



REVISTA DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL
DE MATO GROSSO DO SUL (UFMS)

Volume 11, número 26 – 2018

ISSN 2359-2842

**Atividades Investigativas na Formação Inicial de Professores de
Matemática sob a perspectiva da Educação Matemática Crítica**
**Investigative Activities in Pre Service Mathematics Teachers Education
with a Lens of Critical Mathematics Education**

Raquel Milani¹

Elivelton Serafim Silva²

RESUMO

O presente texto descreve e analisa a realização de uma atividade investigativa por futuros professores de um curso de Licenciatura em Matemática no contexto da Educação Matemática Crítica. A atividade foi desenvolvida em grupos, em uma disciplina do curso. Os dados foram constituídos de registros dos estudantes e da transcrição de suas impressões verbalizadas em momentos de discussão e socialização. A análise dos dados se baseou em estudos da Educação Matemática Crítica. Os resultados apontam uma forte dependência do futuro professor pelas orientações do docente da disciplina, espelho do que acontece na educação matemática tradicional. Uma vez engajados na atividade, e livres para escolherem seus caminhos na investigação, os grupos apresentaram 13 modos de resolução. Os estudantes apontaram aspectos positivos e negativos da implementação de uma atividade investigativa na educação básica. Tratou-se de uma ação significativa na formação de professores de matemática no contexto da Educação Matemática Crítica.

PALAVRAS-CHAVE: Atividades Investigativas, Educação Matemática Crítica, Formação de Professores de Matemática.

ABSTRACT

The present text describes and analyses the implementation of an investigative activity by prospective teachers in a course of mathematics teacher education in the context of Critical Mathematics Education. The activity was set in groups in a discipline. The data were composed of tasks of the students and the transcription of their verbal impressions at the time of discussion in the whole class. Data analysis was based on studies of Critical Mathematics Education. The results show a strong dependence of the prospective teacher on the orientations of the teacher, as in the traditional mathematical education. Once engaged in the activity, and free to choose their paths, the groups presented 13 modes of resolution. The students pointed out positive and negative aspects of the

¹ Universidade de São Paulo (USP). rmilani@usp.br

² Universidade de São Paulo (USP). elivelton@usp.br

implementation of an investigative activity in basic education. The activity was a significant action in the mathematics teacher education in the context of Critical Mathematics Education.

KEYWORDS: Investigative Activities, Critical Mathematics Education, Mathematics Teacher Education.

Introdução

A Educação Matemática Crítica (EMC) possui diversas preocupações, dentre elas o desenvolvimento da habilidade da matemacia nos estudantes da educação básica (SKOVSMOSE, 2000, 2011). Para além das habilidades de fazer cálculos, usar a matemática para entender situações e agir no mundo, em busca de transformações, faz parte da matemacia. Nesse contexto, o objetivo, conforme Skovsmose, é o desenvolvimento da aprendizagem crítica. O adjetivo “crítica” também se relaciona ao modo como os alunos lidam com os conceitos de matemática. A aprendizagem desses conceitos por meio de descobertas feitas pelos alunos, e não informadas pelo professor, contribui para o desenvolvimento da matemacia. Por descobertas, não entendemos resultados científicos genuínos dentro da própria matemática, mas, sim, novidades para quem os descobre, ou seja, os alunos.

Nesse contexto, nos perguntamos: Como formar um professor que ensina matemática sensível e consciente dessas questões? O presente estudo é resultado do interesse de planejar, implementar e refletir sobre ações de EMC nos cursos de formação de professores que ensinam matemática. Neste texto, apresentaremos uma dessas ações que consistiu na realização de uma atividade de caráter investigativo por parte de futuros professores de um curso de Licenciatura em Matemática da Universidade de São Paulo, campus de São Paulo.

Na primeira seção do presente texto trazemos o referencial teórico que dá suporte às nossas ações na formação inicial de professores de matemática no contexto da EMC. Na seção seguinte, apresentaremos as escolhas metodológicas que realizamos para desenvolver o estudo, bem como a descrição do contexto em que ocorreu. Uma vez tendo esclarecido como organizamos o estudo, na seção seguinte, apresentamos o desenvolvimento da atividade pelos futuros professores, no que diz respeito às suas impressões iniciais ao realizar a atividade, diferentes modos de resolução, forma de comunicação entre os integrantes dos grupos e a implementação da atividade na prática futura dos estudantes. Por fim, apresentamos as principais contribuições deste estudo para a formação de professores de matemática no contexto da EMC.

Atividades investigativas nas aulas de matemática

As aulas de matemática podem assumir diferentes configurações, dependendo da metodologia adotada pelo professor e a forma de comunicação entre professor e alunos, por exemplo. Skovsmose (2000) apresenta algumas dessas configurações, chamadas de ambientes de aprendizagem, considerando dois paradigmas (cenários para investigação e exercícios) e três referências de atividades (matemática pura, semirrealidade e realidade), conforme a tabela abaixo (Tabela 1).

	Exercícios	Cenários para investigação
Referências à matemática pura	(1)	(2)
Referências à semirrealidade	(3)	(4)
Referências à realidade	(5)	(6)

Tabela 1: Ambientes de aprendizagem
Fonte: (SKOVSMOSE, 2000)

Skovsmose caracteriza a educação matemática tradicional como a que acontece especialmente no paradigma do exercício. Nesse contexto, geralmente figura o absolutismo burocrático “que estabelece em termos absolutos o que é certo e o que é errado sem explicitar os critérios que orientam tais decisões” (ALRØ; SKOVSMOSE, 2006, p. 26). Nos ambientes de aprendizagem desse paradigma, o objetivo é treinar uma técnica e decorar conceitos e procedimentos via repetição. Os alunos ficam geralmente voltados para a lousa, o professor apresenta algumas ideias e técnicas matemáticas, depois alguns exemplos e, em seguida, os alunos resolvem alguns exercícios, selecionados geralmente de livros didáticos, que possuem uma única resposta (SKOVSMOSE, 2000).

Nesses ambientes encontramos padrões de comunicação em que geralmente o professor apresenta perguntas que possuem uma resposta única e sabida, por ele, de antemão. Os alunos, por sua vez, tentam adivinhar o que ele quer como resposta. Ao professor cabe avaliá-la como certa ou errada, representando a autoridade na sala de aula.

