

**Análise de Erros na Produção dos Alunos na Prova da 12^a
edição da OBMEP: o Caso das Escolas do Oeste do Estado
do Pará - Brasil**

**Error Analysis in the production of Students in the 12th
edition of OBMEP: the Case of the Schools from Western
Pará State - Brazil**

Rodrigo Medeiros dos Santos¹

Mario Tanaka Filho²

Michael Machado de Moraes³

RESUMO

O objetivo desta investigação foi analisar erros cometidos na prova da 12^a edição da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas-OBMEP por alunos das escolas públicas da região Oeste do Pará que estavam cursando o 8^o e 9^o anos do Ensino Fundamental, na perspectiva da metodologia de análise de erros. Para tanto, foi tomada uma amostra de 620 provas de um universo de 1477. O assunto avaliado foi Aritmética (números e operações), abordado na questão 4 da referida prova. A partir da análise das soluções, os erros foram classificados de acordo com o seu tipo (erros devido à má interpretação, deficiência nos conceitos básicos, desconhecimento de múltiplos e sequências numéricas e aplicação de conhecimento equivocado) e alguns exemplos foram examinados e discutidos. Os principais resultados apontam fragilidades no aprendizado dos conteúdos de múltiplos, divisores e operações básicas, assim como estratégias de resolução mal utilizadas, além de dificuldades apresentadas pelos alunos na interpretação do comando da questão.

PALAVRAS-CHAVE: Análise de Erros. OBMEP. Aritmética.

ABSTRACT

¹ Doutor; Universidade Federal do Oeste do Pará/Ufopa. Santarém-PA. Brasil. E-mail: rodrigomedeiros182@hotmail.com; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9108-9826>.

² Doutor; Universidade Federal do Oeste do Pará/Ufopa. Santarém-PA. Brasil. E-mail: tanakafi@gmail.com. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3934-7290>.

³ Mestre; Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Amapá/IFAP. Laranjal do Jari-AP. Brasil. E-mail: mychaell.moraes@gmail.com. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2201-2910>.



The objective of this investigation was to analyze errors made in the twelfth test of the Brazilian Olympiad of Mathematics in Public Schools-OBMEP by students of the public schools from Pará's western region, who were in the 8th and 9th grades of elementary school, in the perspective of Error analysis methodology. For this purpose, a sample of 620 tests from a universe of 1477 was taken. The subject evaluated was Arithmetic (numbers and operations), discussed in question 4 of the test. From the analysis of the solutions, the errors were classified according to their type (errors due to misinterpretation, deficiency in basic concepts, unfamiliarity with multiples and numerical sequences and application of mistaken knowledge) and some examples were examined and discussed. The main results point to fragilities in the learning of multiples, divisors and basic operations, as well as strategies of resolution misused, besides difficulties presented by the students in the interpretation of the command of the question.

KEYWORDS: Error Analysis. OBMEP. Arithmetic

Introdução

A análise das produções dos estudantes ocupa – ou deveria ocupar – posição de grande destaque na prática de professores e pesquisadores do ensino. Essa análise funciona não apenas como meio de diagnosticar o desempenho (avaliação), mas também como parâmetro norteador da prática docente, que, por sua vez, inclui, além da dimensão avaliativa, as dimensões do planejamento e do ensino em si.

De fato, a análise das respostas dos alunos pode ser enfocada tanto como metodologia de ensino, quando empregada em sala de aula com o fim de promover o ensino partindo de erros detectados e levando os alunos a questionar suas respostas (CURY, 2007), quanto como metodologia de pesquisa, na perspectiva da investigação dos processos e elaborações subjetivas do aluno, seus erros mais recorrentes, estratégias de resolução empregadas etc. Neste artigo, nosso foco está mais na segunda abordagem, notadamente na perspectiva da análise de erros.

Popularizada no Brasil pelas pesquisas de Helena Noronha Cury⁴, a análise de erros, em termos gerais, consiste em diligenciar uma atenção especial à produção escrita dos alunos, com o intuito de compreender o seu raciocínio, principalmente no contexto de respostas erradas. Buscam-se diagnósticos e elementos que possam ajudar a compor modelos de raciocínio empregados nas soluções, assim como a análise de métodos de resolução e aplicação de conhecimento prévio (relações, construção de hipóteses, inferências, simulações etc.).

Nossa análise foi desenvolvida em cima das produções apresentadas na prova da 12ª edição da OBMEP. A olimpíada é um projeto de inclusão social que objetiva descobrir, incentivar e reconhecer talentos em processo de formação nas

⁴ Sobretudo a partir de Cury (1988), em sua dissertação mestrado, na qual a autora aborda a Análise de Erros em demonstrações de geometria plana no contexto universitário.

diversas áreas do conhecimento em todo território nacional. Vem sendo realizada desde 2005 pelo Ministério da Educação (MEC), pelo Ministério de Ciências e Tecnologia (MCT), em parceria com o Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) e a Sociedade Brasileira de Matemática (SBM). O público alvo da OBMEP é composto de alunos do 6º ano do Ensino Fundamental até o último ano do Ensino Médio, com ampla participação em todo o território nacional (BRASIL, 2017).

