REVISTA DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL (UFMS)

Volume 11, número 26 – 2018

ISSN 2359-2842

Potencialidades de uma tarefa na mobilização de conceitos de Cálculo Diferencial e Integral

Potentialities of a task in the mobilization of concepts of Differential and Integral Calculus

Maycon Odailson dos Santos da Fonseca[1]

Nélvia Santana Ramos[2]

André Luis Trevisan[3]

Marcele Tavares Mendes[4]

RESUMO

Objetiva-se neste artigo identificar as potencialidades de uma tarefa, cujo contexto é constituído por uma situação realística, em termos de elementos constituintes do conceito de limite de uma sequência numérica que, a partir dela, foram mobilizados. Para tanto, apresenta-se uma análise, de cunho qualitativo e de natureza essencialmente descritiva, de dados oriundos da discussão realizada por três grupos de estudantes. Observou-se a mobilização dos seguintes elementos: identificação de diferentes tipos de sequências; discussão de possíveis formas de organizações dos seus termos; observação quanto ao "modo" de crescimento desses termos; análise da diferença na variação entre os termos das sequências e de seu comportamento em curto e longo prazo. A organização da tarefa como suporte para o trabalho em episódios de resolução de tarefas proporcionou aos estudantes participação ativa, tanto na resolução quanto nos momentos de discussão que levaram à sistematização de elementos constitutivos do conceito de limite de sequências numéricas.

PALAVRAS-CHAVE: Ensino de Cálculo Diferencial e Integral. Tarefas Matemáticas. Ambiente de Ensino e de Aprendizagem. Limite de uma Sequência Numérica.

ABSTRACT

This article aims to identify the potentialities of a task whose context is constituted by a realistic situation, in terms of constituent elements of the concept of limit of a numerical sequence that have been mobilized from it. For that, an analysis of qualitative nature and essentially descriptive nature of data from the discussion carried out by three groups of students is presented. The following mobilized elements were observed: identification of different types of sequences; discussion of possible forms of organizations of their terms; the "mode" of growth of these terms; analysis of the difference in the variation between the terms of the sequences and their behavior in the short and long term. The organization of the task as support for the work in episodes of task resolution

[1] Secretaria de Estado de Educação, Esporte e Lazer - SEDUC/MT. maycon.odailson@gmail.com.
[2] Colégio ECEL. nelvia_ramos@hotmail.com.
[3] Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR. andrelt@utfpr.edu.br
[4] Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR. marceletavares@utfpr.edu.br

gave the students their active participation both in the resolution and in the moments of discussion that led to the systematization of elements constituting the concept of limit of numerical sequences.
KEYWORDS: Teaching Differential and Integral Calculus. Mathematical Tasks. Teaching and Learning Environment. Limit of a Numerical Sequence.

Introdução

Nas últimas décadas, o ensino de Cálculo Diferencial e Integral (CDI) tem sido objeto de investigação na Educação Matemática (RASMUSSEN; MARRONGELLE; BORBA, 2014; SAD, 1999; VILLARREAL, 1999; CABRAL, 1998; REZENDE, 1994; CABRAL, 1992 dentre outros), buscando compreender as razões pelas quais estudantes apresentam dificuldades nessa disciplina, o que acarreta altos índices de reprovação e desistência, não apenas no Brasil. Se, por um lado, as pesquisas têm contribuído para uma compreensão mais ampla de como estudantes aprendem função, limite, derivada e integral, por outro, pouco desses resultados tem chegado à sala de aula, como destacam Rasmussen, Marrongelle e Borba (2014).

Pensar em propostas referenciadas teoricamente, que sejam factíveis às salas de aulas regulares e que possibilitem, em alguma medida, contribuir para essa discussão, é nossa preocupação constante e recorrente, e um elemento que diferencia esse trabalho de outros que usualmente discutem questões acerca do ensino de CDI. Assim, o como "transpor" para nossas salas de aula as ideias oriundas dos estudos e resultados de pesquisa teórica é um desafio. Enquanto pesquisadores e professores de CDI, nossa contribuição às pesquisas tem sido desenvolver tarefas que integrem o ambiente de ensino e de aprendizagem dessa disciplina em condições reais de ensino, que auxiliem os estudantes na elaboração de conceitos partindo de suas concepções intuitivas e de suas estratégias informais, por meio de pesquisa de caráter intervencionista.

Especificamente, neste trabalho, nosso objetivo, oriundo da pesquisa que deu origem às dissertações do primeiro e do segundo autores (FONSECA, 2017; RAMOS, 2017), é identificar as potencialidades de uma tarefa proposta a estudantes que cursam a disciplina de CDI 1[5]., cujo contexto é uma situação realística, em termos de elementos constituintes do conceito de limite de uma sequência numérica e que foram mobilizados a partir dela. Essa

---

[5]Adotamos a expressão CDI para o Cálculo Diferencial e Integral enquanto área de conhecimento, abarcando as disciplinas de CDI 1, CDI ~~2,~~ etc. cursadas pelos estudantes, respectivamente no 1º, ~~2º,~~ etc. semestres da universidade em que se desenvolve a pesquisa.

pesquisa foi desenvolvida em âmbito do projeto “Investigação de um ambiente educacional para o Cálculo Diferencial e Integral em condições reais de ensino” (CNPq, Processo 457765/2014-3), em desenvolvimento junto ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da UTFPR, câmpus Londrina – Cornélio Procópio. A partir desta introdução, apresentamos: a tarefa proposta aos estudantes; o contexto e os procedimentos metodológicos para a coleta de dados; a descrição e a análise da tarefa desenvolvida e algumas implicações da pesquisa para o ensino.

Apresentação de Alguns Elementos Envolvidos no Ambiente

Inspirados nos trabalhos Palha, Dekker, Gravemeijer e Van Hout-Wolters (2013) e Palha, Dekker e Gravemeijer (2015), propomos a organização de ambientes de ensino e aprendizagem pautados em episódios de resolução de tarefas (adaptação do inglês *shift problem lessons*, expressão cunhada por esses autores). Nossa organização segue na contramão da forma tradicional de um curso de CDI, na qual é apresentado um novo conceito, seguido de demonstrações, exemplos e listas de exercícios. Nesta seção do texto, buscamos caracterizar os elementos que constituem esse ambiente.