Para contrapor com o paradigma do exercício, Skovsmose apresenta os cenários para investigação com atividades que podem proporcionar aos alunos a descoberta de fatos matemáticos, a reflexão, a compreensão e a tomada de decisão sobre fatos da realidade. Nesse contexto, a participação dos alunos é ativa e, ao trabalhar em grupos, desenvolvem atos dialógicos com seus colegas e professor, importantes para a aprendizagem.

Um cenário para investigação é planejado para fornecer significado ao que os alunos estão produzindo na atividade (SKOVSMOSE, 2011). Eles são convidados a explorar hipóteses e fazer descobertas. Uma vez eles estando engajados no trabalho, o professor não tem como antecipar o que os alunos descobrirão em sua investigação. Isso acontece porque eles têm liberdade para escolher o caminho a ser percorrido e agem conforme suas decisões. Algumas perguntas podem ser formuladas pelo professor, mas outras podem surgir durante a atividade, o que pode gerar novas possibilidades de investigação. Uma atividade investigativa, portanto, é caracterizada por um alto grau de imprevisibilidade. Ela pode ser realizada em todos os níveis de ensino e uma mesma atividade pode levar a diferentes descobertas dependendo do nível em que é desenvolvida. Não se busca resultados genuínos, do ponto de vista científico, mas, sim, que os alunos façam suas próprias descobertas (SKOVSMOSE, 2011).

Uma atividade localizada no paradigma do exercício ou no cenário para investigação pode ter três referências: matemática pura, semirrealidade e realidade. A primeira referência diz respeito a atividades cujo contexto é estritamente matemático. A referência à semirrealidade significa que uma realidade foi construída na atividade. Não se trata de abordar uma realidade que realmente é observada, mas, sim, construída. As informações apresentadas fazem referência a situações hipotéticas, que podem acontecer. Nas atividades com referência à realidade, alunos e professores trabalham com situações da vida real.

Segundo Alrø e Skovsmose (2004, 2006), a forma de comunicação entre professor e alunos, e entre alunos, que acontece em atividades no cenário para investigação é o diálogo. Para os autores, o diálogo é constituído de interações verbais e não-verbais e possui duas características que são expressas por elementos. A primeira delas é fundamentada em estudos teóricos, e seus elementos são: realizar uma investigação, correr riscos e promover a igualdade. A segunda característica do diálogo está relacionada a oito atos dialógicos: estabelecer contato, perceber, reconhecer, posicionar-se, pensar alto, reformular, desafiar e avaliar. Esses elementos são mais específicos do que os três primeiros teóricos e foram estabelecidos a partir de observações empíricas da interação entre professores e alunos, e entre alunos, em aulas de matemática.

Milani e Skovsmose (2014) desenvolveram uma atividade, baseada no cenário para investigação com referência à matemática pura, com um grupo de futuros professores de matemática. Nesse contexto empírico, identificaram um conjunto de gestos investigativos

com os quais se pode caracterizar processos de investigação em educação matemática, a saber: surpreender-se, pretender, pensar alto, ouvir, posicionar-se, visualizar, perceber, experimentar, desafiar e descobrir. “Em um processo investigativo, os gestos podem ocorrer em ordens diferentes e cada gesto pode se repetir muitas vezes” (MILANI; SKOVSMOSE, 2014, p. 53). É possível perceber que alguns gestos investigativos são também atos dialógicos, uma vez que o diálogo entre alunos pode aparecer nas atividades situadas nos cenários para investigação.

Os estudos apresentados nesta seção serão retomados posteriormente neste texto para contribuir com a análise do desenvolvimento da atividade investigativa pelos sujeitos envolvidos no presente estudo. Na próxima seção, apresentaremos os procedimentos metodológicos e a descrição do contexto onde a atividade investigativa foi realizada.

Metodologia utilizada no estudo

O estudo faz parte de um projeto de pesquisa a respeito da Educação Matemática Crítica (EMC) na formação de professores que ensinam matemática na educação básica. No caso específico do presente texto, o estudo se deu na disciplina de Metodologia do Ensino de Matemática I, do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade de São Paulo, campus de São Paulo. Segundo o programa da disciplina, os futuros professores, que neste texto também serão denominados de estudantes, para evitar repetição, estudam concepções sobre a matemática e suas relações com o ensino, abordagem crítica de temas selecionados entre os conteúdos a serem ensinados na escola básica, materiais didáticos para o ensino de matemática, e planejamento e avaliação de atividades didáticas em matemática.

O que será apresentado neste texto trata-se de uma possibilidade de se abordar questões da educação matemática crítica na formação de professores de matemática. Cabe salientar que outros estudos também têm tal propósito, como é o caso de Sachs e Elias (2017), que apresentam reflexões a partir da discussão, com futuros professores de matemática, sobre, por exemplo, o currículo e a formação do sujeito enquanto cidadão crítico e autônomo, fundamentados na Educação Matemática Crítica. No contexto internacional, podemos destacar o estudo de Gutstein (2008), em que o autor discute o que professores precisam saber e fazer na direção de ensinar para a justiça social.

No primeiro semestre de 2018, sessenta estudantes estavam matriculados em duas turmas dessa disciplina. As atividades foram planejadas pela professora responsável e por um

monitor, aluno de doutorado de um Programa de Pós-Graduação em Educação da mesma universidade, ambos autores do presente texto. Do total de alunos, apenas 2 afirmaram já terem ouvido falar em EMC. Esse fato tornou ainda mais evidente a importância de implementar ações sobre essa temática na formação inicial de professores de matemática.

Com o objetivo, portanto, de introduzir algumas questões da EMC aos estudantes da disciplina, o texto “Cenários para Investigação”, de Ole Skovsmose (2000), foi trabalhado em aula. Diferenças entre o paradigma do exercício e os cenários para investigação foram elencados e alguns exemplos dos 6 ambientes de aprendizagem, referentes à Tabela 1, apresentada na seção anterior deste texto, foram discutidos.

Depois da exploração do texto de Skovsmose (2000), os alunos, em grupos, realizaram uma atividade de abrir um exercício (SKOVSMOSE, 2011), escolhido de algum livro didático, tentando transformá-lo em uma atividade investigativa. A caracterização dessa tarefa, bem como as reflexões a respeito do processo de se deslocar do paradigma do exercício para os cenários para investigação, por futuros professores de matemática, pode ser encontrada em Milani (no prelo)³.

