bem como do conhecimento e das práticas profissionais de professores”.

O presente trabalho caracteriza-se como um estudo de casos múltiplos. Yin (2010) explica que esse tipo de estudo pode cobrir diferentes casos e, então, tirar um único conjunto de conclusões. Dessa forma, a análise em um estudo de casos múltiplos é feita de modo a sondar se os grupos de casos diferentes compartilham algumas similaridades que merecem ser consideradas instâncias do mesmo tipo, do caso geral.

Os tratamentos aos quais o pesquisador se refere são os provenientes de registros figurais em contextos de tarefas de Geometria. Neste sentido, pensou-se na possibilidade de se explorar os registros de representação figurais por diferentes meios, enfatizando os tratamentos que essas representações suscitam.

Os dados foram coletados por meio da aplicação de uma tarefa, de tal forma que os raciocínios matemáticos foram expostos como registros discursivos e não discursivos⁴ e em explanações por extenso em uma folha de anotações. Também, foram feitas gravações de áudio das falas durante a aplicação e suas transcrições para a análise. O sujeito da pesquisa foi indagado a não só resolver a tarefa como, também, a expor oralmente e, por extenso, o seu raciocínio.

A tarefa foi individual, na qual os pesquisadores tentaram, assim como sugerem Alves-Mazzotti e Gewandsznajder (2004), ser capazes de estabelecer uma relação de confiança com os sujeitos, ser bons ouvintes, formular perguntas, ter

⁴ Duval (2011) considera como registros discursivos os registros das línguas (oral e escrita) e das escritas simbólicas para operações, enquanto que os registros não discursivos são aqueles que se utilizam de uma linguagem icônica, geométricas e por meio de gráficos.

familiaridade com as questões investigadas e ter flexibilidade para se adaptar à situações inesperadas.

Os 15 professores foram divididos em três grupos de 5 sujeitos cada, sendo o Grupo 1 composto pelos docentes de P1 à P5, Grupo 2 de P6 à P10 e o Grupo 3 de P11 à P15 e, para a resolução do problema, os pesquisadores disponibilizaram as representações figurais uma a uma seguindo a seguinte ordem: **Grupo 1:** EG → SG → MM; **Grupo 2:** MM → EG → SG e **Grupo 3:** SG → MM → EG.

Independentemente de o professor resolver, corretamente ou não, a tarefa com a primeira representação, a segunda representação foi apresentada, assim como, também a terceira, com vistas a verificar se os tratamentos figurais efetuados seriam mantidos ou variados de acordo com a representação disponibilizada. Tal fato influenciou diretamente na resolução final da tarefa, visto que também, houve interferência direta e constante do pesquisador.

Para a resposta da tarefa, foi solicitada uma justificativa oral e por extenso (língua natural e formal⁵), pois Duval (2011, p. 99) afirma que “Pensar em matemática mobiliza sempre pelo menos dois registros”, e “em geometria, mobilizamos a linguagem e a visualização”. Essa estrutura na condução da aplicação da tarefa, com a teoria dos registros de representação semiótica, que permite investigar e analisar as respostas dos sujeitos possibilitou responder ao seguinte problema: *como o tipo de representação figural (MM, SG, EG) influencia nos tratamentos de figuras geométricas com professores de matemática da Educação Básica para justificar a representação do conceito de ponto médio?*

A análise da resolução da tarefa contou com a gravação de áudio e o registro da resolução em uma folha entregue pelos pesquisadores. Até mesmo os professores que não chegaram à solução, foi solicitada a explicação escrita ou por extenso sobre o máximo de conclusões obtidas a respeito da tarefa com base nos tipos de representações figurais oferecidas para a resolução. Essa estruturação dos dados, além de permitir analisar os registros mobilizados pelos professores para a resolução da tarefa, possibilitou observar os tratamentos efetivados com base em cada tipo de representação oferecida (MM, SG, EG).