Ambiente de aprendizagem, por sua vez, refere-se ao contexto em que ao indivíduo são oferecidas oportunidades para aprender. Organizamos nosso ambiente em episódios de resolução de tarefas[6] ((COUTO; FONSECA; TREVISAN, 2017; TREVISAN; MENDES, 2018). Em nossa proposta, antes da apresentação de uma definição[7], os estudantes são convidados a explorar ideias matemáticas de forma intuitiva, e suas estratégias são tomadas como ponto de partida para a sistematização de conceitos da disciplina. Tal premissa vai ao encontro das ideias de Laudares (2013):

> Então, se requer uma aproximação e um desvelar do conceito, como pré-requisito do ato de definir. Que a definição aflore, e se mostre após a aquisição conceitual pelo estudante, isto é, *que o ato de conceituar preceda ao ato de definir*. Assim, ao processar a definição, pelas representações utilizadas, pode ser *gerado um espaço no*

---

[6] Adaptado do inglês *shift problem lessons*, expressão proposta por Palha, Dekker, Gravemeijer e Van Hout-Wolters (2013) e Palha, Dekker e Gravemeijer (2015).

[7] Para Laudares (2013, p. 7), o “conceito implícito na definição se reveste de uma formalização, com o uso de uma linguagem própria e específica a cada ciência. Então, no caso da Matemática, como em toda ciência, a definição é formulada com uma simbologia, criada por uma convenção, com normas e particularidades de expressão”.

> *qual os elementos constituintes do conceito se explicitam* e se mostram com possibilidades de serem, mais bem assimilados. (p. 7, grifos nossos).

Esses "momentos" são organizados a partir da proposição de tarefas elaboradas e/ou adaptadas de materiais curriculares, que não sejam precedidas da apresentação de definições ou exemplos similares, e que seu desenvolvimento em grupos em sala de aula contribua para uma elaboração provisória e posterior à sistematização. O papel ativo do estudante, a partir do diálogo colaborativo na resolução das tarefas, organizando, discutindo e transformando ideias, proporciona levantar e testar hipóteses, responder indagações propostas, tanto pelo professor quanto pelos colegas, e caminhar na direção da elaboração de conceitos matemáticos.

O professor, por sua vez, precisa estimular o aluno a mostrar, explicar, justificar, criticar e melhorar as ideias matemáticas que emergem do trabalho com as tarefas, conduzindo a sistematização de conceitos subjacentes a elas. Assim, cabe a ele "a responsabilidade de selecionar e lhe propor *boas* tarefas [...] [e] criar condições para que os estudantes possam envolver-se, significativamente, com elas" (FERREIRA; BURIASCO, 2015, p. 461, grifo das autoras).

Em relação ao termo tarefa[8], diversos são os referenciais que temos utilizado para conceituá-lo. Para Stein e Smith (2009), uma tarefa é definida como "um segmento da atividade da sala de aula dedicada ao desenvolvimento de uma ideia matemática particular (p. 105)". No sentido proposto por Ponte (2014, p. 14), tarefas são "elementos organizadores de quem aprende, sendo em sua maioria proposta por professores e, uma vez propostas, devem ser interpretadas pelos alunos podendo originar atividades diversas". Assim, uma

> [...] tarefa pode ter ou não potencialidades em termos de *conceitos e processos matemáticos que pode ajudar a mobilizar*. Pode dar lugar a atividades diversas, conforme o modo como for proposta, a forma de organização do trabalho dos alunos, o ambiente de aprendizagem, e a sua própria capacidade e experiência anterior (PONTE, 2014, p. 16, grifos nossos).

De modo mais geral, podemos entender tarefas como um "amplo espectro de 'coisas a fazer' pelos estudantes em sala de aula, o que inclui desde a execução de exercícios algorítmicos até a realização de investigações ou construção de modelos matemáticos"

---

[8]Utilizaremos a palavra tarefa em lugar de tarefa de aprendizagem matemática.

(TREVISAN, BORSSOI, ELIAS, 2015, p.3). Podem ser planejadas de acordo com diferentes níveis de demanda cognitiva, relacionando-se com o tipo de raciocínio exigido dos estudantes para sua resolução. Assim, segundo Stein e Smith (2009),

> [...] tarefas que pedem aos alunos a execução de um procedimento memorizado, de maneira rotineira, representam certo tipo de oportunidade para os alunos pensarem; tarefas que exigem que os alunos pensem conceitualmente e que os estimulem a fazer conexões representam um tipo diferente de oportunidade para os alunos pensarem. (p. 22).

Para essa obra, Stein e Smith (2009), tarefas consideradas de alta demanda cognitiva (em oposição àquelas que envolvem reprodução de fatos, regras ou fórmulas, ou focam somente a explicação do procedimento usado) caracterizam-se pela atenção que deve ser despendida pelos estudantes no uso de procedimentos e compreensão de conceitos, bem como o uso de múltiplas representações (visuais ou simbólicas), exigindo assim um esforço cognitivo para a compreensão de conceitos subjacentes.

> Nesse sentido, conhecer as oportunidades que as tarefas podem oferecer quanto aos possíveis métodos de solução, a pertinência das múltiplas respostas, os conceitos envolvidos, a familiaridade do estudante com a tarefa, o que lhe é solicitado em relação ao conteúdo ou às competências parecem se constituir em um recurso necessário que o professor precisa conhecer (FERREIRA; BURIASCO, 2015, p. 461).