Após a discussão do texto e a tarefa de abrir um exercício, planejamos desenvolver uma atividade investigativa com os futuros professores. Ao propô-la, tínhamos como objetivos que eles: experimentassem realizar uma atividade investigativa; experimentassem dialogar entre si no desenvolvimento da investigação; e refletissem sobre a implementação desse tipo de atividade em sua prática docente futura. Esses objetivos estavam de acordo com ações sugeridas por Milani (2015), para proporcionar o encontro do diálogo com futuros professores em seu processo de formação.

Os objetivos antes mencionados caracterizam-se como de ensino e pesquisa. Acreditamos na importância de proporcionar momentos na formação inicial de professores que privilegiem a aprendizagem de uma interação mais dialógica com seus futuros alunos. Trata-se de um objetivo ligado ao ensino. O modo como os futuros professores respondem a essas atividades e como se enxergam como profissionais implementando tais atividades em sua prática são aspectos voltados à pesquisa no contexto da Educação Matemática Crítica. Associar atividades de ensino e pesquisa é uma ação comum nas disciplinas que ministramos. Os alunos, assim, estavam cientes da importância do trabalho desenvolvido para a produção de conhecimento na área de formação de professores.

³ Sobre estudos que analisam atividades de livros didáticos sob a teoria da EMC ver, por exemplo, Oliveira, Santos e Pessoa (2017) e Almeida e Souza (2017).

A questão que apresentamos aos alunos foi: **Que menor número de palitos deve ser utilizado para construir um quadrado de quadrados?** Tratou-se de uma questão que remetia aos cenários para investigação com referência à matemática pura. Não havia como afirmarmos que a atividade, de fato, seria investigativa. “O cenário somente torna-se um cenário para investigação se os alunos aceitam o convite. Ser um cenário para investigação é uma propriedade relacional” (SKOVSMOSE, 2000, p. 73). Apenas em sua implementação é que poderíamos saber se os alunos se dedicariam a investigar, interessando-se pela atividade. A incerteza e a imprevisibilidade da ação são aspectos presentes em um trabalho de caráter investigativo, inserindo o fazer docente em uma zona de risco (PENTEADO, 2001), rica em possibilidades de aprendizagem para professor e alunos. Seria esse o contexto em que adentraríamos.

Essa questão já havia sido trabalhada com um grupo de futuros professores de matemática por um dos autores do presente texto. Trata-se do estudo dos gestos investigativos abordados na seção anterior (MILANI; SKOVSMOSE, 2014). A escolha pela mesma questão se deu pelo fato de que o modo como a professora e o monitor interagiriam com os futuros professores seria distinto daquele utilizado por Milani e Skovsmose (2014). Segundo esses autores, a realização da atividade teve um grau de interferência das professoras proponentes maior do que o planejado. Interessou-nos, portanto, perceber os modos de resolução da atividade quando os estudantes ficassem livres para trilhar os caminhos escolhidos.

Além de discutirem e resolverem a atividade, solicitamos aos estudantes que registrassem o desenvolvimento da mesma, mostrando seus raciocínios por escrito. Em um segundo momento, discutiríamos, no grande grupo, a respeito das diferentes resoluções, do tipo de comunicação estabelecido, das ações executadas na resolução e de como uma atividade como essa poderia ser implementada em suas práticas docentes futuras.

Durante a realização da atividade, circulamos pela sala, interagindo com os grupos e registrando por escrito, de forma abreviada, frases e situações que diziam respeito a como os futuros professores estavam trabalhando. Durante o momento de discussão de ideias no grande grupo, também registramos fatos que nos chamaram a atenção com vistas aos objetivos de ensino e de pesquisa anteriormente explicitados. Após o término da aula, em encontros sistematizados, nos reunimos para desenvolver as ideias que haviam sido registradas brevemente durante o desenvolvimento da aula e analisar a tarefa entregue por escrito pelos alunos.

Os modos de resolução elaborados foram transcritos para o computador e os esquemas e desenhos produzidos pelos futuros professores foram digitalizados. Algumas imagens referentes a essas produções serão mostradas na seção seguinte. Uma, tal qual criada por eles. As demais, foram recriadas por nós pelo fato de ficarem ilegíveis após a digitalização, devido a marcas advindas do ato de escrever e apagar, bem como a qualidade do papel e o tipo de lápis utilizado.

Criamos um quadro para organizar e apresentar os diferentes modos de resolução da atividade. Este quadro encontra-se na seção seguinte e apresenta informações importantes sobre os critérios estabelecidos pelos futuros professores para desenvolver a atividade. Não nos interessou saber qual modo teve maior ou menor frequência, mas, sim, a diversidade de modos de resolução produzidos.

Constituíram-se, portanto, como dados da pesquisa, os registros escritos dos estudantes sobre o desenvolvimento da atividade, no que se refere aos modos de resolução, à comunicação estabelecida nos grupos e à implementação de uma atividade investigativa em sua prática futura. Além disso, as impressões verbais dos futuros professores, registradas por escrito por nós, e as nossas percepções ao acompanhar o trabalho dos grupos contribuíram para formar o conjunto de dados da pesquisa.

Para a análise dos dados, tomamos como base as características de um trabalho em um cenário para investigação (SKOVSMOSE, 2000, 2011), os gestos de investigação propostos por Milani e Skovsmose (2014) e a interpretação de diálogo proposta por Milani (2015, 2017). Tendo em vista a diversidade dos modos de resolução criados pelos futuros professores, utilizamo-nos de critérios, que eles mesmos criaram, para apresentar tais resoluções.

Na próxima seção, descreveremos o desenvolvimento da “atividade dos palitos” como passou a ser chamada pelos estudantes.

A implementação e o desenvolvimento da atividade

A apresentação do desenvolvimento da atividade dos palitos será realizada trazendo registros escritos e falas dos futuros professores, nossas impressões sobre os fatos e ideias teóricas de autores sobre a temática.

Os estudantes foram divididos em grupos compostos por, no máximo, quatro integrantes e foi lançada a seguinte questão: **Que menor número de palitos deve ser utilizado para construir um quadrado de quadrados?** Eles tinham à sua disposição papéis, lápis e canetas coloridas de seu uso diário de estudo. Como a atividade foi realizada em um laboratório de ensino de matemática, os alunos ainda poderiam contar com a utilização de palitos de churrasco e palitos de picolé de diferentes cores. Não apresentamos esses palitos de antemão, pois queríamos ver quais recursos os alunos utilizariam para desenvolver a atividade.

