PERSPECTIVAS DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

REVISTA DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL (UFMS)

ISSN 2359-2842 Volume 13, número 31 – 2020 DOI: 10.46312/pem.v13i31.6767

Aproximações entre Álgebra e Geometria: uso do conceito de progressão aritmética na divisão de segmentos de retas em pontos equidistantes

Approximations between Algebra and Geometry: use of the concept of arithmetic progression in the division of segments of straight lines in equidistant points

Indianara Scarpari de Melo [1]

Dirceu Lima dos Santos [2]

Rosana Maria Luvezute Kripka [3]

RESUMO

A aprendizagem de conceitos em matemática implica na percepção de relações entre diferentes abordagens, sejam elas por meio da aritmética, álgebra ou geometria. Nesse artigo, apresenta-se uma proposta alternativa para a resolução de um problema clássico da geometria analítica, que trata da divisão de um segmento em uma razão dada, percebido por uma acadêmica do curso de licenciatura em Matemática, ocorrido espontaneamente, no decorrer de uma disciplina denominada "Geometria Analítica". A pesquisa bibliográfica indicou que existem diferentes modos de resolução, mas não foi encontrado um método semelhante ao proposto pela estudante. Concluiu-se que essa percepção, que implica no uso tanto de conceitos geométricos, como algébricos, pode favorecer o ensino e a aprendizagem significativa da matemática, pois permite estimular o uso de conceitos prévios já existentes, tais como os conceitos de ponto médio, pontos equidistantes e progressão aritmética, bem como possibilita estimular o desenvolvimento da competência em transitar entre diferentes registros semióticos.

1 Acadêmica do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade de Passo Fundo/RS/BR (UPF). E-mail: indianarascarpari@hotmail.com. https://orcid.org/0000-0002-2738-9584.
2 Mestre em Modelagem Matemática pela Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul, RS/BR (UNIJUÍ). Professor da Área de Matemática da Universidade de Passo Fundo/RS/BR (UPF). E-mail: limamat@upf.br. https://orcid.org/0000-0001-5291-4726.
3 Doutora em Educação em Ciências e Matemática pela Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, RS/BR (PUC-RS). Professora da Área de Matemática da Universidade de Passo Fundo/RS/BR (UPF). E-mail: rkripka@upf.br. http://orcid.org/0000-0002-8493-6900.

PALAVRAS-CHAVE: Divisão de segmentos; Geometria Analítica; Geometria Plana; Progressão Aritmética; Educação Matemática.

ABSTRACT

The learning of concepts in mathematics implies the perception of relationships between different approaches, be they through arithmetic, algebra or geometry. In this paper, an alternative proposal for the resolution of a classic problem of analytic geometry is presented, which deals with the division of a segment into a given ratio, that was perceived by an undergraduate student in mathematics during a course called "Analytical Geometry". The bibliographic research indicated that there are different modes of resolution, but a method similar to that proposed by the student was not found. It was concluded that this perception, which implies in the use of both geometric and algebraic concepts, can favor the teaching and meaningful learning of mathematics, since it allows to stimulate the use of already existing concepts, such as the concepts of midpoint, points equidistant and arithmetic progression, as well as stimulates the development of competence in transit between different semiotic registers.
KEYWORDS: Segment division; Analytical Geometry; Flat Geometry; Arithmetic Progression; Mathematics Education.

Introdução

Ao longo da história da humanidade, percebe-se que muitas vezes o desenvolvimento da matemática foi impulsionado com o objetivo de auxiliar o homem na resolução racional de problemas, os quais se apresentavam em seus cotidianos.

Boyer (1974) indica que apesar do desenvolvimento da geometria de ser atribuído aos egípcios, seu início foi percebido ainda na época do homem neolítico em potes, tecidos e cestas construídos, os quais apresentavam diversas congruências caracterizadas por conceitos da geometria elementar. Além disso, o autor também informa que os povos egípcios fizeram grandes contribuições para o desenvolvimento da geometria, como atualmente é conhecida. Os habitantes que moravam próximos às margens do rio Nilo, após os períodos das cheias, precisavam demarcar esses terrenos para sua redistribuição e, para isso, faziam uso de uma geometria fundamentalmente prática, utilizada para delimitar a área desses terrenos irregulares, cujas informações foram encontradas em papiros.

Eves (2004), destaca também que, além do cálculo da área dos terrenos, os egípcios conseguiam calcular o volume ocupado por grãos, que eram estocados em armazéns, essencialmente em formato cilíndrico.