O contexto de uma tarefa, por sua vez, mostra-se como um elemento fundamental a ser considerado quando se pensa nas oportunidades de aprendizagem que uma tarefa pode oferecer, em termos dos conceitos que podem ser mobilizados pelos estudantes a partir delas, e pode constituir-se a partir de diferentes situações: efetivamente reais, realísticas (imagináveis), fantasiosas ou circunscritas por uma linguagem matemática. A palavra realística não necessariamente estabelece uma conexão com o mundo real, mas principalmente a ideia de "oportunizar aos estudantes situações que eles possam *imaginar* [...]. É a ênfase dada em *tornar algo real na mente dos estudantes*" (TREVISAN; BURIASCO, 2015, p. 169, grifos dos autores).

Nessa direção, Laudares (2013) aponta que, para o estudante poder conceituar,

> O professor de matemática, diferente do matemático que busca um nível superior de abstração e generalidade, apresenta [...] uma situação ou espaço de situações [...] matemáticas e não matemáticas da vida real, das ciências e da tecnologia propondo o uso de analogias e metáforas, sempre associadas à resolução e análise de problemas, fomentando a atitude heurística. (p. 5).

O termo conceito refere-se, aqui, à "intelectualização da experiência obtida da prática e pela aplicação", conforme sugerido por Laudares (2013, p. 4), com base nos trabalhos de John Dewey. Um conceito não se forma apenas por memorização e associação de palavras, mas pelo surgimento de um problema ou como ponto de partida de uma proposição, de uma atividade que inquire o sujeito da experiência. Assim, pensar um ambiente que privilegie "o trabalho com conceitos requer a criação de um espaço de trabalho pela 'atividade', mobilizando os estudantes para ação, substituindo a passividade da pedagogia tradicional da aula verticalizada do vetor professor → aluno" (LAUDARES, 2013, p. 5).

Se, por um lado,

> [...] não é possível dizer *a priori* quais seriam *bons* problemas de contexto, visto que essa caracterização depende da relação que o *resolvedor* em potencial estabelece com o enunciado, [por outro lado] a proximidade do contexto com o repertório do estudante aumenta a possibilidade de matematização[9]"(FERREIRA; BURIASCO, 2015, p. 454).

Um elemento que destacamos, ao pensar o desenho das tarefas de aprendizagem, é a incorporação de recursos tecnológicos. Sua integração possibilita que os estudantes mobilizem diferentes tipos de representação, oferecendo oportunidades para interatividade, na direção do que Borba, Silva e Gadanidis (2015) caracterizam como experimentação com tecnologias. A interação entre diferentes tecnologias auxilia as formulações de conjecturas essenciais no pensamento matemático contribuindo para o trânsito entre as representações de conceitos centrais do Cálculo (VILLARREAL, 1999).

O Conceito Matemático Subjacente às Tarefas: Limite de uma Sequência Numérica

[9]Em linhas gerais, toma-se matematização como um processo de organização da realidade usando ideias e conceitos matemáticos.

O conceito de limite é uma das ideias fundamentais no entendimento do CDI, bem como no desenvolvimento do pensamento matemático rigoroso. Apesar dessa posição central no Cálculo, sua aprendizagem tem se mostrado difícil em função das múltiplas dificuldades e obstáculos que surgem da complexidade do conceito e de como se organizam as práticas didáticas.

Para o desenvolvimento da proposta que dá origem a este trabalho, apoiamo-nos nas ideias de Weigand (2014). Segundo esta obra,

> [as] dificuldades que os alunos apresentam na definição formal de limite e derivada já são sabidas. Eles até conseguem utilizar a definição em um dado contexto, resolver problemas de um nível formal, mas falta uma avançada compreensão dos conceitos. (p. 603, tradução nossa).

Essa falta acarreta dificuldades que são “carregadas” pelos estudantes ao longo do curso, que buscam incessantemente a aplicação de modelos prontos, de reprodução. Quando lhes é proposta uma tarefa para a qual apenas a reprodução não é suficiente, a falta da compreensão da definição formal é evidenciada. Além disso, obstáculos associados à compreensão do conceito de limite de uma sequência numérica comprometem o entendimento de conceitos mais amplos, como o limite de uma função real de variável real, bem como o processo de limite inerente aos conceitos de derivada e integral definida.

Weigand (2004, 2014) sintetizaram vários resultados de pesquisas sobre ensino, aprendizagem e compreensão do conceito de limite, dos quais destacamos dois.

- A compreensão formal do conceito de limite é um desafio para os alunos, pois exige visualizações e explicações que utilizam diferentes representações, indo além da representação simbólica.
- Compreender o processo de construção numérica e gráfica e de cálculo de limites torna-se essencial para a compreensão do conceito além de uma definição formal, o que pode ser conduzido por visualizações no computador.

Essas obras defendem um trabalho inicial do CDI partindo do estudo de sequências numéricas (que são funções cujo domínio é o conjunto dos naturais) para depois ser apresentado o estudo de funções nos reais e enfatiza algumas razões para revitalizar o conceito de sequência na matemática escolar, das quais destacamos: (i) problemas da vida real permitem sua representação matemática por meio de sequências; (ii) sequências são ferramentas para o desenvolvimento de processos em domínios contínuos, tais como o quociente de diferenças que pode ser tomado como base para o conceito de diferencial, ou as somas parciais de termos de uma sequência como contexto para o cálculo integral.

O conceito de limite de uma sequência numérica convergente é constituído de ideias sofisticadas (RAMOS, 2017), que precisam ser problematizadas com os estudantes, tais como: (i) a distância entre os termos da sequência que se tornam menores à medida que tomamos valores maiores de *n*; (ii) a notação modular que representa a distância entre os termos consecutivos; (iii) a arbitrariedade de n_0, a partir da qual garantimos que a distância entre os termos de uma sequência e um número “*L*” torna-se menor que um “épsilon”; (iv) o fato de que podemos “desconsiderar” uma quantidade finita de pontos da sequência se garantirmos que, a partir de certa posição, seus termos tenham um comportamento que garanta a convergência.