Após a proposição da questão, não houve demora e os futuros professores colocaram-se a trabalhar. Era um indício de que haviam aceitado nosso convite para o cenário para investigação. Eles utilizaram diversos materiais para representar os palitos e percebemos que procuraram criar modelos que contribuíssem com a investigação a partir dos elementos ali disponíveis.

A primeira discussão que os estudantes tiveram foi acerca da necessidade de haver critérios que limitassem a possibilidade de respostas. Ao circular pelos grupos, ouvimos os futuros professores afirmando: “A questão é muito aberta!”, “Precisamos saber que regras a professora quer que a gente siga”. Em instantes, começaram os questionamentos à professora da disciplina: “Qual o tamanho dos palitos?”, “Eles são do mesmo tamanho?”, “Podemos quebrar os palitos ou precisamos usar eles inteiros?”, “Podemos sobrepor os palitos?” e “Podemos usar palitos de tamanhos diferentes?”.

Conforme as características de uma atividade em um cenário para investigação, não influenciemos as decisões dos futuros professores de modo a estipular critérios e indicar caminhos para o trabalho. A intenção era deixar que os grupos tomassem suas decisões, valorizando, assim, os diversos raciocínios desenvolvidos por eles. Dessa maneira, às indagações supracitadas, foram dadas respostas como: “A questão define sobre o tamanho dos palitos?”, “Ela diz como deve ser feito?”, “Se você fizer dessa maneira, qual seria a resposta?” e “Existem outras possibilidades?”.

No início da investigação, era como se um sentimento de estranheza pairasse sobre a expressão facial dos futuros professores ao concluírem que havia várias possibilidades de respostas. Eles perguntavam ao monitor: “Você sabe qual resposta a professora quer?” e “Ela quer que faça o quê?”. Foi necessária a mediação para que eles compreendessem que estavam livres para eleger e trilhar seu caminho na atividade. Conforme as discussões avançavam, esse

sentimento foi se dissipando, ao passo que os grupos iam compartilhando suas conclusões com a professora e/ou o monitor.

As perguntas feitas pelos futuros professores, especialmente as que iniciavam com o verbo “poder” e as que solicitavam o que a professora esperava como resposta, nos remetem a sentidos distintos: costume com o paradigma do exercício, permissão (dependência) e caráter aberto da atividade. Durante a discussão do texto de Skovsmose (2000), a grande maioria dos estudantes relatou que as suas aulas de matemática, como alunos da educação básica e superior, eram localizadas especialmente nos ambientes de aprendizagem do paradigma do exercício com referência à matemática pura e alguma semirrealidade. Resolver “questões muito abertas”, como descreveram a atividade dos palitos, causou inquietude e estranheza. Pelo fato de estarem acostumados a resolver tarefas fechadas e com resposta única, típicas do paradigma do exercício, não nos surpreendemos com a quantidade de perguntas iniciais dos alunos, pedindo os caminhos a serem seguidos, “as regras que a professora quer que a gente siga”. Tais perguntas, especialmente aquelas que iniciavam com o verbo “poder”, também nos indicaram a dependência das nossas respostas e “ordens” (como acontece na educação matemática tradicional) para desenvolver seu trabalho. Parece que tínhamos que permitir que eles pensassem de um modo ou outro. Entendemos, também, que, pelo fato da questão ser, de fato, aberta, quem a resolve deve, sim, estabelecer hipóteses e critérios para poder desenvolver o trabalho. Esses critérios, no entanto, foram evidenciados por meio de perguntas à professora e ao monitor solicitando confirmação.

Em meio à decisão de critérios, os futuros professores começaram a desenhar esquemas de quadrados feitos de quadrados. Alguns esquemas tinham traços de lápis mais fortes. Outros quadrados não pareciam ter 90° em seus ângulos internos. Todos os desenhos, no entanto, eram evidenciados sendo acompanhados de falas explicativas dos estudantes a respeito de seu modo de construção e quantidade de palitos. Quadrados de quadrados também foram formados utilizando alguns objetos, como canetas e lápis coloridos, evidenciando a dúvida sobre a possibilidade de sobreposição dos palitos.

“*Experimentar* significa tentar transformar a imaginação em ações”⁴ (MILANI; SKOVSMOSE, grifo dos autores, 2014, p. 48). Fazer desenhos e esquemas utilizando objetos

⁴ *Experimenting* means trying to turn one’s imaginations into actions.

foi um modo de *visualizar* e *experimentar* a atividade dos palitos. Um dos grupos, em sua tarefa escrita, registrou esse processo:

Iniciamos fazendo rascunhos no papel. Dali saiu nossa primeira conclusão da atividade. Depois utilizamos canetas no lugar dos palitos para procurar soluções alternativas. Ao observar o ambiente de sala e olhar para o chão, conseguimos elaborar o raciocínio utilizando o azulejo (Tarefa escrita de um grupo A⁵, 2018).

A evolução descrita pelo grupo mostra a relação muito próxima entre os gestos investigativos de *visualizar* e *experimentar*. Por evolução, não entendemos uma melhora de uma ação em relação a outra, mas, sim, de uma mudança na ação que permitiu uma nova compreensão da atividade. Segundo os estudantes, o uso dos objetos contribuiu para “facilitar a visualização”.

Alguns questionamentos dos estudantes permearam toda a atividade investigativa e, também, o momento da discussão no grande grupo: “O que é um quadrado de quadrados?”, “O que significa um quadrado ser formado por outros quadrados?”, “Qual a definição de palito?”, “O que é um quadrado? Uma superfície ou uma linha?”. Dependendo das respostas a cada uma dessas perguntas, os estudantes iam eliminando hipóteses e caminhos de resolução. Nesse processo, outros gestos investigativos apareceram. Os estudantes surpreenderam-se com a diversidade de possibilidades e critérios nas resoluções. Ao esboçar alguma perspectiva de resolução, em meio aos questionamentos apresentados anteriormente, pensavam alto. Argumentaram e posicionaram-se ao se comunicar com os colegas de grupo. Realizaram suas próprias descobertas relativas à atividade dos palitos.