As ideias referidas anteriormente, foram observadas minuciosamente as seguintes especificidades, com o objetivo de analisar os dados obtidos com esta pesquisa: se a tarefa foi ou não resolvida; a maneira de compreender a figura em

⁵ Duval (1999) denomina como língua natural, a língua materna e língua formal, a escrita simbólica.

cada representação figural, bem como o reconhecimento de seus elementos figurais; se as representações figurais desconstróem ou reforçam conceitos; se as representações figurais corroboram com o conceito envolvido e o caminho percorrido para a resolução da tarefa, ou seja, se houve o uso de tratamentos figurais diferentes em cada representação disponibilizada. Logo, com base nos pressupostos estabelecidos, investigou-se a influência do tipo de representação figural nos tratamentos figurais para o conceito de ponto médio.

Tarefa e Resultados

No decorrer da análise, fragmentos das entrevistas e das respostas escritas dos professores são destacados para justificar as conclusões realizadas. Os docentes participantes são indicados por P1, P2, P3, e assim por diante, até P15. Usa-se a fonte em itálico com aspas para as falas e a fonte em itálico sem aspas para a escrita dos professores entrevistados.

Os pesquisadores iniciaram a aplicação entregando a tarefa com o enunciado digitado em uma folha, com espaço para a resolução pelo professor participante, acompanhada do primeiro tipo de registro figural. Independentemente de o professor ter resolvido a tarefa, foi entregue a segunda representação figural e, posteriormente, a terceira, conforme a ordem descrita na seção anterior. A interpretação do enunciado pelo professor participante fez parte da análise dos dados obtidos na aplicação a tarefa.

A seguir, a tarefa proposta:

Figura 3 –Tarefa proposta.

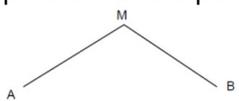
Problema: Sendo \overline{AM} e \overline{MB} segmentos de mesma medida, de acordo com o esquema, podemos concluir que:

() M é o ponto médio do segmento \overline{AB} .

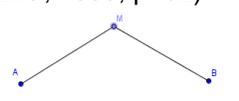
() M não é ponto médio do segmento \overline{AB} .

() Não foram dados os valores das medidas dos segmentos \overline{AM} e \overline{MB} , portanto, nada podemos afirmar.

Justifique oralmente e por extenso (MELLO, 1999, p. 62).



Usando EG



Usando SG



Usando MM

Fonte: Autores, com base em Mello (1999).

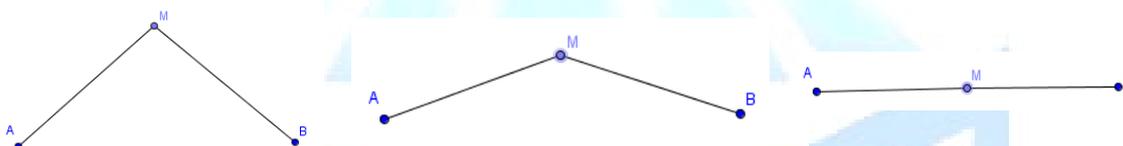
O objetivo principal da tarefa proposta foi observar e analisar, por meio da variação do tipo de representação figural, o uso de tratamento figural realizado pelos

participantes, para resolver a tarefa. Duval (1999) explica que os tratamentos parecem vir de leis de organização figural de percepção visual e, como consequência do entendimento, ocorre um discurso teórico, usado para se comunicar – no caso, as variações cognitivas.

A resposta correta dessa tarefa é a 2ª alternativa: “M não é ponto médio do segmento \overline{AB} ”, pois, para que M seja ponto médio do segmento \overline{AB} é necessário, por definição, que M pertença ao segmento \overline{AB} , além do fato dos segmentos \overline{AM} e \overline{MB} , terem a mesma medida.

Para a resolução dessa tarefa, o sujeito poderia transformar a representação dada em uma representação que, de fato, apresentasse o conceito de ponto médio.

Figura 4 – Movimentos do ponto M, utilizando o GeoGebra.