Este estudo apura e examina as soluções apresentadas por alunos do 8º e 9º anos do Ensino Fundamental na questão 04 da prova da 12ª edição da OBMEP (Nível 2⁵), que envolve o conteúdo de Aritmética⁶. A partir da averiguação das soluções apresentadas, buscamos analisar os erros cometidos na perspectiva da metodologia de análise de erros.

Análise de Erros

Ao analisarmos as produções escritas dos alunos, estamos avaliando sobretudo o conteúdo dessa produção. Em outras palavras, estamos empregando uma metodologia de análise de dados conhecida como análise de conteúdo. Em termos gerais, a análise de conteúdo pode ser definida como

(...) um conjunto de técnicas de análise que visa obter, por meio de procedimentos sistemáticos, indicadores quantitativos ou qualitativos que permitam a inferência de conhecimentos relativos à produção/recepção de mensagens. Trata-se, em última instância, de um esforço de interpretação que oscila entre o rigor da objetividade e a fecundidade da subjetividade (CASTRO, ABS e SARRIERA, 2011, p. 816).

Por sua definição ampla, está sujeita a diversas formas de operacionalização. Serviram-nos de parâmetro de balizamento para esta pesquisa as ideias de Bardin (1979), que sugere que essa operacionalização se dê em três momentos principais. O primeiro corresponde à pré-análise, quando são definidas as hipóteses, os objetivos delineados e os indicadores de critério de análise que serão utilizados. Nessa fase, é feita uma leitura “flutuante” na qual “o pesquisador se deixa impregnar pelo material” (CURY, 2007, p. 65).

⁵ A organização da OBMEP categoriza os participantes em três níveis, de acordo com o grau de escolaridade, a saber: Nível 1 – 6º ou 7º ano do Ensino Fundamental; Nível 2 – 8º ou 9º ano do Ensino Fundamental; e nível 3 – Ensino Médio.

⁶ Conforme nos aponta Cury (2007), em um levantamento de 40 pesquisas brasileiras sobre a análise de erros, o conteúdo de Aritmética tem sido bastante explorado em investigações que envolvem a análise da produção de alunos do Ensino Fundamental.

O segundo momento corresponde à exploração do material, e refere-se à transformação do dado bruto (evidência original) em estrutura de manifestação do dado – em nosso caso, recortes semânticos das respostas, categorização dos erros observados e, por fim, a devida enumeração dessas categorias, que considera, dentre outras coisas, o entendimento teórico prévio sobre a emergência ou não de significados nas respostas analisadas.

Por fim, o terceiro momento, que consiste no tratamento dos resultados, fase na qual ocorre a descrição das categorias, com a apresentação dos quadros e tabelas produzidos na forma de distribuições de frequência das classes, ou mesmo a aplicação de testes estatísticos padronizados. Procede-se, então, na interpretação das produções, buscando atingir uma compreensão mais aprofundada das resoluções apresentadas mediante inferências no campo subjetivo do aluno, na busca de novas compreensões e possíveis diagnósticos.

Concordamos com Santos (2015), Castro, Abs e Sarriera (2011) e Fiorentini e Lorenzato (2009) na ideia de que operacionalizar uma análise dessa natureza, sobretudo com a elaboração de categorias que descrevam os erros, é um exercício, a um só tempo, dedutivo, na medida em que é operacionalizado com base em conhecimentos prévios (notadamente nos resultados obtidos em outras investigações); e indutivo, com os conceitos, significados e categorias emergindo dos dados. Trata-se também de um esforço essencialmente interpretativo, que se constitui não apenas na coleta e análise de dados, mas sobretudo na produção de novos dados a partir das análises engendradas.

Assim, podemos dizer que a análise de erros é uma proposta investigativa que, metodologicamente, se baseia na análise de conteúdo, tal qual versam os princípios metodológicos estabelecidos por Bardin (1979). Ao elencar os tipos de documentos passíveis de compor uma pesquisa dessa natureza, a autora aponta, por exemplo, as respostas a questionários, relatos de experiência e sobretudo testes ou provas discursivas.

Embora a análise da produção escrita dos alunos possa comumente ser confundida com procedimentos de avaliação diagnóstica – e é fato que as duas atividades possuem suas interseções –, existem algumas importantes diferenças. A primeira, mais óbvia, consiste no fato de que a análise da produção não visa a atribuição de conceito ou nota; a segunda diferença reside nos objetivos intrínsecos. Enquanto que, na avaliação diagnóstica, os erros são descartados e os acertos são recompensados com uma pontuação padronizada, necessária à progressão entre as

séries, na análise de erros, o que conta não é o acerto ou o erro em si, mas as formas de se apropriar de um determinado conhecimento, que, por sua vez, podem evidenciar tanto dificuldades de aprendizagem, como o diagnóstico de possíveis obstáculos didáticos.

Procedimentos Metodológicos

Esta pesquisa é classificada como descritiva, segundo seus objetivos, uma vez que busca “descrever ou caracterizar com detalhes uma situação, um fenômeno ou um problema” (FIORENTINI, LORENZATO, 2009, p. 70). Segundo o processo de coleta de dados, é caracterizada como documental, já que se vale de documentos que não receberam avaliação analítica prévia⁷.