Analisando o material escrito entregue pelos estudantes, percebemos que todos os grupos apresentaram, no mínimo, três resoluções distintas para a questão proposta na atividade. Nesse artigo, optamos por não apresentar as respostas de cada um dos grupos, mas, sim, os diferentes modos de resolução que apareceram. Organizamos as respostas em um quadro (Quadro 1) de acordo com os critérios estabelecidos pelos grupos para dirigir suas investigações. Este quadro apresenta os critérios escolhidos, a identificação do modo de resolução e o respectivo número de palitos para construir um quadrado de quadrados.

Critério 1	Critério 2	Modos de resolução	Nº de palitos usados
Admitindo que os palitos não serão quebrados	Sem sobreposição	Modo 1	4
		Modo 2	7

⁵ Como não iremos trazer para este texto os registros escritos de todos os grupos, a autoria dos excertos trazidos serão denominadas “um grupo A”, “um grupo B” e assim por diante, para diferentes grupos.

		Modo 3	9
		Modo 4	12
		Modo 5	16
	Com sobreposição	Modo 6	6
		Modo 7	7
Admitindo que os palitos podem ser quebrados em partes com tamanhos iguais	Sem sobreposição	Modo 8	1
		Modo 9	8
	Com sobreposição	Modo 10	1
Admitindo que os palitos sejam quebrados em partes com tamanhos diferentes	Sem sobreposição	Modo 11	1
Palitos em forma de “L”	Sem sobreposição	Modo 12	6
Palitos em forma de “U”	Sem sobreposição	Modo 13	4

Quadro 1: Critérios e modos de resolução

Fonte: Elaborado pelos autores

Explicitaremos, a seguir, cada um desses modos de resolução, apresentando o que foi registrado por escrito pelos grupos e as contribuições da turma, advindas do momento da discussão com o grupo todo. Considerando o critério de que os palitos não podem ser quebrados, os estudantes desenvolveram 7 modos de resolução. Dentre esses, 5 evidenciam o critério de não haver sobreposição de palitos.

O Modo 1 foi pensado por 4 dos quinze grupos de estudantes. Eles consideraram que um quadrado de quadrados pode ser formado com apenas 4 palitos (Figura 1). Para chegar a essa conclusão, um grupo justificou que o quadrado de quadrados seria formado por quadrados coincidentes. Outros, que o quadrado de quadrados seria formado por um quadrado feito de apenas um quadrado. No momento da socialização, houve uma forte réplica por parte de colegas da turma à essa última hipótese, pois afirmavam que não fazia sentido considerar apenas um quadrado para formar outro. Dessa maneira, os estudantes que desenvolveram a hipótese a defenderam afirmando que: “não é porque a pergunta tem que ser no plural (quadrados) que a resposta também tenha que ser no plural”. Houve um debate sobre plural e singular.

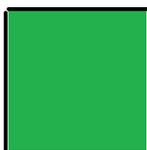


Figura 1: Quadrado de um quadrado

Fonte: Elaborada pelos autores

O Modo 2 foi pensado apenas por um grupo que sugeriu compor um quadrado de quadrados com palitos “saindo” do plano (Figura 2). Para tanto, seriam necessários 7 palitos.

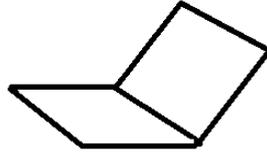


Figura 2: Quadrado de quadrados com palitos “saindo” do plano
Fonte: Elaborada pelos autores

Para o Modo 3, um dos grupos levantou a hipótese de que é possível formar quadrado de quadrados sem que os palitos se toquem (Figura 3). Dessa maneira, construíram um quadrado de quadrados utilizando 9 palitos.

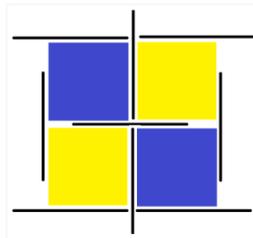


Figura 3: Quadrado de quadrados com palitos que não se unem
Fonte: Elaborada pelos autores

O Modo 4 foi apontado por todos os grupos (Figura 4). Nele são usados doze palitos para construir um quadrado de quadrados. Essa resolução também foi apresentada por Milani e Skovsmose (2014).

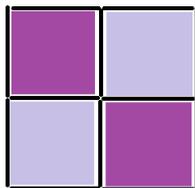


Figura 4: Solução apresentada por todos os grupos
Fonte: Elaborada pelos autores

Ao investigar sobre essa resolução, dois grupos perceberam que era possível formar uma sequência de quadrados (Imagem 1), ou uma “progressão”, como eles mesmo disseram, em que o primeiro elemento seria o quadrado com dimensão 1×1 ; o segundo elemento seria o quadrado de quadrados com dimensão 2×2 ; o terceiro, com dimensão 3×3 ; e o quarto, com dimensão 4×4 . Nessa sequência, o total de palitos usados é, respectivamente 4, 12, 24 e 40.

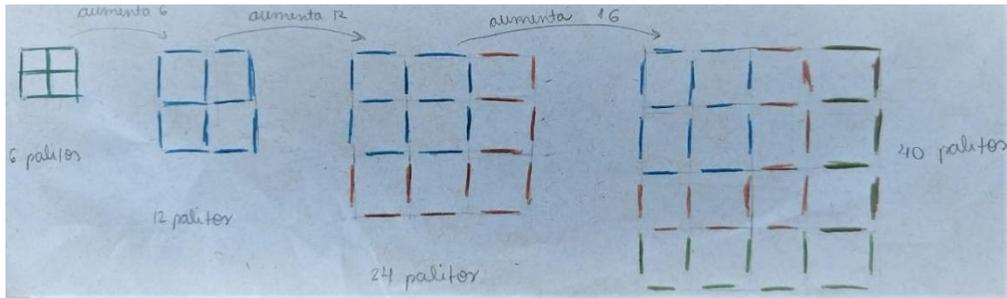


Imagem 1: Sequência de quadrados investigada pelos grupos
Fonte: Registro dos futuros professores

Aqui vale notar que, no primeiro desenho da sequência, os palitos se sobrepõem e não têm o mesmo comprimento dos palitos dos demais desenhos da sequência. Um dos dois grupos elaborou uma fórmula geral que relacionava a quantidade de palitos com a quantidade de quadrados. O registro escrito do grupo não esclarece como a fórmula foi obtida. O que apresentaram é o que segue: “Seja p o número de palitos e n a quantidade de quadradinhos [que compõem o lado do quadrado a ser formado], por progressão geométrica temos $\square(\square) = 4 \cdot \frac{\square(1+\square)}{2}$ ”. Não temos, no caso, uma progressão geométrica. Esse grupo, no entanto, buscou por uma generalização na atividade dos palitos, a exemplo do que ocorreu na atividade apresentada por Milani e Skovsmose (2014). Mesmo assim, o modo de resolução foi distinto. Os autores relatam que os futuros professores tentaram escrever uma fórmula com apoio de uma tabela e considerando o número total de palitos como a diferença entre o quádruplo do número de quadradinhos e o número de palitos que foram contados repetidos.