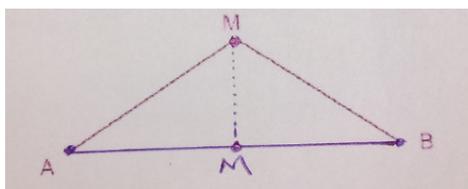
Fonte: Autores.

Salienta-se que tal conceito teórico deve ser somente “representado” de forma que apresente corretamente as características de seus elementos figurais para que M seja considerado ponto médio do segmento dado. A experiência, por mais empírica que pareça, não substitui o papel do objeto matemático sendo considerada somente uma representação do objeto.

Grupo 1(EG → SG → MM): dos cinco professores participantes deste grupo, três efetuaram tratamentos figurais na EG, a saber, P1, P3 e P4, sendo que: P1 dobrou o papel no ponto M e comparou as medidas de \overline{AM} e \overline{MB} e, com base em sua observação, concluiu que a primeira alternativa era a resposta da tarefa: *Através de dobradura, sobrepondo os segmentos é visível a resposta*. Observa-se que tal solução não corresponde à solicitação do problema uma vez que é totalmente empírica, não conceitual e desnecessária.

P3 e P4 traçaram o segmento \overline{AB} e fizeram a “projeção” do ponto M no segmento, chamando-a também de M, conforme a imagem dada na Figura 5.

Figura 5 –Projeção do ponto M.



Fonte: Autores.

Tal tratamento foi o suficiente para que esses professores concluíssem que o ponto M original, fosse um ponto médio. Observa-se, portanto, que tal representação conduziu P3 e P4 ao conceito de ponto médio, mas de forma equivocada. Isso ocorreu quando da representação realizada por eles, foi utilizado dois pontos com o mesmo nome, principalmente pelo fato, do ponto M ser o principal objeto de estudo da tarefa. Como por hipótese, sabia-se que \overline{AM} e \overline{BM} , tinham a mesma medida, concluíram que o M original era ponto médio do segmento \overline{AB} .

Logo depois, foi disponibilizada a mesma figura no SG, e nesse caso, todos os professores desse grupo realizaram tratamentos figurais.

Com essa representação, P1 manteve a resposta dada, quando utilizada a representação EG. Porém, P3 e P4 chegaram à conclusão de que A, B e M precisavam estar alinhados para que M fosse o ponto médio de \overline{AB} , conforme a transcrição de P3: *“às vezes, temos na cabeça que ponto médio é aquele que divide o segmento em duas partes iguais, né? Então, aqui vai dar certo... aqui, já não...”* P3 se referiu ao caso em que M é colinear com A e B, e ao caso em que não é, reconhecendo como deveria ser a representação correta do conceito de ponto médio do segmento \overline{AB} .

O mesmo aconteceu com P4:

Agora, vendo no GeoGebra, puxando pra lá e pra cá, ele chega no ponto médio, chega na reta. [...] Agora, você colocando ele lá em cima e pedir pra uma criança, vamos supor, calcular o ponto médio, a criança vai automaticamente calcular o médio de A até B. Ela vai medir dali ali e traçar ali, entendeu? Lógico que, se você der essa definição, ele vai ficar nessa mesma dúvida que eu fiquei.

Aqui, vale registrar, a importância que se dá para “cálculos”, quando o professor afirma que o aluno vai “calcular” o ponto médio, pois o objeto em questão não envolve cálculos; mas, sim a identificação de um objeto geométrico que se localiza na reta definida por A e B, entre os pontos A e B, de modo que os segmentos \overline{AM} e \overline{BM} sejam congruentes.

Nessa representação, P2 e P5 efetuaram tratamento figural, ao movimentar o ponto M, mas não concluíram a tarefa. Entretanto os elementos figurais foram identificados nessa representação. Salazar e Almouloud (2015) consideram que o uso dos ambientes de geometria dinâmica para o trabalho com figuras geométricas, proporciona outro olhar sobre elas, além da possibilidade de conjecturar sobre as propriedades dos objetos matemáticos representados.