Os sujeitos da pesquisa são os alunos das escolas públicas da região Oeste do Pará que estavam cursando o 8º e 9º anos do Ensino Fundamental em 2016 e participaram da segunda fase da prova da 12ª edição da OBMEP, realizada no dia 10 de setembro de 2016.

O corpus de análise da pesquisa foi composto por uma amostra retirada de um total de 1477 provas. A amostra foi obtida com base no cálculo de tamanho amostral para a estimação intervalar da proporção, a partir da técnica de amostragem proporcional estratificada, na qual as cidades integrantes da região pesquisada foram tomadas como estratos. Foram retiradas amostras de tamanho diretamente proporcional ao tamanho dos estratos populacionais. Desta forma, procedemos no cálculo do tamanho da amostra, como dado pela expressão (1).

$$n_0 = \frac{z_{\alpha/2}^2 p^* (1-p^*)}{E^2}, \quad (1)$$

onde n_0 é o tamanho da amostra para uma população desconhecida ou infinita; $z_{\alpha/2}^2$ corresponde ao grau de confiança, dado pelo nível de confiança (α , a taxa de sucesso do procedimento); p^* é a proporção populacional dos indivíduos que pertencem às categorias que estamos interessados em estudar⁸; e E é a margem de erro, ou erro máximo desejado. Assim, para $\alpha = 95\%$, $z_{\alpha/2}^2 = 1,96$, $p^* = 0,5$ e $E = 3\%$, a expressão (1) fica:

⁷ Em contraste com a pesquisa bibliográfica, que é aquela que se vale de materiais já elaborados, tais como livros, teses, artigos etc.

⁸ Quando o verdadeiro valor de p^* é desconhecido na população, é prudente usar a adivinhação conservadora $p^* = 0,5$. O tamanho amostral (n_0) não se altera muito quando se muda p^* , desde que p^* não esteja muito afastado de 0,5.

$$n_0 = \frac{1,96^2 \cdot 0,5(1-0,5)}{(0,03)^2} = 1067,111 \quad (2)$$

Para tamanho de população conhecido, tomamos o fator de correção dado por:

$$n = \frac{n_0 N}{n_0 + N - 1}, \quad (3)$$

onde n representa o verdadeiro tamanho da amostra e N é o tamanho da população. Assim, ao tomarmos (2) e (3) conjuntamente, obtemos:

$$n = \frac{1067,111 \cdot 1477}{1067,111 + 1476} = 619,7618 \cong 620 \quad (4)$$

De posse do tamanho da amostra n calculado na expressão (X.4), procedemos na coleta da amostra segundo os procedimentos de amostragem proporcional estratificada. Os tamanhos de cada estrato populacional (N), a sua proporção (p) e os seus respectivos tamanhos amostrais (n) são apresentados na Tabela 1.

Tabela 1: Estratos (cidades), tamanhos populacionais (N), proporções (p) e tamanhos amostrais (n) para uma amostra de tamanho 620 provas da OBMEP.

Cidade	N	P	n	Cidade	N	P	N
Alenquer	72	0.049	30	Mojuí dos Campos	18	0.012	8
Almerin	28	0.019	12	Monte Alegre	101	0.068	42
Altamira	95	0.064	40	Novo Progresso	23	0.016	10
Anapú	25	0.017	10	Óbidos	86	0.058	36
Aveiro	21	0.014	9	Oriximiná	73	0.049	31
Belterra	21	0.014	9	Pacajá	50	0.034	21
Brasil Novo	21	0.014	9	Placas	23	0.016	10
Cachoera da Serra	4	0.003	2	Porto de Moz	12	0.008	5
Castelo dos Sonhos	7	0.005	3	Prainha	69	0.047	29
Curuá	29	0.020	12	Rurópolis	22	0.015	9
Curuai	9	0.006	4	Santarém	359	0.243	151
Faro	7	0.005	3	Senador José P.	18	0.012	8
Itaituba	73	0.049	31	Terra Santa	21	0.014	9
Jacareacanga	16	0.011	7	Trairão	11	0.007	5
Juruti	94	0.064	40	Uruará	8	0.005	3
Medicilândia	31	0.021	13	Vitória do Xingú	30	0.020	13
				Total	1477	1	620

Fonte: Os autores (2018).

Das provas analisadas na amostra, foi selecionada uma questão que versa sobre o conteúdo de Aritmética. A escolha desse conteúdo se deu em função dele apresentar importantes conceitos iniciais de base, tais como operações básicas, fatoração, mínimo múltiplo comum, sistema de base posicional, dentre outros.

Também estamos em consonância com os Parâmetros Curriculares Nacionais-PCN (BRASIL, 1998), quando afirmam que é importante salientar que não se pode configurar o abandono da Aritmética nos anos finais do ensino Fundamental. O documento ainda ressalta que os problemas aritméticos praticamente não são postos como desafios aos alunos desses anos e que as situações trabalhadas geralmente privilegiam apenas os conceitos algébricos.