Para o Modo 5, dois grupos pensaram em um quadrado central sendo formado por outros quadrados, a partir de cada lado desse quadrado central (Figura 5). Dessa maneira, seriam necessários 16 palitos para formá-lo.

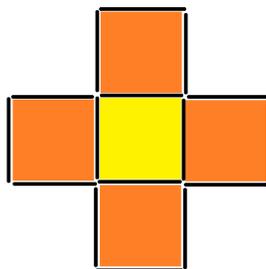


Figura 5: Quadrado de quadrados formado a partir de cada lado do quadrado central
Fonte: Elaborada pelos autores

Os modos de resolução citados até então foram elaborados baseados nos seguintes critérios: os palitos não podem ser quebrados e não há sobreposição. Os próximos dois modelos de resolução ainda permanecem fiéis ao critério de que o palito não pode ser quebrado, mas passou-se a considerar a possibilidade de sobreposição.

O que chamamos de Modo 6, representado pela Figura 6, também foi apresentado por todos os grupos. Nela os futuros professores utilizaram 6 palitos inteiros, 4 nas laterais e 2 sobrepostos ao centro.

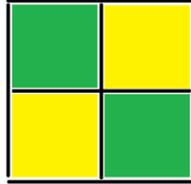


Figura 6: Outra solução apresentada por todos os grupos
Fonte: Elaborada pelos autores

Mantendo os mesmos critérios do modo anterior, um grupo pensou em fazer um quadrado de quadrados utilizando sete palitos inteiros, em que quatro deles foram utilizados para determinar os lados do quadrado a ser formado e os outros três palitos foram posicionados no interior do quadrado formando novos quadrados, e, além deles, alguns retângulos. A Figura 7 mostra o Modo 7 como sendo uma das possibilidades indicadas pelos estudantes. No momento de socialização, quando o grupo foi questionado sobre o fato do quadrado ser também composto de retângulos, prontamente os estudantes proponentes responderam que o enunciado da atividade não dizia que o quadrado teria que ser formado apenas por quadrados, enfatizando a palavra “apenas”.

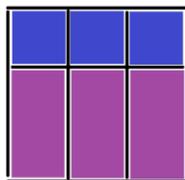


Figura 7: Quadrados de quadrados formado por quadrados e retângulos
Fonte: Elaborada pelos autores

Nos próximos cinco modos de resolução, os estudantes consideraram que os palitos poderiam ser quebrados e foram divididos em quatro partes iguais, porém não haveria sobreposição. Denominamos Modo 8 como aquele em que um único palito é suficiente para fazer um quadrado de quadrados. A figura relativa a esse modo é semelhante à apresentada para o Modo 1.

Dois grupos pensaram no que definimos como sendo o Modo 9. Eles consideraram um quadrado de quadrados formado por um quadrado interno com os vértices no ponto médio dos lados do quadrado externo (Figura 8). Os palitos que formam os lados do quadrado externo são inteiros e os que formam os lados do quadrado interno são quebrados, totalizando 8 palitos.

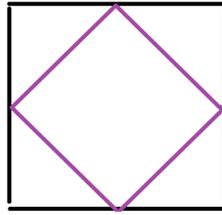


Figura 8: Quadrado interno e externo
Fonte: Elaborada pelos autores

No Modo 10, um grupo pensou em considerar apenas 1 palito partido em 6 partes iguais e, semelhantemente ao Modo 6, usar 4 dessas partes para fazer os lados do quadrado e 2 palitos sobrepostos em forma de cruz ao centro. Omitimos a respectiva figura por ser igual a que apresentamos no Modo 6.

Para o Modo 11, um grupo pensou em quebrar 1 palito em 6 partes iguais e escolher uma dessas partes para ser quebrada ao meio. Dessa forma, obtiveram 5 partes medindo $2a$ e duas partes medindo a (Figura 9).

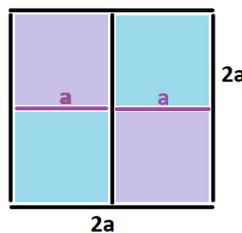


Figura 9: Quadrado de quadrados formado por palitos de tamanhos diferentes
Fonte: Elaborada pelos autores

Como não foi dada a definição de palito, um grupo pensou em formas diferentes da usual (picolé, churrasco ou de dente), para os dois últimos modos de resolução. Durante o desenvolvimento da atividade, o grupo sugeriu que fossem utilizados canudinhos para fazer as “dobras” nos palitos.

No Modo 12, os estudantes pensaram em um palito em forma de “L” (Figura 10). Organizaram esses palitos de modo a concluir que o número mínimo para fazer um quadrado de quadrados, com esse tipo de palito, seria de 6.

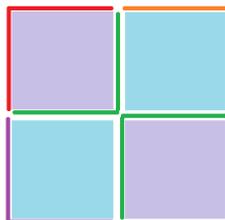


Figura 10: Quadrados de quadrados usando palitos em forma de “L”
Fonte: Elaborada pelos autores

No que chamamos de Modo 13, os alunos pensaram em um palito em forma de “U”. Ao organizar esses palitos, perceberam que eram necessários 4 palitos desse tipo para formar o quadrado de quadrados (Figura 11).