No entanto, o autor indica que as origens da matemática ocidental não são precisas e que, no caso da Geometria, os conhecimentos utilizados pelos egípcios foram inicialmente desenvolvidos pelos gregos. E, desse modo, poderia ser atribuída a eles a criação desta "ciência". Segundo o autor, a origem da palavra "geometria" é grega, na qual foi combinado o radical "geo" de "gé" que significa "terra" e "métron", que significa "medida". Destaca que, apesar dos gregos não terem noções precisas de coordenadas, eles sabiam relacionar corretamente os eixos, conseguindo, deste modo, fixar pontos sobre eles, sendo que uma de suas últimas contribuições para a geometria foi a teoria das cônicas. Assim, o autor indica que os gregos influenciaram e contribuíram significativamente com a criação de muitos conhecimentos ocidentais, que atualmente são utilizados na matemática.

Santos e Laval (2009), em seu referencial teórico, destacam que, dentre os conteúdos atualmente estudados pela Geometria Analítica, um dos principais colaboradores foi Aristeu de Samos (370–300 a.C.). Segundo os autores, ele escreveu sobre sólidos regulares e sobre secções em cônicas e suas descobertas, posteriormente, influenciam um dos maiores contribuintes da geometria, Euclides.

Segundo Baumgart (1992) a álgebra surgiu no Egito quase ao mesmo tempo em que na Babilônia. No entanto, a julgar pelo Papiro Moscou e o Papiro Rhind - documentos egípcios que datam cerca de 1850 a.C. e 1650 a.C., respectivamente - faltavam à álgebra egípcia os métodos sofisticados da álgebra babilônica, bem como a variedade de equações resolvidas. Segundo o autor, a álgebra do Egito, assim como a da Babilônia, era retórica. Também ressalta que o sistema de numeração egípcio era relativamente primitivo em comparação com o dos babilônios, o que ajuda a explicar a falta de sofisticação da álgebra egípcia. Desse modo, destaca que os matemáticos europeus do século XVI tiveram de estender a noção indo-arábica de número antes de poderem avançar significativamente além dos resultados babilônios de resolução de equações.

Por volta do ano 400 d.C., Diofante de Alexandria (325-409) teve uma ideia audaciosa, a qual mudou a história da matemática. Em seus estudos, ele propôs o uso de símbolos para facilitar a escrita e os cálculos matemáticos. Desse modo, os símbolos por ele criados fizeram com que as expressões, até então escritas totalmente com palavras, pudessem ser representadas com abreviações. No entanto, como ele viveu na época da queda do Império Romano, na qual foram destruídos muitos centros de estudos, houve uma interrupção no processo de desenvolvimento dos seus estudos, o que não permitiu que sua simbologia saísse do estágio inicial (REY, 2010).

Somente por volta do ano de 650, com a ascensão do Império Árabe, é que houve uma retomada dos estudos matemáticos. De 786 a 809, no reinado do Califa *Harun al-Raschid* surgiram grandes cidades e centros de comércio, devido às conquistas de vários territórios pelos muçulmanos. Essas mudanças possibilitaram um grande desenvolvimento dos conhecimentos matemáticos. Em 809, *al-Mamum* assumiu o reinado em Bagdá e governou até 833. Nesse período, criou um centro de ensino e contratou os mais brilhantes sábios muçulmanos da época, sendo que dentre eles estava o matemático árabe *Mohamed Ibu-Musa al-Khowarizmi* (780 – 850), que escreveu um livro intitulado *“Hisab al-jabr w'al-muqabalah”* (REY, 2010).

Baumgart (1992) destaca que esse trabalho é com frequência citado de modo abreviado apenas por *“Al-jabr”*, que significa restauração e refere-se à mudança de termos de um lado para outro de uma equação. Desse modo, provavelmente o termo Álgebra tenha se originado do título desse livro.

No entanto, do mesmo modo como ocorreu com muitos matemáticos que viveram em épocas diferentes de *al-Khowarizmi*, ele também não foi capaz de finalizar seus estudos, de modo que as equações fossem totalmente expressas por meio de símbolos. Somente após 700 anos, quando França e Espanha estavam em guerra, que François Viète (1540-1603) se destacou ao ajudar o governo francês na decodificação de planos de guerra dos espanhóis. Nessa época, por suas contribuições, passou para a história da matemática como o principal responsável pela introdução dos símbolos em resoluções propostas e, por isso, ficou conhecido como o *“Pai da Álgebra”*. Nessa época, também houve outras contribuições tais como a do inglês Robert Record (1510–1558), na criação do símbolo “=” para substituir a expressão “igual a” e também de Thomas Harriot (1560–1621), que era outro matemático inglês, responsável pela eliminação das poucas palavras que ainda restavam na álgebra de Viète (REY, 2010).

Somente no século XVII que ocorreu a passagem para uma álgebra completamente simbólica, com as contribuições de René Descartes (1596-1650), grande matemático e filósofo francês. Ele introduziu símbolos e notações para representar as operações de multiplicação e de potenciação e passou a usar as primeiras letras do alfabeto para representar os coeficientes das incógnitas e os termos independentes (se literais) e as últimas letras para representar as incógnitas (REY, 2010).