As resoluções foram, então, analisadas e categorizadas segundo o tipo de erro cometido. Para tanto, procedemos na elaboração de um sistema categórico próprio. Naturalmente que o processo classificatório de erros apresenta um alto grau de complexidade, na medida em que se faz necessário um mergulho no universo subjetivo do pensamento do aluno, na análise de suas intenções e estratégias particulares de resolução. Interpretar objetivamente esse fenômeno e propor um sistema categórico adequado que dê conta de descrever e explicar a variedade de erros cometidos em uma determinada questão é uma tarefa difícil, pois a manifestação do erro ocorre a partir de uma multiplicidade de causas que, na prática, são geralmente muito difíceis de perceber ou descrever com precisão. Daí que reconheçamos a fragilidade da proposta de um sistema categórico de erros que, por sua vez, engloba, dentre outras coisas, a nossa interpretação pessoal do raciocínio do aluno bem como as limitações da nossa visão e entendimento a respeito do seu universo cognitivo.

De qualquer forma, na busca de objetivar nossa análise, desenvolvemos um sistema classificatório de erros e categorizamos as resoluções dos alunos segundo aquilo que se manifestou a nós como ênfase, dentro do limitado espectro perceptível em cada caso. A análise e discussão dos resultados são apresentadas na seção seguinte.

Análise e Discussão dos Resultados

Iniciamos a discussão reproduzindo o enunciado da questão 4, da prova da 12ª edição da OBMEP-2016 – Nível 2.

(OBMEP - 2016) Questão 4⁹ *Na figura, as letras A e B representam os possíveis algarismos que tornam o produto dos números 2A5 e 13B um múltiplo de 36.*

Figura 1 – Ilustração da questão 4

⁹ A solução para a questão 4 foi divulgada pela organização da OBMEP em seu portal e está disponível em: <http://www.obmep.org.br/provas.htm>.



Fonte: 2ª fase da 12ª edição da OBMEP.

- a) Em todos os possíveis resultados para o produto desses números, o algoritmo das unidades é o mesmo. Qual é esse algoritmo?
- b) Quais são os possíveis valores de B?
- c) Qual é o maior valor possível para esse produto?

Como a questão 4 da prova possui três itens (a, b e c), da amostra de 620 provas analisadas, resulta um total de $3 \times 620 = 1860$ resoluções, entre respostas certas, erradas e em branco. A Tabela 2 apresenta a distribuição de frequências para as 1860 respostas corretas, erradas e em branco da questão 4 da 2ª fase da 12ª edição da OBMEP- Nível 2, realizada em 2016.

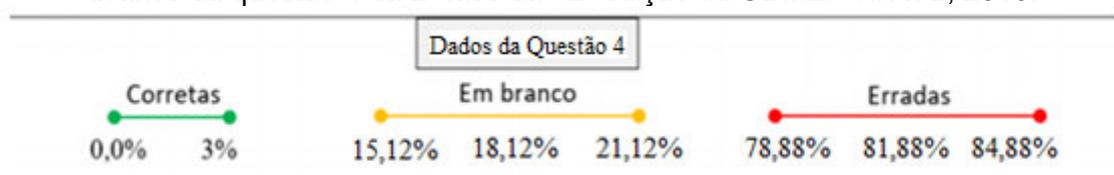
Tabela 2: Frequências de respostas corretas, erradas e em branco, por item, da questão 4 da 2ª fase da 12ª edição da OBMEP-nível 2, 2016.

Respostas	Item a)		Item b)		Item c)		Total	
	fi	fr (%)	fi	fr (%)	fi	fr (%)	fi	fr (%)
Corretas	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00
Em branco	123	19.84	99	15.97	115	18.55	337	18.12
Erradas	497	80.16	521	84.03	505	81.45	1523	81.88
Total	620	100.00	620	100.00	620	100.00	1860	100.00

Fonte: Os autores (2018).

A partir da Tabela 2, estabelecemos as estimativas intervalares para um nível de confiança de 95% e margem de erro de 3%. A Figura 2 apresenta os intervalos de confiança construídos.

Figura 2 – Intervalos de confiança para as estimativas de respostas corretas, erradas e em branco da questão 4 da 2ª fase da 12ª edição da OBMEP-Nível 2, 2016.



Fonte: Os autores (2018).

A partir da análise da Tabela 2 e da Figura 2, verificamos que não houve acertos para a questão 4 da prova em nenhum item. 18,12% do total das respostas ficou em branco (margem de erro de $\pm 3\%$). E, por fim, uma estimativa populacional de 80,84% para as respostas erradas, com uma margem de erro de três pontos percentuais para mais e para menos. Cada item (a, b e c), por sua vez, também manteve estimativas próximas de 80% para a proporção populacional. As discussões são, portanto, engendradas em cima das 1523 respostas erradas ($81,88\% \pm 3\%$), que são o objeto de nossa análise nesse estudo.