Ao se disponibilizar a figura na forma de MM, somente P4 realizou o tratamento figural, tentando, da mesma forma que no SG, movimentar o ponto M; porém, quando o movimentava, as medidas \overline{AM} e \overline{MB} mudavam. Sua justificativa para o problema foi: “como as distâncias se diferem não considero o M como ponto médio, justamente pelo diferencial de medidas”. Conclui-se assim que a solução de P4 foi experimental e não baseada na hipótese do problema, posto que ela afirmava que \overline{AM} e \overline{BM} eram congruentes.

Após o uso do SG, P4 movimentou o ponto M no MM do mesmo modo que no *software*, mas não concluiu a tarefa, como que a solução do problema dependesse da representação utilizada.

Grupo 2 (MM → EG → SG): no MM, P7 e P8 efetuaram o tratamento figural, movimentando o ponto M. Nesse caso, P7 realizou com sucesso a tarefa, respondendo que: *M não é ponto médio, já que a trajetória de A a B não é feita por um segmento de reta*. Já P8, não concluiu a tarefa com esta representação. Os demais professores, desse grupo, não efetuaram tratamento figural nessa representação. Com a solução dada por P7, ele não mudou a sua resposta ao ser apresentado as demais representações.

Ao disponibilizar a mesma figura, na forma de EG, somente P6 efetuou o tratamento figural, e explicou: *“Se esticasse a linha, o segmento... eu acho que poderíamos afirmar que sim”*. P6 reconheceu, dessa forma, como deveriam estar posicionados os pontos A, M e B para que M fosse a representação de um ponto médio no segmento \overline{AB} . Contudo, ao ser disponibilizada a mesma figura no SG, P6 acaba concluindo que: *“Partindo da leitura $\overline{AM} = \overline{MB}$, já se pode dizer que M é o ponto médio, desde que se conheça a definição de ponto médio”*. Ou seja, utilizando as três representações, P6, apesar de começar a pensar corretamente na representação EG, ao final concluiu de maneira incorreta a tarefa.

Os três professores, P8, P9 e P10 quando utilizado o SG, efetuaram tratamentos, e P9 concluiu, de maneira incorreta que M é ponto médio do segmento AB. Já os outros dois professores realizaram tratamentos discursivos, explicitando suas ideias nessa representação. P8: *“No GeoGebra percebe-se que mudando o lugar de M para que fique no mesmo segmento \overline{AB} , este será ponto médio”* e P10: *“No Geogebra fazendo os movimentos representou que está no ponto médio do segmento \overline{AB} ”*.

É possível notar que P8 e P10, também chegaram à conclusão de que M é ponto médio quando este está no segmento \overline{AB} . Desta forma, tal representação reforçou o conceito de ponto médio já interiorizado por esses professores, bem como os elementos figurais que compunham a figura.

Grupo 3(SG → MM → EG): neste grupo, a tarefa foi iniciada com a representação figural no SG. Todos os professores do grupo efetuaram tratamento figural, conforme os registros discursivos: P11 enunciou que: *Pelo Geogebra é possível verificar que M seria o ponto médio do segmento \overline{AB} somente se os pontos A, M e B estivessem alinhados*; P12 referiu que: *Através do movimento do ponto M observamos que as medidas \overline{AM} e \overline{MB} continuam iguais, sem nenhuma dúvida*; P13 apontou que: *Embora os segmentos \overline{AM} e \overline{MB} tenham a mesma medida e para que M seja o ponto médio os pontos deveriam ser colineares*; P14 disse: *M é o ponto médio do segmento \overline{AM} pelo Geogebra* e P15: *No Geogebra com a mobilidade do ponto, a gente consegue visualizar o ponto médio, uma vez que os segmentos \overline{AM} e \overline{MB} são de mesma medida, uma vez que estão alinhados*. É possível observar que P11, P13 e P15 reconheceram a condição para que M fosse ponto médio identificando todos os elementos figurais.