Temos adotado em nossa dinâmica de trabalho uma estrutura curricular “não usual” para a disciplina de CDI 1 (XXXX, 2017), por meio da organização dos conteúdos em formato de espiral, adiando um tratamento rigoroso de limites e privilegiando a exploração de ideias intuitivas que fomentem a elaboração de conceitos matemáticos, por meio de episódios de resolução de tarefas. Referenciais que nos “inspiraram” a implementar essa nova organização em nosso ambiente de ensino e aprendizagem de CDI incluem, além dos trabalhos de Weigand (2004, 2014) já citados, obras como (i) o polêmico livro *Calculus Made Easy* (THOMPSON; GARDNER, 1998), que serviu de base para pensar os conceitos fundamentais do Cálculo de forma intuitiva, com pouco formalismo e valorização de aplicações; (ii) Moise (1972 - prefácio), que propõe uma organização de conteúdos em formato de espiral, que, segundo o autor, sustenta “uma longa preparação para a definição formal, com o fim de eliminar com antecedência tantas dificuldades quanto possível”; (iii) Toeplitz (1963), em que o autor propõe basear-se nas condições de aparecimento e desenvolvimento histórico do CDI para pensar o modo de apresentação de conceitos dessa disciplina.

Tarefa Proposta

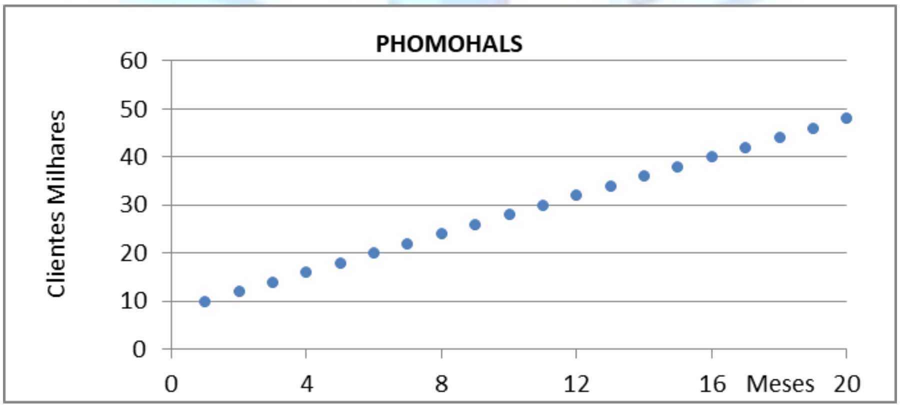
Em nossa proposta de trabalho com episódios de resolução de tarefas, os estudantes organizam-se em grupos e trabalham de forma colaborativa, organizando, discutindo e transformando ideias. Ao mesmo tempo, são incentivados, nos momentos de socialização, a explicitarem suas estratégias de resolução para a sala, que servem como ponto de à elaboração de definições provisórias, antes que conceitos sejam descritos com precisão e os resultados a eles relacionados sejam provados.

A tarefa foi construída buscando ser acessível e convidativa, de modo que os estudantes sentissem que “valia a pena” ser resolvida (TREVISAN; BURIASCO, 2015). Além disso, o contexto foi selecionado com vistas a tornar a tarefa flexível, permitindo que fosse resolvida em diferentes níveis de complexidade e por meio de diferentes estratégias (FERREIRA; BURIASCO, 2015).

Essa tarefa foi adaptada de Weingand (2014), tendo as sequências numéricas como conteúdo matemático subjacente, e foi organizada no intuito de explicitar elementos constituintes do conceito de limite. O trabalho com sequências numéricas possibilita uma exploração do comportamento “em longo prazo” dos seus termos, base intuitiva para a elaboração do conceito de limite. O enunciado utilizado é mostrado na Figura 1.

A empresa COMPUNET fornece conexões de Internet para seus atuais 10.000 consumidores. A COMPUNET está interessada na contratação de uma agência de publicidade para desenvolver uma campanha para aumentar o número de consumidores. A empresa tem três agências de publicidade diferentes para escolher: PROMOHALS, H & G publicidade e SCHLEICH & Co. Cada empresa garante um aumento do lucro para a COMPUNET, mas em ritmos diferentes. Seu trabalho é investigar qual agência é a melhor.

A campanha desenvolvida pela **PROMOHALS** promete um crescimento nos negócios, conforme mostrado no gráfico.



<table>
<tr><td>H & G Adversiting
A campanha da agência de publicidade H & G Adversiting promete um crescimento mensal a uma taxa de 10%. Ou seja, o número de clientes de cada mês é 10% maior que do mês anterior.</td></tr>
<tr><td>A Schleich & Co promete o crescimento mostrado na Tabela.</td></tr>
</table>

Tempo (Meses)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Clientes (Milhares)	10	15	19	23	27	30	32	34	36	38	39	40	41	42	42	43	43

Figura 1: O caso da Compunet
Fonte: Adaptado de Weigand (2014).

A tarefa tem potencial para sustentar uma discussão sobre sequências numéricas particulares: progressão aritmética, no caso da primeira empresa; progressão geométrica, na segunda empresa, e, na terceira empresa, fornece indícios de certa "estabilização" em seus comportamentos. Acreditamos que, ao explorá-la, os estudantes possam "contar com suas experiências anteriores, esboçar uma linha de raciocínio, arquitetar uma resolução de modo autônomo ou com seus pares" (FERREIRA; BURIASCO, 2015, p. 461).

Além disso, busca mobilizar conceitos e processos matemáticos (PONTE, 2014) relacionados com identificação de diferentes tipos de sequências, sua organização de forma recursiva ou por meio do termo geral, observação quanto ao crescimento (porém, com taxas diferentes), variação entre os termos da sequência e uma análise de seu comportamento em curto e longo prazo.

Contexto e Procedimentos Metodológicos da Pesquisa

Os dados aqui apresentados são oriundos da aplicação da tarefa (uma das que compõem nosso ambiente de aprendizagem) a estudantes ingressantes em quatro turmas de cursos de Engenharia no ano de 2016 (duas no 1º semestre e duas no 2º semestre), nas quais os dois primeiros autores deste texto realizaram seu Estágio de Docência, atrelado à elaboração da dissertação. A tarefa foi proposta logo na primeira aula da disciplina, no laboratório de informática. Estavam presentes cerca de 45 alunos, que se organizaram em grupos de três ou quatro integrantes, por eles definidos. Aos estudantes foi disponibilizado um arquivo em uma planilha de dados (Excel) contendo as informações apresentadas na Figura 1. A escolha do formato foi, possivelmente, por tratar-se de um *software* com o qual os estudantes já tinham algum contato, portanto a tecnologia poderia ser um recurso para as tomadas de decisão frente à situação.