Para tanto, conduzimos as discussões seguindo um roteiro de análise preestabelecido de acordo com a seguinte ordenação: primeiramente, apresentamos as classes de erro identificadas nas tentativas de resolução da questão e as respectivas categorias de resposta. As classes de erro, mais gerais e abrangentes, explicitam a natureza do erro cometido, enquanto que as categorias de resposta destacam de forma mais específica as ações tomadas pelo aluno ao tentar solucionar a questão. Em seguida, enumeramos as principais habilidades necessárias à resolução da questão. E, por fim, selecionamos alguns exemplos de tentativas de resolução observadas no corpus de análise da pesquisa e discutimos as estratégias de solução utilizadas à luz da teoria da análise de erros. Buscamos examinar e compreender o pensamento do aluno ao propor determinada solução, discutir as perspectivas emergentes e produzir conhecimentos a partir desse processo.

A amostra de 620 provas foi analisada e os erros categorizados segundo o seu tipo, originando aquilo que denominamos aqui de classes de erro. Ao todo, identificamos quatro principais classes, não necessariamente disjuntas entre si. Naturalmente os erros podem se manifestar em uma escala abrangente possibilitando que uma mesma tentativa de solução possa se enquadrar em duas ou mais classes de erros distintas. No ímpeto de produzir dados objetivos que nos ajudassem a explicar e descrever o fenômeno estudado, buscamos categorizar cada resolução em uma única classe segundo as ênfases percebidas nos erros.

A Tabela 3 explicita as classes de erro e as categorias de respostas para as 1523 resoluções analisadas.

Tabela 3: Classes de erro e categorias de respostas para as 1523 respostas analisadas nas provas da 12ª edição da OBMEP- Nível 2, 2016.

Classes de erro	Categorias de respostas	fi	fr(%)
Erro relacionado à má interpretação	Discorda do enunciado	4	0.26
	Resposta sem justificativa	1029	67.56
Subtotal		1033	67.83
Erro relacionado à deficiência nos conceitos básicos	Algarismo com mais de um dígito	104	6.83
	Tenta operar com as incógnitas	10	0.66
	O aluno atribui um valor a A e B e o repete	21	1.38
	Resposta em função de A e B	220	14.45
	Atribui valores, faz a multiplicação errado	8	0.53
Subtotal		363	23.83
Erro relacionado ao desconhecimento de múltiplos e sequências numéricas	Não compreende o conceito de múltiplo	34	2.23
	Atribui valores para A e B, erra as operações	47	3.09
	Acertou ao menos um possível valor de B	12	0.79
	Lista todos os algarismos	14	0.92
Subtotal		107	7.03
Erro relacionado à aplicação de conhecimento equivocado	Usa algarismos romanos	11	0.72
	Toma o maior algarismo e efetua o produto	3	0.20
	36 porque ele é múltiplo dele	6	0.39
Subtotal		20	1.31
Total		1523	100.00

Fonte: Os autores (2018).

A partir da análise da Tabela 3, verificamos que o tipo de erro mais recorrente está relacionado à má interpretação do comando da questão, que corresponde a mais da metade das soluções analisadas (67,83%). Esse fato é digno de destaque, porque implica que a maioria dos alunos não conseguiu sequer alcançar o que solicitava o comando da questão, o que os levou invariavelmente a tomar duas medidas, discordar do enunciado ou simplesmente apresentar resposta sem justificativa. Na seção de conceitos e procedimentos envolvendo números e operações, os PCN estimulam a

(...) *interpretação* (...) de situações-problema, compreendendo diferentes significados das operações envolvendo números naturais, inteiros e racionais, reconhecendo que diferentes situações-problema podem ser resolvidas por uma única operação e que eventualmente diferentes operações podem resolver o mesmo problema (BRASIL, 1998, p. 71, grifo nosso).

Os PCN também pregam o estímulo ao “estabelecimento de relações entre números naturais, tais como ‘ser múltiplo de’ e ‘ser divisor de’” (BRASIL, 1998, p. 71). Verificamos que 7,03% dos erros cometidos estavam diretamente relacionados com o desconhecimento dos conceitos de múltiplos e sequências numéricas. A

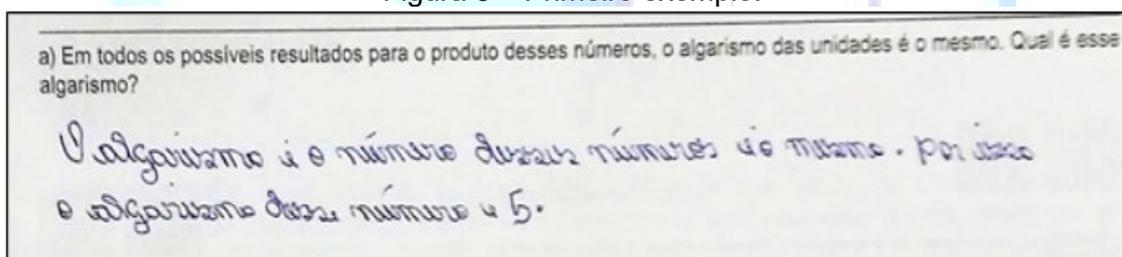
deficiência no domínio de conceitos básicos esteve presente em 23,83% das respostas erradas, enquanto que 1,31% dos casos analisados continham erro relativo à aplicação de conhecimento equivocado.