Em seguida, ao se disponibilizar a figura na forma de MM, três dos cinco professores efetuaram o tratamento figural, tentando movimentar o ponto M. Acredita-se que tal fato provavelmente ocorreu por conta da influência do SG, utilizado anteriormente. Ainda nessa representação, um desses três professores comparou as medidas de \overline{AM} e \overline{MB} para identificar se eram iguais. A conclusão dos professores que realizaram o tratamento figural foi a mesma obtida na representação anterior.

Ao se disponibilizar a figura na forma de EG, dois professores efetuaram tratamentos figurais: P12 dobrou o papel no ponto M e comparou as medidas \overline{AM} e \overline{MB} , enquanto P15 fez a projeção do ponto M no segmento \overline{AB} , de modo a comprovar se $\overline{AM} = \overline{MB}$. Nenhuma dessas soluções pode ser considerada a medida que são totalmente baseadas em experiências empíricas. O MM deve auxiliar o sujeito a extrair conclusões, porém as ideias não podem ser justificadas somente por meio dessa representação.

Considerações Finais

Com esta pesquisa, foi possível constatar que, ao utilizar diferentes representações do registro figural na resolução de tarefas de Geometria, fatores referentes aos tratamentos são influenciados pelo tipo de representação figural disponível, gerando consequências diretas, na busca da solução do problema.

Na representação da forma de EG, destacaram-se dois tipos de tratamentos: a comparação das medidas \overline{AM} e \overline{MB} , por meio da dobra da figura no ponto M; e, a “projeção” do ponto M sobre o segmento \overline{AB} ; na representação, na forma de MM, o tratamento figural mais efetuado foi a tentativa de movimentar o ponto M; embora, tal fato tenha ocorrido, na maioria das vezes, após o contato com o registro no SG e na representação na forma de SG, destacou-se a mobilidade do ponto M, sem ênfase em aspectos métricos, à medida que este se tornava colinear aos pontos A e B.

Observou-se, portanto que na maioria dos casos, a EG promoveu o estabelecimento de relações de medidas para resolver o problema, pois vários participantes utilizaram dobraduras ou medições para comprovar, na representação figural, o que já era dado como hipótese. Isso mostra um problema na compreensão do registro da língua natural utilizada, que nem sempre é observada atentamente, pois no enunciado da tarefa, já se afirmava a igualdade das medidas dos segmentos AM e MB.

O SG possibilitou a mobilidade do ponto M até que as condições para que M fosse ponto médio fossem satisfeitas, ou seja, a colinearidade de A, B e M. A representação que mais possibilitou tratamentos figurais e variações cognitivas foi o SG, pois percebeu-se um auxílio na reorganização do pensamento.

O uso da Teoria dos Registros de Representação Semiótica em Geometria foi, sem dúvida, primordial para a investigação, direcionando o modo como foram elaborados os instrumentos de pesquisa e as consequentes análises. Também

fundamentou a investigação dos registros figurais nos aspectos relacionados aos tratamentos, conforme descritos neste texto.

Assim, observou-se que para resolver a tarefa, em cada tipo de representação figural, os professores realizaram tratamentos diferentes, independente do momento (ordem) em que a representação no registro figural foi apresentada. No MM, houve destaque no uso de tratamentos que recorreram a dobraduras para auxiliar no raciocínio, conforme o esperado. No SG, destacou-se a facilidade em movimentar a figura, mudando-a de lugar, posição e tamanho. Na EG, os desenhos à mão livre e o uso da régua graduada e não graduada foram recorrentes. Essas constatações reforçam a ideia de que é importante que o sujeito conheça diferentes representações para um mesmo objeto matemático, pois cada uma delas desenvolve aspectos cognitivos e matemáticos particulares. Em conformidade com a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, é a coordenação das diferentes representações para um mesmo objeto que possibilita a aprendizagem.