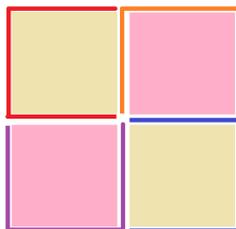


Figura 11: Quadrados de quadrados usando palitos em forma de “U”
Fonte: Elaborada pelos autores

Esta foi a diversidade de formas de resolução elaboradas pelos futuros professores, quando os deixamos livres para planejar e seguir seus caminhos de investigação. Após observarmos que todos os grupos haviam finalizado o registro de suas conclusões, iniciamos a socialização das produções dos grupos com a turma inteira. Um dos aspectos de reflexão foi a forma de comunicação estabelecida pelos grupos no desenvolvimento da atividade dos palitos. Solicitamos que os estudantes a caracterizassem.

Ficamos surpresos que eles tiveram certa dificuldade para verbalizar sobre essa forma de comunicação estabelecida no trabalho dentro dos grupos. “Como a gente conversou?!”, perguntou um dos estudantes, tentando entender o que estávamos solicitando. Não estava fazendo sentido a eles pensar sobre como conversaram. Tivemos que intervir dando exemplos de modos de comunicação: “Apenas um colega falou? Quando ele falou, vocês seguiram imediatamente o que foi dito? O que fizeram?”. Com essas perguntas mais específicas, os estudantes começaram a verbalizar algumas características do seu trabalho comunicativo: “Foi um debate. Todos participaram dando ideias, colaborando com ideias”, “O grupo foi participativo e colaborativo, uma [estudante] sempre tentando explicar para a outra o que ela não entendia”, “A gente interagiu no grupo, para se defender, argumentar, debater e compartilhar raciocínio”. E ainda, em um registro escrito:

A comunicação foi visual e verbal, com contribuição igualitária através de debates e perguntas. Não houve líderes, todos discutimos e tínhamos ideias diferentes e isso diversificou a execução do exercício mesmo que por vezes as conclusões fossem as mesmas (Tarefa escrita de um grupo B, 2018).

Nos relatos verbais e escritos dos futuros professores, foi possível perceber a presença de alguns atos dialógicos (ALRØ; SKOVSMOSE, 2004, 2006) que ocorreram no trabalho dos grupos. No debate de ideias constituído pelos grupos, os estudantes tiveram que expor seus diferentes raciocínios e, muitas vezes, argumentar e posicionar-se, numa tarefa de convencer o

outro, não no sentido de uma disputa de ideias, mas, sim, para decidir sobre os caminhos a serem seguidos e para compartilhar ideias. Não houve líderes e nem ideias de apenas um colega que foram seguidas, enfatizando um trabalho colaborativo e de “contribuição igualitária”, como disse um grupo. Ao circularmos pelos grupos, ouvimos diversas perguntas que eram feitas aos colegas no sentido de tentar compreender a explicação fornecida por um dos colegas, aprofundar uma perspectiva levantada e desafiar o trabalho do grupo, mostrando uma nova possibilidade de encaminhamento.

O esforço de tentar entender o que o outro diz e de se fazer entender pelo outro (por meio de explicações) foi percebido no trabalho dos grupos. Para isso, o ato dialógico de reformular o que foi dito fez parte da comunicação entre os futuros professores. Portanto, o aspecto do diálogo de compreender o que o outro diz, apontado por Milani (2015, 2017) ao interpretar o diálogo como movimento de “ir até onde o outro está” (lugar cognitivo), se fez presente.

A dificuldade inicial de verbalizar sobre a comunicação mostrou-nos que pensar sobre o que se faz não é uma atividade natural para esses futuros professores, e nos alertou, também, que precisaríamos dedicar uma aula sobre comunicação em educação matemática ao longo da disciplina, em especial para se trabalhar com a ideia de diálogo conforme Alrø e Skovsmose (2004, 2006) e Milani (2015, 2017). Destacamos aos estudantes a importância do tipo de comunicação (mais dialógica) que eles desenvolveram entre si para a aprendizagem de matemática e, especialmente, para favorecer um ambiente democrático na sala de aula, de modo que todos tiveram direito a expressar suas perspectivas e ouvir atentamente ao que o colega dizia. A relação entre democracia e diálogo é uma das questões da educação matemática crítica.

Quando questionados sobre a implementação de atividades de caráter investigativo nas suas práticas docentes futuras, os estudantes apresentaram aspectos tanto positivos quanto negativos. Dentre os positivos, eles acreditam que a atividade seria importante para os alunos desenvolver a criatividade, pensar e debater as diferentes possibilidades de resolução, perceber a relação entre um critério escolhido e sua consequente resolução, interagir em grupo para se defender, argumentar, debater e compartilhar raciocínio, criar hipóteses, identificar figuras geométricas planas e suas particularidades, conjecturar sobre a relação do número de quadrados e o número de palitos, observar padrões e sequências, aprender a trabalhar em

equipe, refletir sobre a definição de quadrado, argumentar matematicamente e abstrair objetos geométricos a partir de físicos.

Percebemos que ao pensarem e verbalizarem, por escrito e oralmente, sobre como uma atividade como a dos palitos poderia ser trabalhada na educação básica, os futuros professores tomaram como base a própria experiência que tiveram ao desenvolverem a atividade. Ocorreu, portanto, uma projeção do que foi realizado por eles na investigação em termos de objetivos de aprendizagem.

Dentre os objetivos elencados acima, poucos dizem respeito a conceitos matemáticos específicos do currículo escolar (geometria, por exemplo). Este foi um dos pontos negativos destacados pelos estudantes. Segundo eles, “o professor tem que vencer o conteúdo” e “não é esse tipo de questão que pede no Saresp⁶”. A atividade dos palitos demandaria muito tempo da aula, se os alunos tivessem tempo para pensar nas resoluções, discutir com os colegas no grupo e socializar com outros colegas e professor, a exemplo do que foi feito na disciplina. Haveria, ainda, o risco dos alunos não aceitarem ao convite da investigação, uma vez estando acostumados a trabalhar no paradigma do exercício. O mesmo foi apontado em relação ao professor, imerso nesse ambiente de aprendizagem e com resistência a mudar sua prática.

Em contrapartida, lembramos aos futuros professores o que Skovsmose (2000) afirma em seu texto que discutimos em aula. “A educação matemática deve se mover entre os diferentes ambientes tal como apresentado na matriz [Tabela 1] (p. 82)”. Ao se propor os cenários para investigação, não defendemos que o trabalho nas aulas de matemática sejam pautados exclusivamente em atividades investigativas. O tipo de aprendizagem gerado no paradigma do exercício não pode ser desconsiderado, uma vez que, por meio de exercícios referentes à matemática pura, por exemplo, técnicas e algoritmos são praticados, podendo ser discutidos. Um equilíbrio de trabalho nos diferentes ambientes favorece distintos modos de aprendizagem aos alunos. Salientamos, ainda, que, mesmo que a cultura escolar e os objetivos da instituição, onde os futuros professores forem atuar, sejam voltados ao paradigma do exercício, pequenas e graduais mudanças podem ser provocadas, se assim eles concordarem que devem ser feitas.