A seguir, elencamos as habilidades necessárias para a resolução da questão 4 da prova. Essas habilidades foram atribuídas de acordo com a solução divulgada pela organização da OBMEP e apresentam-se explicitadas abaixo:

- a) identificar o algarismo das unidades de número natural;
- b) saber quando o número é múltiplo de 5;
- c) saber quando um número é múltiplo de 36;
- d) conhecer o critério de divisibilidade por 4;
- e) conhecer o critério de divisibilidade por 3;
- f) conhecer o critério de divisibilidade por 9;
- g) saber fatorar um número natural;
- h) ter domínio das operações elementares envolvendo números naturais.

De posse das habilidades elencadas, tomamos alguns exemplos de soluções retiradas do corpus de análise da pesquisa com o intuito de avaliá-las e discuti-las. Buscamos examinar em minúcia os passos apresentados em cada solução no ímpeto de compreender os mecanismos e estratégias de resolução empregados pelos alunos.

Figura 3 – Primeiro exemplo.



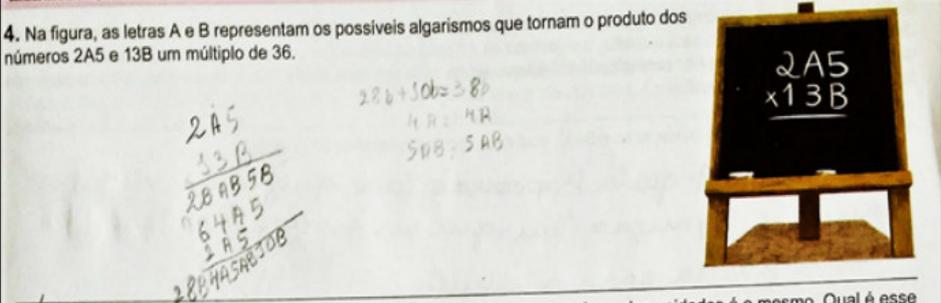
Fonte: Provas resolvidas, 12ª edição da OBMEP – Municípios do Oeste do Pará.

O exemplo apresentado na Figura 3 é classificado como erro relacionado à má interpretação. Na resposta apresentada o aluno aparenta não compreender o enunciado. O comando da questão indica que o algarismo das unidades obtido do produto entre os valores apresentados é o mesmo, porém o aluno parece entender que o algarismo das unidades dos dois valores que serão multiplicados (2A5 e 13B) são os mesmos, afirmando que a resposta é 5, pois 5 é o algarismo das unidades de 2A5.

Na Figura 4 a seguir, apresentamos um exemplo de erro relacionado à deficiência nos conceitos básicos.

Figura 4 – Segundo exemplo.

4. Na figura, as letras A e B representam os possíveis algarismos que tornam o produto dos números 2A5 e 13B um múltiplo de 36.



a) Em todos os possíveis resultados para o produto desses números, o algarismo das unidades é o mesmo. Qual é esse algarismo?

não é o mesmo, ficam 28b, 4A, 6Ab como resultado do produto desse número.

Fonte: Provas resolvidas, 12^a edição da OBMEP – Municípios do Oeste do Pará.

Nesta solução, percebe-se que a estratégia empregada foi utilizar o algoritmo da multiplicação. É possível que essa escolha tenha sido incentivada pela imagem que acompanha o enunciado. O aluno opta por fazer a multiplicação com as letras (A e B), o que gerou dificuldades, uma vez que ele usou propriedades da adição e da multiplicação (distributiva e associativa) para justificar os passos, porém estas não são validas da forma que foram tomadas no algoritmo (tratando os algarismos como termos de uma equação). Assim, como resultado do produto, é obtida uma expressão dada em função de A e B, que é apresentada como resposta (incorreta). Ao sugerir uma solução baseada no algoritmo da multiplicação, ao invés de conjecturar possíveis valores para A e B que pudessem satisfazer as condições do problema a partir da utilização de critérios de divisibilidade, fica evidente a busca de uma solução mais algébrica, que possa satisfazer todas as condições impostas. Naturalmente, os argumentos adotados mostram-se frágeis na medida em que o algoritmo da multiplicação tomado não se adequa na presença de incógnitas substituindo os algarismos.

A seguir, apresentamos na Figura 5 um exemplo de erro relacionado ao desconhecimento de múltiplos e sequências numéricas.

Figura 5 – Terceiro exemplo.

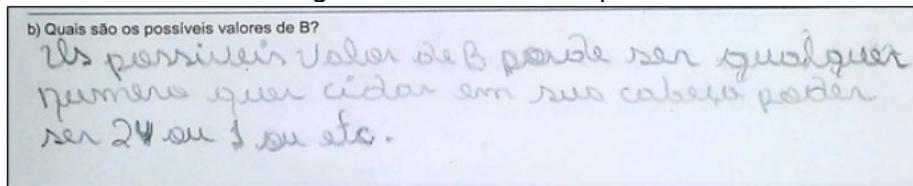
a) Em todos os possíveis resultados para o produto desses números, o algarismo das unidades é o mesmo. Qual é esse algarismo? *2 pois ele é múltiplo de 36.*

Fonte: Provas resolvidas, 12^a edição da OBMEP – Municípios do Oeste do Pará.