A pesquisa reforçou a importância do trabalho com as diferentes representações semióticas figurais ao resolver uma tarefa de geometria, não somente para que esta fosse resolvida, mas para que os tratamentos figurais fossem desenvolvidos, contribuindo com o processo de aquisição dos conhecimentos e com o funcionamento cognitivo do pensamento do sujeito.

Referências

ALVES-MAZZOTTI, A. J.; GEWANDZNAJDER, F. **O Método nas Ciências Naturais e Sociais: Pesquisa Quantitativa e Qualitativa**. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2004.

BAIRRAL, M. A.; MARQUES, F. de J.R. Onde se localizam os pontos notáveis de um triângulo? Futuros professores de matemática interagindo no ambiente vmt.com.geogebra. **Revista Educação Matemática Pesquisa**. São Paulo, v. 18, n. 1, pp. 111-130, 2016.

BOGDAN, Robert; BIKLEN, Sari. **Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. Porto Editora, 1994.

BRANDT, Celia Finck. **Contribuições dos registros de representação semiótica na conceituação do sistema de numeração**. 2005. 244 f. Tese (Doutorado em Educação Científica) – Universidade Federal de Santa Catarina.

DUVAL, Raymond. **Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y Aprendizajes intelectuales**. Tradução: Myriam Vega Restrepo. Cali, Colombia: Universidade del Valle, 1999.

DUVAL, Raymond. Les conditions conitives de l'apprentissage de la geometrie: éveloppement de la visualisation, différenciation des raisonnement et coordination de leur fonctionnements. **Annales de Didactique et de Sciences Cognitives**, n. 10, p. 5-53, 2005.

DUVAL, Raymond. **Semiósis e Pensamento Humano**: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais (Fascículo I). Tradução: Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

DUVAL, Raymond. **Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar**: os registros de representação semióticas. Org.:Tânia M. M. Campos; tradução: Marlene Alves Dias. São Paulo: PROEM, 2011.

DUVAL, Raymond. Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência. Tradução: MérclesThadeu Moretti. **Revista Eletrônica de Educação Matemática – Revemat**: Florianópolis, v.07, n.1, p.118-138, 2012a.

DUVAL, Raymond. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Tradução: MérclesThadeu Moretti. **Revista Eletrônica de Educação Matemática – Revemat**: Florianópolis, v.07, n.2, p. 266-297, 2012b.

DUVAL, Raymond. Mudanças, em curso e futuras, dos sistemas educacionais: Desafios e marcas dos anos 1960 aos anos... 2030! Tradução: MérclesThadeu Moretti. **Revista Eletrônica de Educação Matemática – Revemat**: Florianópolis, v.10, n.1, p. 1-23, 2015.

GERÔNIMO, J. R.; BARROS, R. M. de O.; FRANCO, V. S. **Geometria Euclidiana Plana**: um estudo com o software Geogebra. Maringá: EDUEM, 2010.

GRAVINA, M. A. A Geometria Dinâmica: uma nova abordagem para o aprendizado da Geometria. **Anais do VII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação**, p. 1-13. Belo Horizonte, 1996.

LORENZATO, Sergio. Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis. In: _____ (Org.). **O Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores**. Campinas, SP: Autores Associados, 2006.

MACHADO, N. J. **Epistemologia e didática**: as concepções de conhecimento e inteligência e a prática docente. São Paulo: Cortez, 1999.

MELLO, E. G. S. **Demonstração**: uma sequência didática para a introdução de seu aprendizado no ensino da Geometria. 1999. 189 f. Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo.

PONTE, João Pedro. Estudos de caso em educação matemática. **Bolema**, 25, 2006, p. 105-132.

SALAZAR, J. V. F.; ALMOULOU, S. Registro figural no ambiente de geometria dinâmica. **Educação Matemática Pesquisa**. São Paulo, v. 17, n. 5, pp. 919-941, 2015.

YIN, Robert K. **Estudo de caso**: planejamento e métodos. Tradução: Ana Thorell. 4ªed. Porto Alegre: Bookman, 2010.

Submetido em: 11 de abril de 2018

Aceito em: 28 de abril de 2020