Para a coleta de dados, utilizamos a produção escrita dos estudantes, gravações de áudios e vídeos, assim como arquivos dos registros das planilhas. Selecionamos para a análise trechos de diálogos entre alunos de três grupos diferentes (G1, G2 e G3). Em cada trecho transcrito, utilizamos letras (A, B, C...) para referir aos integrantes de cada grupo. A escolha deveu-se à riqueza e à diversidade de elementos presentes nos diálogos, conforme aspectos discutidos na próxima sessão. Nossa análise é de cunho qualitativo e de natureza essencialmente descritiva, o que não permite uma generalização dos resultados, mas possibilita uma reflexão, tomando por base o quadro teórico apresentado.

Análise e Discussão dos Dados

Com a aplicação da tarefa, podemos destacar algumas de suas potencialidades em termos de elementos constituintes do conceito de limite de uma sequência numérica que a discussão ajudou a mobilizar a partir da análise de trechos do diálogo entre três grupos de alunos, assim como elementos que puderam fomentar as discussões coletivas referentes ao modo de lidar com os conhecimentos matemáticos envolvidos no conceito de limite.

O modo como o G1 abordou a tarefa é ilustrado na transcrição a seguir:

Estudante A*: Temos que analisar a mais vantajosa.*
Estudante B*: Sim! Qual o comportamento com que podemos descrever?*
Estudante C*: Tem umas fórmulas que dá para nós descrevermos o comportamento das empresas.*
Estudante A*: A primeira empresa é linear... cresce a juros fixo....sempre 2000 por mês.*
Estudante B*: A segunda dá para representar por juros compostos, alguém lembra a fórmula?*
Estudante C*: A terceira é melhor em curto prazo... a longo ela fica constante.*
Estudante A*: Para acharmos a função, precisamos pegar dois pontos do gráfico.*
Estudante B*: Vamos organizar no arquivo e na folha para a entrega da resolução.*
Estudante A*: A terceira parece com aquelas funções que tende ao infinito.*
Estudante B*: Ela em certo ponto vai para...*

Para o G1, o trabalho em grupo favoreceu que as escolhas de como lidar com uma situação se iniciassem a partir de uma busca por reconhecimento de possíveis padrões de resolução da tarefa, sendo possível reconhecer que seu conhecimento *a priori* foi o ponto de partida para lidar com cada proposta. Isso pode ser observado quando o estudante B questiona qual comportamento pode descrever a situação (em uma tentativa de reconhecer o modelo de cada proposta) e ao obter como resposta (linear e juros compostos, funções que tendem ao infinito). Tarefas que suscitem que os alunos utilizem os seus conhecimentos como pontos de partida para discussão e desenvolvimento de conceitos matemáticos são nosso objetivo e que, por meio delas, os alunos sintam-se convidados a utilizar e desenvolver a Matemática como ferramenta para organizar situações da realidade.

O professor, ao acompanhar o desenvolvimento de uma tarefa em grupo como essa, tem a oportunidade de aproveitar os dizeres de seus alunos para provocar discussões referentes às dificuldades que eles têm ao longo do curso e que irão refletir na construção do conceito de limite. É usual que alguns alunos utilizem as coordenadas de dois pontos de um gráfico para obter um modelo linear para um gráfico não linear, ou, a partir de um modelo algébrico, obter uma representação por segmentos de reta (ou reta), o que é um equívoco. A oportunidade dessa discussão é dada ao estudante A, quando diz: “para acharmos a função, precisamos pegar dois pontos do gráfico” e sua afirmação não é rebatida por seus colegas. De Lange (1999) sugere que os professores devem saber dos problemas de aprendizagem de seus alunos enquanto ensinam, dos seus progressos e do nível de formalidade em que eles estão operando, de modo que possam adaptar as suas estratégias de ensino para atender às necessidades desses alunos.

No que tange à exploração da diferença entre os termos consecutivos da primeira empresa, G1 aponta[10] que o número de clientes da primeira empresa *“*cresce a juros fixo, sempre 2000 por mês”, o que implica em uma sequência de diferenças constante, como explicitado em “Gente a taxa de variação da primeira empresa é constante!*”*. O estudante A afirma: “a terceira parece com aquelas funções que tende ao infinito*”*. Essa afirmação, se verdadeira, implica em um modelo cuja sequência entre os termos consecutivos é crescente (infinito positivo). Pela afirmação seguinte, do estudante B, porém, parece terem entendido que a função no infinito tende para um valor, o que permite discutir uma sequência de diferença que tende a zero. Uma discussão a partir desse trecho favorece ao aluno reconhecer que a estabilidade de um modelo no infinito (ou sua convergência) depende exclusivamente do comportamento da sequência de diferença.

[10] Para simplificar a escrita, referimo-nos em alguns momentos ao grupo como um todo.

No caso do G2, durante a exploração inicial da tarefa, são mobilizados conceitos associados a tipos particulares de sequências numéricas, como ilustrado na transcrição do diálogo a seguir:

> Estudante A: *Gente, a taxa de variação da primeira empresa é constante!*
> Estudante C: *Sim! Da terceira vai diminuindo, acho que para de variar!*
> Estudante A: *Verdade!*
> Estudante B: *A segunda ...cresce a uma taxa percentual constante!*
> Estudante A: *Sim! A primeira é uma P.A. e a segunda uma P.G., mas a terceira continua estranha! Parece que ela para de crescer!*

No trecho destacado acima, os estudantes reconhecem nas duas primeiras situações o comportamento de progressão aritmética e progressão geométrica. Eles mencionam que uma tem uma taxa de variação constante e a outra uma taxa percentual constante, respectivamente. É possível inferir que, para esse grupo de estudantes, a ação de lidar com a primeira e a segunda situação de forma isolada torna a tarefa de baixa demanda cognitiva, pois nelas reconheceram padrões e se concentraram em explicá-los. Por outro lado, ao buscar compreender a terceira situação, foi-lhes exigido um esforço cognitivo para compreenderem seu comportamento, e as respostas estão ligadas a incertezas (*"*acho*"*; *"*a terceira continua estranha*"*).