Boyer (1974) destaca que a geometria analítica moderna do século XVII, foi crucial na história da matemática. Destaca que foi a colaboração de matemáticos franceses como René Descartes (1596–1650) e também de Pierre de Fermat (1601–1655) que impulsionou os usos dos símbolos básicos com os quais se trabalha atualmente. Essa aproximação entre a Álgebra e a Geometria possibilitou a criação de diversas teorias que possibilitaram a resolução de inúmeros problemas, percebidos pelo homem, em seu cotidiano.

Bongiovanni (2004, p. 194) indica que a interação entre conteúdos da geometria plana e analítica possibilita o aprimoramento de ambas, citando como exemplo a utilização do Teorema Fundamental da Semelhança, criado por Tales de Mileto (624– 546 a.C.). O teorema demonstra que um feixe de retas paralelas, interceptados por duas transversais, geram segmentos de reta proporcionais. E sobre ele, o autor afirma que:

> Na perspectiva, ele surge quando se estudam as propriedades das figuras geométricas que se conservam quando traçadas em um plano e projetadas em outro plano a partir de uma fonte no infinito; dessas propriedades (conservação do ponto médio, conservação do baricentro, conservação do alinhamento, etc..), a fundamental, é a conservação das razões das distâncias entre pontos alinhados.

Esse teorema permite perceber as relações intrínsecas existentes entre a álgebra, a aritmética e a geometria. Como nesse caso, as relações existentes, ao serem notadas, favorecem a compreensão dos conceitos tratados, especialmente por possibilitarem a expressão do mesmo problema por meio de diferentes registros, sejam eles numéricos, simbólicos ou figurais.

Do mesmo modo que essa estratégia de aproximação entre essas diferentes subáreas da matemática permitiu obter importantes resultados, que até hoje são utilizados na resolução de problemas diversos, nesse artigo, destaca-se que foi possível perceber essa aproximação no que diz respeito à resolução do problema de conservação das razões das distâncias, entre pontos alinhados sobre um segmento de reta.

A percepção de relações existentes entre conceitos geométricos e aritméticos, ambos abordados por meio da geometria analítica, possibilitou intuir uma forma alternativa e facilitadora o desenvolvimento de tais cálculos.

Destaca-se que a proposta de resolução, apresentada no presente artigo, surgiu no decorrer das aulas de uma disciplina denominada “Geometria Analítica”, como um modo alternativo de resolução de um problema abordado em sala de aula. Foi inicialmente percebido por uma acadêmica do curso de licenciatura em Matemática, a qual apresentou seu raciocínio aos seus professores, os quais o avaliaram e perceberam a validade e a originalidade da abordagem.

A seguir apresentam-se os problemas e as formas de resolução já existentes e a forma alternativa, proposta no presente artigo.

Descrevendo os problemas

Nessa seção são apresentados dois problemas clássicos da Geometria Analítica e alguns métodos usuais de resolução. Também é exibida uma possibilidade alternativa para a resolução de um deles, que foi possibilitada pela aproximação entre a álgebra e a geometria.

Divisão de segmentos em pontos, de acordo com razões conhecidas:

Um dos tópicos básicos abordados na disciplina de Geometria Analítica consiste em obter, analiticamente, as coordenadas do ponto que divide um segmento de reta, em uma razão conhecida.

Na literatura, encontra-se uma proposta para a resolução desse problema, apresentada por Steinbruch e Basso (1991). Nessa abordagem os autores consideram conhecimentos específicos da Geometria Euclidiana e da Geometria Analítica, os quais possibilitam obter as coordenadas do ponto que divide o segmento em uma razão, que é fornecida inicialmente, a partir das coordenadas cartesianas dos pontos extremos que definem o segmento inicial, que está apresentada, a seguir.

Os autores esclarecem que, ao serem considerados os pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, que representam os extremos do segmento $\overline{AB}$, busca-se calcular as coordenadas do ponto$P(x, y)$, pertencente ao segmento $\overline{AB}$, que divide o segmento $\overline{AB}$ em uma razão k, conforme apresentado na Figura 1.

De acordo com Steinbruch e Basso (1991) a partir do Teorema Fundamental da Semelhança (também denominado Teorema de Tales), um feixe de retas paralelas determina sobre duas transversais, segmentos proporcionais (Ver Figura 2).