A atividade dos palitos foi considerada, de fato, como uma investigação, a exemplo do que registrou um grupo: “Como foi preciso de definições não listadas no enunciado [da questão] e condições diferentes geraram respostas diferentes, a atividade é investigativa”.

⁶ Saresp - Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo.

Essa foi a marca de uma atividade em que o professor orienta os alunos a criarem e tomarem as suas próprias decisões em seu trabalho investigativo.

Considerações finais

A ação de Educação Matemática Crítica (EMC) apresentada neste texto se constituiu como um dos primeiros passos desenvolvidos, por nós, na formação de professores atentos ao desenvolvimento da matemacia nas aulas de matemática. Com o objetivo de criar um ambiente de investigação em uma aula de um curso de Licenciatura em Matemática, propusemos o desenvolvimento de uma atividade com referência à matemática pura para ser desenvolvida pelos futuros professores.

O modo como orientamos os estudantes na realização da atividade se mostrou eficaz para que eles pudessem planejar, refletir e escolher seus próprios caminhos de investigação. Percebemos, inicialmente, uma forte dependência, por parte deles, de nossas instruções e comandos, característica própria da educação matemática tradicional. Por conta da liberdade para criar, foram produzidos e descobertos 13 modos de resolução para a questão proposta, característica típica de um trabalho em um cenário para investigação. Os estudantes surpreenderam-se com tantas descobertas. No trabalho investigativo realizado, diversos gestos e atos dialógicos estiveram presentes.

Aprendemos com os futuros professores a controlar nossa orientação no sentido de deixá-los produzir seu conhecimento. Os estudantes também nos ensinaram que, para além de diversos objetivos de aprendizagem que podem ser desenvolvidos com uma atividade como essa, ainda há resistência para sua implementação devido ao currículo fechado, avaliações externas e a própria cultura da ação de professores e alunos no paradigma do exercício.

Na realização da atividade investigativa, bem como na discussão no grande grupo, também aprendemos que falar e refletir sobre o que se faz não é uma tarefa simples. Percebemos isso quando solicitamos aos estudantes para falarem sobre a forma de comunicação estabelecida nos grupos. Isso nos mostra a importância de inserirmos atividades ao longo da formação que contribuam para o olhar sobre si e acerca do que se faz. Acreditamos que colocar-se a pensar a respeito de sua própria ação, em momentos da formação inicial, pode contribuir para a reflexão sobre sua própria prática docente futura.

Discutimos com os estudantes sobre como a forma de comunicação entre professor e alunos e entre alunos interfere na realização de uma atividade. O diálogo favorece a fala e

escuta compartilhada entre professor e alunos, tornando a sala de aula um espaço mais democrático. O diálogo também pode proporcionar a produção de conhecimentos em termos de descobertas dos alunos. Eles tornam-se ativos em seu processo de aprendizagem em contraposição ao que acontece na educação matemática tradicional. Assumir uma postura dialógica é assumir uma postura política que acredita que professor e alunos têm direito a falar e ouvir.

Uma das próximas ações que estão sendo planejadas é a orientação de estágios supervisionados com enfoque em questões relacionadas à matemática, como forma de planejar, implementar e refletir sobre as diversas possibilidades de ação de EMC na formação de professores.

Referências

ALMEIDA, K. F.; SOUZA, R. B. Educação matemática crítica e materiais apostilados: Perspectivas e concepções de ensino de fração. **Revista Paranaense de Educação Matemática**. Campo Mourão, v.6, n.12, p.306-325, jul-dez. 2017.

ALRØ, H.; SKOVSMOSE, O. **Dialogue and learning in mathematics education: intention, reflection, critique**. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 2004.

ALRØ, H.; SKOVSMOSE, O. **Diálogo e aprendizagem em educação matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

GUTSTEIN, E. Building political relationships with students: What social justice mathematics pedagogy requires of teachers. In: FREITAS, E.; NOLAN, K. (Orgs.). **Opening the research text: Critical insights and in(ter)ventions into mathematics education**. New York: Springer, 2008.

MILANI, R. **O Processo de Aprender a Dialogar por Futuros Professores de Matemática com Seus Alunos no Estágio Supervisionado**. 2015. 238 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2015.

MILANI, R. “Sim, eu ouvi o que eles disseram”: o diálogo como movimento de ir até onde o outro está. **Bolema**. Rio Claro, v. 31, n. 57, p. 35 - 52, abr. 2017.

MILANI, R. Abrir um exercício: futuros professores de matemática entrando em cenários para investigação. No prelo.

MILANI, R.; SKOVSMOSE, O. Inquiry gestures. In: SKOVSMOSE, O. (Org.). **Critique as Uncertainty**. Charlotte, NC: Information Age Publishing, 2014.

OLIVEIRA, A. A.; SANTOS, L. T. B; PESSOA, C. A. S. Do exercício aos cenários para investigação: A aplicação de atividades de educação financeira por professoras dos anos iniciais do ensino fundamental. *Revista Paranaense de Educação Matemática*. Campo Mourão, v.6, n.12, p.158-186, jul-dez. 2017.

PENTEADO, Miriam Godoy. Computer-based learning environments: risks and uncertainties for teacher. **Ways of Knowing Journal**, Pennsylvania, v. 1, n. 2, p. 23-35, 2001.

SKOVSMOSE, O. Cenários para Investigação. **Bolema**: Boletim de Educação Matemática. Rio Claro, n. 14, 66-91. 2000.

SACHS, L.; ELIAS, H. R. A educação matemática crítica proporcionando uma discussão sobre currículo na formação inicial de professores. **Revista Paranaense de Educação Matemática**. Campo Mourão, v.6, n.12, p.397-420, jul-dez. 2017.

SKOVSMOSE, O. **An invitation to critical mathematics education**. Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers, 2011.

Submetido em Junho de 2018

Aprovado em Agosto de 2018