Nesse trecho, os estudantes não mencionam uma análise em longo prazo, mas indícios de uma análise finita. O professor pode aproveitar a situação para discutir como o comportamento no infinito depende do comportamento da sequência de valores para um número de termos suficientemente grande (para cada faixa de análise, um valor de n diferente vai ser requerido).

Os integrantes do G3 reconhecem a necessidade de avaliar as empresas em curto, médio e longo prazo, conforme diálogo transcrito a seguir:

> Estudante A: *Bom, a análise depende do tempo.*
> Estudante B: *Sim, na verdade do que a empresa precisa!*
> Estudante C: *Isso! Temos que analisar a curto, médio e longo prazo.*
> Estudante A: *Aí depende da Compunet, do que ele precisa, se é algo rápido ou em longo prazo.*

Para lidar com a situação, o grupo construiu tabelas, lado a lado, e gráficos conjuntos que representavam o número de clientes de cada uma das empresas (Figura 2). Destaca-se, porém, que, apesar de apresentar um conjunto de dados discretos em suas tabelas, eles representaram as situações por funções de domínios contínuos.

1	10000	10000,0	10000
2	12000	11000,0	15000
3	14000	12100,0	19000
4	16000	13310,0	23000
5	18000	14641,0	27000
6	20000	16105,1	30000
7	22000	17715,6	32000
8	24000	19487,2	34000
9	26000	21435,9	36000
10	28000	23579,5	38000
11	30000	25937,4	39000
12	32000	28531,2	40000
13	34000	31384,3	41000
14	36000	34522,7	42000
15	38000	37975,0	42000
16	40000	41772,5	43000
17	42000	45949,7	43000
18	44000	50544,7	44000
19	46000	55599,2	44000
20	48000	61159,1	44000

Figura 2: Organização dos dados proposta por G4.
Fonte: autores.

Com base nos elementos apresentados pelos três grupos em suas análises, pode-se inferir que a tarefa potencializou a exploração da variação entre os termos da sequência e uma análise de seu comportamento em curto e longo prazo, elementos necessários à elaboração do conceito de limite de uma sequência numérica. Com isso, definiram que para toda sequência (a_n), à diferença entre seus termos consecutivos pode ser associada uma outra sequência (Δa_n) tal que $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$.

No caso da primeira empresa, os alunos reconheceram uma sequência de diferenças não nula, constante, positiva, o que fez a situação ter um crescimento linear. Sendo crescente, não é possível estabelecer o maior número de clientes que essa primeira empresa vai assumir, pois, à medida que o tempo varia, maior vai ser o número de clientes. Pode-se perceber que eles, intuitivamente, reconheceram que a sequência que representa o número de clientes da primeira situação não possui limite, quando o tempo tende ao infinito, e que se trata de uma sequência divergente.

Para a segunda empresa, reconheceram uma sequência de diferenças crescente, positiva. O professor, nessa situação, pode conduzir os seus alunos a investigar a taxa de variação entre os termos da sequência de diferenças dessa situação, que também é uma sequência positiva e crescente. Essa nova sequência pode auxiliá-los a compreender a concavidade para cima da representação gráfica. Assim, na primeira situação, intuitivamente, disseram que a sequência que representa o número de clientes da segunda situação não possui limite, quando o tempo tende ao infinito, e que se trata de uma sequência divergente.

Na situação que representa a terceira empresa, os alunos reconheceram uma sequência de diferenças positiva, por isso uma representação gráfica crescente. Ao investigarem, porém, a sequência de diferenças da sequência de diferenças, eles perceberam que ela, apesar de positiva, é decrescente, o que faz o gráfico que a representa ser côncavo para baixo. Ainda mais, notaram que essa nova sequência passa a ser, ou tende a um número próximo de zero, que favorece a sequência de clientes a tender para um número "fixo" ao analisar a situação em longo prazo. Assim, no caso da terceira empresa, um gráfico côncavo para baixo, combinado com uma tendência à "estabilização", implica na existência de um limite para a sequência original. Essa tendência à "estabilização" do número de clientes, elemento essencial para elaboração do conceito de limite de uma sequência numérica que a tarefa ajudou a mobilizar, é mencionada em três dos grupos:

*"*parece com aquelas funções que tende[m] ao infinito" / "a longo ela fica constante*"* (G1)

*"*Parece que ela para de crescer*!" (G2)*

"Inicialmente a terceira empresa nos dará o maior número de clientes! [...] Mas depois para!" (G3)

Em suas produções escritas, alguns grupos apresentaram descrições do comportamento gráfico como uma "baixa em seu crescimento", outros, como "torna-se constante". Houve, ainda, descrição em suas produções indicando que a empresa "estabiliza" seu crescimento. Apresentamos duas produções escritas nas Figuras 3 e 4.