Neste exemplo, podemos notar que, ao responder “2 pois ele é múltiplo de 36”, o aluno demonstra tanto a falta de compreensão a respeito do conceito de

múltiplo de um número, como também parece fazer uma confusão entre os conceitos de múltiplo e divisor.

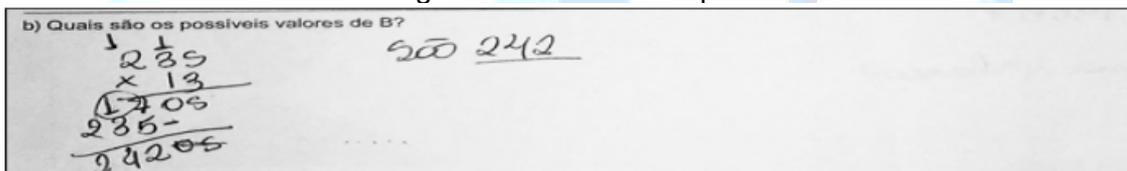
Figura 6 – Quarto exemplo.



Fonte: Provas resolvidas, 12ª edição da OBMEP – Municípios do Oeste do Pará.

Na solução exposta, o aluno afirma que o algarismo B pode ser qualquer número. Isso demonstra um não entendimento do problema, uma vez que o enunciado estabelece textualmente que os algarismos A e B fazem com que o produto dos dois números seja múltiplo de 36. Logo conclui-se que B não pode ser qualquer número, ou seja, há de ser levado em consideração que para que o produto de $2A5$ e $13B$ seja múltiplo de 36, a primeira condição é que este produto seja par. Como o algarismo das unidades de um dos fatores é 5, o algarismo das unidades do outro fator (B) deve obrigatoriamente ser par. Portanto, fica estabelecido um erro por má interpretação.

Figura 7 – Quinto exemplo.



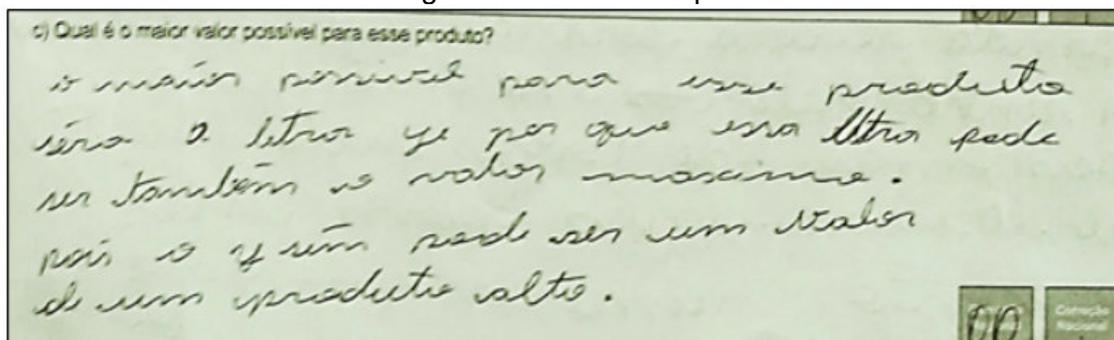
Fonte: Provas resolvidas, 12ª edição da OBMEP – Municípios do Oeste do Pará.

Nesta outra solução, vê-se que o aluno atribui um valor qualquer para A, e simplesmente descarta o B. A partir de uma tentativa do uso do algoritmo da multiplicação, ele erra o produto entre 235 e 13. Frente ao exposto, o primeiro erro estabelecido foi o de atribuir um valor arbitrário qualquer para A, depois descartar o B tal qual ele não tivesse função ou importância no problema, e, por fim, efetuar a multiplicação equivocadamente. Muitas das vezes, o estudante, ao não compreender corretamente o enunciado e ao não alcançar a complexidade do problema, promove-lhe então simplificações arbitrárias, eliminando elementos do problema, ou assumindo deliberadamente hipóteses que não condizem diretamente com o enunciado.

No caso explorado no exemplo anterior, o aluno opta por descartar a incógnita B, pois trabalhar com duas incógnitas lhe pareceu demasiado complicado. Ao ter

que lidar com a segunda incógnita, A, pareceu-lhe plausível simplesmente substituí-la por um valor arbitrário (três) e tentar efetuar assim a multiplicação.

Figura 8 – Sexto exemplo.



Fonte: Provas resolvidas, 12ª edição da OBMEP – Municípios do Oeste do Pará.

Na resposta aqui apresentada, o aluno afirma que o maior valor possível para o produto é a letra y , justificando que y é o valor máximo, uma vez que ele pode ser o resultado de “um produto alto”. O argumento indica que o aluno pode ter relacionado equivocadamente conceitos de função quadrática com o fato de ser máximo o valor, fazendo alusão à ordenada do vértice (Y_v). Portanto, este erro é atribuído a aplicação de conhecimento equivocado.

Em problemas envolvendo o valor máximo – ou mínimo, dependendo do caso – de funções quadráticas, é comum a obtenção direta da ordenada do vértice como resposta. A ideia de que todo problema que pede o valor máximo, seja qual for o contexto, esteja associado à obtenção dessa ordenada, consiste numa simplificação grosseira da diversidade e complexidade de casos, produto de automatismos comumente encorajados no ensino tradicional. Daí que, nessa perspectiva, ao ser solicitado a dar o valor máximo, o aluno imediatamente retorne a ideia do Y_v , em detrimento da análise crítica e sistemática de cada caso na busca da solução adequada.

Todos esses exemplos guardam entre si uma semelhança, a premissa de que o professor pode e deve aprender com os erros dos alunos. As estratégias adotadas revelam ora a ausência de conceitos necessários às resoluções, ora a mobilização de conceitos existentes, porém mal construídos no universo intelectual do aluno. A análise dessas produções nos permite adentrar, ainda que com limites estreitos e bem definidos, no plano cognitivo do aluno e buscar entender suas estratégias de resolução, as hipóteses construídas, a forma como correlaciona e intercala os conceitos, a mobilização de conceitos de base, em suma, seu *modus operandi*.

Considerações finais

Este estudo objetivou analisar erros cometidos na prova da 12^a edição da OBMEP por alunos das escolas públicas da região Oeste do Pará que estavam cursando o 8º e 9º anos do Ensino Fundamental, na perspectiva da metodologia de análise de erros. As análises ocorreram em cima da questão quatro da prova, que envolve conteúdos de Aritmética.

Os principais resultados apontam para o fato de que, em toda a região pesquisada, não houve acertos registrados na referida questão. As respostas em branco corresponderam a 18,12% (com margem de erro de $\pm 3\%$) do total, enquanto que as respostas erradas, aqui objeto de nossa atenção e análise, corresponderam a 81,88% (com margem de erro de $\pm 3\%$).

Os principais erros cometidos estão relacionados à má interpretação (67,83%), deficiência nos conceitos básicos (23,83%), desconhecimento dos conceitos de múltiplos e sequências (7,03%) e aplicação de conhecimento equivocado (1,31%). A maioria dos alunos deu respostas sem justificativa (67,56%).

Das análises das produções dos alunos despontaram algumas estratégias que demonstraram, entre outras coisas, a dificuldade manifestada em interpretar os comandos dos itens, a aplicação equivocada de conceitos e procedimentos (tais como a confusão entre os conceitos de múltiplo e divisor, e a má aplicação do algoritmo da multiplicação), além da mobilização de conceitos mal formados.

Para aprender com os possíveis erros recorrentes na cultura estudantil da Matemática, o professor não precisa necessariamente se envolver em pesquisas norteadas pela metodologia da análise de erros. A prática e a experiência no chão de sala de aula costumam fornecer naturalmente diversos desses elementos, e o professor atento em observá-los não ficará alheio às dificuldades comumente enfrentadas na construção dos conceitos ensinados.

São exemplos comuns observados diariamente na rotina de qualquer sala de aula erros como a confusão a respeito dos conceitos de múltiplo e divisor, conforme pudemos apurar neste estudo. Também integra em regime de rotina na vida do professor de Matemática uma dúvida muito comum a respeito da participação do zero enquanto múltiplo de todos os números naturais. A mesma ideia pode ser estendida ao número um enquanto divisor de todos os números naturais. Outros exemplos recorrentes incluem o dilema da divisão por zero, ou a confusão entre os conceitos de Mínimo Múltiplo Comum (M. M. C.) e Máximo Divisor Comum (M. D. C.).

Todas essas são manifestações frequentes, que, sob o olhar atento do professor que as percebe, convertem-se em cautela e ênfase na hora de ensinar. De uma maneira geral, a análise dos erros cometidos por alunos pode ser tomada como uma ferramenta de função formativa, visando a reestruturação positiva dos esquemas prévios, afastando do imaginário geral a ideia de que o erro é algo execrável e passível de punição. Muitas das vezes, aliás, ele pode nos ensinar tanto ou até mais que os acertos.

Referências Bibliográficas

BARDIN, L. **Análise de Conteúdo**. Lisboa: Edições 70, 1979.

BRASIL. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática**, terceiro e quarto ciclos do ensino Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998. 148 p.

BRASIL. **OBMEP**: Apresentação. 2017. Disponível em: <<http://www.obmep.org.br/apresentacao.htm>>. Acesso em: 21 set. 2017.

CASTRO, T. G.; ABS, D.; SARRIERA, J. C. Análise de conteúdo em pesquisas de Psicologia. **Psicol. cienc. prof.** [online]. 2011, vol.31, n.4, pp.814-825.

CURY, H. N. **Análise de erros em demonstrações de geometria plana**: um estudo com alunos de 3º grau. 1988. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 1988.

CURY, H. N. **Análise de erros**: o que podemos aprender com as respostas dos alunos. Belo Horizonte: Autêntica, 2007. 120 p.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática**: percursos teóricos e metodológicos. 3 ed. Campinas: Autores Associados, 2009. 228 p.

SANTOS, R. M. **Estado da arte e história da pesquisa em Educação Estatística em programas brasileiros de pós-graduação**. 2015. 348 f. Tese (Doutorado em Educação) – Programa de pós-graduação em Educação, Universidade estadual de Campinas, Campinas, 2015.

Submetido em julho de 2018

Aceito em março de 2020