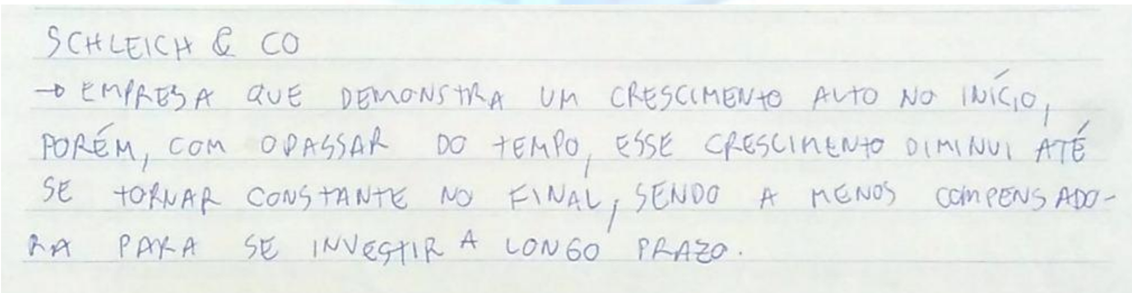

SCHLEICH & CO
→ EMPRESA QUE DEMONSTRA UM CRESCIMENTO ALTO NO INÍCIO,
PORÉM, COM OPASSAR DO TEMPO, ESSE CRESCIMENTO DIMINUI ATÉ
SE TORNAR CONSTANTE NO FINAL, SENDO A MENOS COMPENSADO-
RA PARA SE INVESTIR A LONGO PRAZO.

Figura 3: Produção escrita de um dos grupos[11].
Fonte: autores.

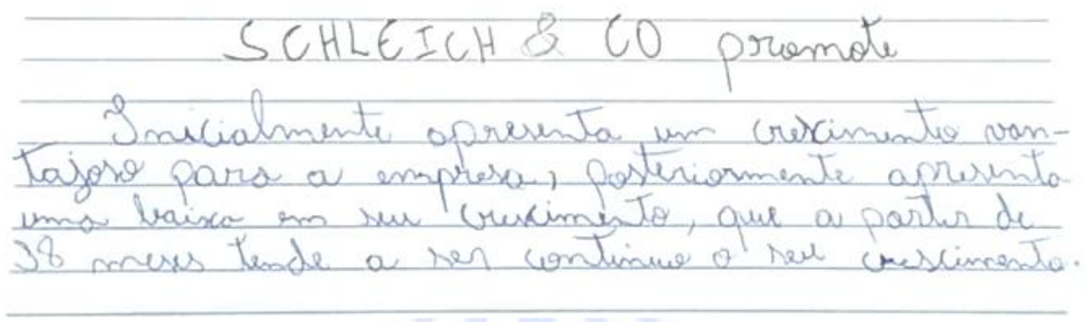


Figura 4: Produção escrita de um dos grupos[12].
Fonte: autores.

As ideias informais subjacentes a essas falas possibilitaram a realização, junto à turma como um todo, de discussões coletivas que foram sistematizados por meio da elaboração de uma definição provisória de sequência convergente. Em tais definições, foi possível problematizar *ideias incompletas ou equivocadas* sobre limites de uma sequência, que corroboram resultados apontados por Przenioslo (2005), tais como: (i) o limite existe se os termos aproximam-se de um ponto, mas não o atingem; (ii) uma sequência convergente é monótona; (iii) se um número infinito de termos de uma sequência aproxima-se de um valor, então a sequência é convergente.

Considerações Finais

Neste artigo, buscamos identificar as potencialidades de uma tarefa proposta a estudantes que cursam a disciplina de CDI 1, cujo contexto é constituído por uma situação realística, em termos de elementos constituintes do conceito de limite de uma sequência numérica que, a partir dela, foram mobilizados. Por meio de dados oriundos das resoluções entregues e de trechos de discussão entre os integrantes de três grupos de alunos, chegamos aos seguintes elementos.

---

[11] Transcrição: "SCHLEICH & CO: Empresa que demostra um crescimento auto no início, porém, com o passar do tempo, esse crescimento diminui até se tornar constante no final, sendo a menos compensadora para se investir em longo prazo".

[12] Transcrição: "SCHLEICH & CO Promote: Inicialmente apresenta um crescimento vantajoso para a empresa, posteriormente apresenta uma baixa em seu crescimento, que a partir de 18 meses tende a ser continua em seu crescimento".

i) Identificação de diferentes tipos de sequências. Os grupos foram capazes de reconhecer comportamentos do tipo linear e exponencial, no caso da primeira e da segunda empresa, respectivamente.

ii) Discussão de possíveis formas de organizações dos seus termos, forma recursiva ou por meio do termo geral.

iii) Observação do "modo" de crescimento dos dados. Embora as três sequências sejam crescentes, o "modo" como crescem (uma ideia informal de taxa de variação) é diferente, o que implica em três representações gráficas diferentes: reta, curva côncava para cima e côncava para baixo.

iv) Análise da diferença na variação entre os termos das sequências e de seu comportamento em curto e longo prazo.

De forma geral, conforme apontado por Stein e Smith (2009, p. 105), os dados coletados indicam que essa tarefa, pensada como "um segmento da atividade da sala de aula dedicada ao desenvolvimento de uma ideia matemática particular" (no caso, o estudo de sequências numéricas), evidenciou, segundo os dados analisados, compreensão acerca de elementos constituintes do conceito de limite de uma sequência numérica que, a partir da socialização feita pelas equipes, puderam ser sistematizados e tomados como ponto de partida nas aulas subsequentes.

A organização da tarefa como suporte para o trabalho em episódios de resolução de tarefas proporcionou aos estudantes participação ativa, tanto na resolução quanto nos momentos de discussão que levaram à sistematização de elementos constituintes do conceito de limite de uma sequência numérica. Sua resolução não exigiu a manipulação de procedimentos considerados rotineiros, nem pressupôs que estudantes recorressem a uma estratégia "pronta e acabada", podendo ser resolvida por diferentes estratégias e fazendo uso de diferentes procedimentos. Em vez de fornecer explicações ou apresentar definições, no momento da resolução da tarefa, o papel do professor foi incentivar os grupos a apresentar e discutir suas ideias.

Elaborar/adaptar uma tarefa requer do professor responsável pela turma um olhar para as potencialidades que dela possam emergir. A tarefa em tela apresentou potencialidades em termos dos objetivos a ela associados, servindo como desencadeadora de discussões para posterior estudo de funções de domínio discreto e contínuo. Por meio da análise realizada, foi possível identificar características que aproximam esse episódio de resolução de tarefas como exitoso, o que nos permite concluir que a tarefa foi suficientemente clara quanto aos objetivos que pretendia alcançar.

Agradecimentos

Agradecemos ao CNPq pelo financiamento por meio do Edital Universal 14/2014 (Processo 457765/2014-3).

Referências

BORBA, M. C.; SILVA, R.; GADANIDIS, G. **Fases das Tecnologias Digitais em Educação Matemática:** Sala de aula e internet em movimento. 1. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2014.

CABRAL, T. C. B. **Contribuições da Psicanálise à Educação Matemática**. A lógica da intervenção didática em processos de aprendizagem. Tese (Doutorado em Educação). Universidade de São Paulo, São Paulo, 1998.

____. **Vicissitudes da aprendizagem em um Curso de Cálculo**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). PPGEM-IGCE-UNESP. Rio Claro, 1992.

COUTO, A. F.; FONSECA, M. O. S.; TREVISAN, A. L. Aulas de Cálculo Diferencial e Integral organizadas a partir de episódios de resolução de tarefas: um convite à insubordinação criativa. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática (REnCiMa)**, v. 8, n. 4, p. 50-61, 2017.

FERREIRA, P. E. A.; BURIASCO, R. L. C. Enunciados de Tarefas de Matemática Baseados na Perspectiva da Educação Matemática Realística. Rio Claro, **Bolema**, v. 29, n. 52, p. 452-472, 2015.

FONSECA, M.O.S. **Proposta de Tarefas para um Estudo Inicial de Derivadas**. 2017. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2017.

LAUDARES, J. B. O conceito e a definição em matemática: aprendizagem e compreensão. Encontro Nacional de Educação Matemática, 2013. Curitiba. **XI ENEM**, 2013.

MOISE, E. E. **Cálculo: um curso universitário** - volume 1 - tradução de Dorival A. Mello e Renate G. Watanabe sob coordenação de Elza Furtado Gomide. São Paulo: Edgar Blücher, 1972.

PALHA, S.; DEKKER, R.; GRAVEMEIJER, K.; VAN HOUT-WOLTERS, B. Developing shift problems to foster geometrical proof and understanding. **The Journal of Mathematical Behavior**, Springer, v. 32, p. 141-159, 2013.

PALHA, S.; DEKKER, R.: GRAVEMEIJER, K. The effect of shift-problem lessons in the mathematics classroom. **International Journal os Science and Mathematics Education. Ministry of Science and Technology**, Taiwan, v. 13, p. 1589-1623, 2015.

PONTE, J. P. da. Tarefas no ensino e na aprendizagem da Matemática. PONTE, J. P. da (Org.). **Práticas Profissionais dos Professores de Matemática**. Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, 2014. p.13 – 27.

PRZENIOSLO, M. Introducing the concept of convergence of a sequence in secondary school. **Educational Studies in Mathematics**, v. 60, p. 71-93, 2005.

RAMOS. N.S. **Sequências Numéricas como Desencadeadoras do Conceito de Convergência**: Episódios de Resolução de Tarefas. 2017. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2017.

RASMUSSEN, C; MARRONGELLE, K; BORBA, M. C**.** Research on calculus: what do we know and where do we need to go? **ZDM**, v. 46, p. 507–515, 2014.

REZENDE, W. M. Uma análise Histórica-Epistêmica das Operações de Limite. Dissertação de Mestrado. **Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Santa Úrsula**. Rio de Janeiro, 1994.

SAD, L. A. Articulações epistemológicas relativas ao Cálculo Diferencial e Integral. **O Modelo dos Campos Semânticos**: estabelecimento e notas de teorizações. In: ANGELO, C. L. et al (org.). Modelo dos Campos Semânticos e Educação Matemática: 20 anos de história. São Paulo: Midiograf, 2012. p. 31-52.

SAD, L. A. **Cálculo Diferencial e Integral**: uma abordagem epistemológica de alguns aspectos. 371p. Tese de Doutorado (em Educação Matemática), PPGEM-IGCE-UNESP. Rio Claro, 1999.

STEIN, M. H.; SMITH, M. S. Tarefas matemáticas como quadro para reflexão. **Educação e Matemática,** n.105, 2009, p. 22 - 28.

TOEPLITZ, O. **The Calculus, a Genetic Approach**. Chicago: University of Chicago Press, 1963.

THOMPSON, S. P.; GARDNER, M. **Calculus Made Easy**. New York: St. Martin's Press, 1998 (publicado em 1910, como F.R.S – Fellow of the Royal Society).

TREVISAN, A. L.; MENDES, M. T. Ambientes de ensino e aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral pautados em episódios de resolução de tarefas: uma proposta de caracterização**. Revista Brasileira de Ensino e Tecnologia**, Ponta Grossa, v. 11, n. 1, p. 209-277, 2018.

TREVISAN, A. L.; MENDES, M. T. Integral antes de derivada? Derivada antes de integral? E limite, no final? Uma proposta para organizar um curso de Cálculo. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 19, n. 3, p. 353-373, 2017.

TREVISAN, A. L.; BORSSOI, A. H.; ELIAS, H. R. Delineamento de uma sequência de tarefas para um ambiente educacional de cálculo. In: **Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**, 6, 2015, Pirinópolis. Anais... Brasília: SBEM, 2015. p. 1-12.

TREVISAN, A. L; BURIASCO, R. L. C. Educação Matemática Realística: uma abordagem para o ensino e a avaliação em Matemática. **Revemat:** Revista Eletrônica de Educação Matemática, v. 10, p. 167-184, 2015.

VILLARREAL, M. E. **O pensamento matemático de estudantes universitários de cálculo e tecnologias informáticas.** 1999. 388f. Tese (Doutorado em Educação Matemática)- Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, SP, 1999.

WEIGAND, H. G. A discrete approach to the concept of derivative. **ZDM,** v.46, p. 603-619, 2014.

WEIGAND, H.-G. Sequences-basic elements for discrete mathematics. **ZDM**, n. 36, v.3, p. 91-97, 2004.

Submetido em Abril de 2018

Aprovado em Agosto de 2018