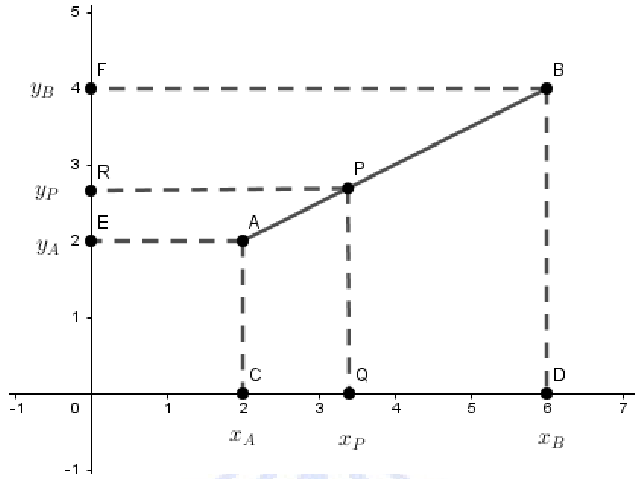
Assim, conforme a Figura 2, pelo Teorema de Tales, podem ser expressas as seguintes relações:

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{QC}}{\overline{QD}} = k \qquad (1)$$

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{RE}}{\overline{RF}} = k \qquad (2)$$

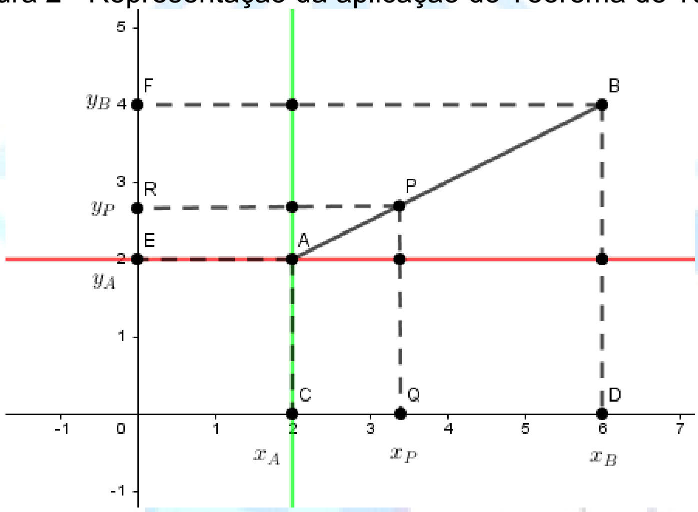
De acordo com (1) e (2), verifica-se que k é uma constante de proporcionalidade, que pode ser positiva, negativa ou igual a 1. Será positiva se o ponto P for externo ao segmento $\overline{AB}$; será negativa se o ponto P for interno ao segmento $\overline{AB}$ e será igual a 1 se P coincidir com o ponto médio do segmento $\overline{AB}$. (STEINBRUCH E BASSO, 1991).

Figura 1 - Representação geométrica do problema inicial



Fonte: Adaptado de Steinbruch e Basso (1991, p.13)

Figura 2 - Representação da aplicação do Teorema de Tales



Fonte: Adaptado de Steinbruch e Basso (1991, p.13)

Conforme pode ser observado na Figura 2, a medida algébrica do segmento orientado $\overline{QC}$ pode ser obtida pela diferença entre a abscissa do ponto extremo A e a abscissa do ponto P, ou seja:

$$\overline{QC} = x_A - x_P \tag{3}$$

Do mesmo modo, a medida algébrica do segmento orientado $\overline{QD}$ pode ser obtida pela diferença entre a abscissa do ponto extremo B e a abscissa do ponto P, ou seja:

$$\overline{QD} = x_B - x_P \tag{4}$$

Substituindo (3) e (4) em (1) obtém-se:

$$\frac{x_A - x_P}{x_B - x_P} = k \tag{5}$$

Reagrupando os termos da equação (5) e isolando x_P , obtém-se uma expressão que permite calcular a abscissa do ponto P:

$$x_P = \frac{x_A - kx_B}{1-k} \qquad (6)$$

De modo análogo, considerando a equação (2), e utilizando o conceito de medida algébrica, os segmentos $\overline{RE}$ e $\overline{RF}$ podem ser calculados respectivamente por:

$$\overline{RE} = y_A - y_P \qquad (7)$$

$$\overline{RF} = y_B - y_P \qquad (8)$$

Substituindo (7) e (8) na equação (2), a constante de proporcionalidade k, para essa relação assume a seguinte forma:

$$\frac{y_A - y_P}{y_B - y_P} = k \qquad (9)$$

Reagrupando os termos da equação (9) e isolando o y_P, obtém-se a equação (10), que permite determinar a ordenada do ponto P, que divide o segmento $\overline{AB}$ numa razão dada:

$$y_P = \frac{y_A - ky_B}{1-k} \qquad (10)$$

Assim, as coordenadas do ponto $P(x_P, y_P)$, o qual divide o segmento $\overline{AB}$ na razão k, são obtidos da seguinte forma:

$$P\left(\frac{x_A - kx_B}{1-k}, \frac{y_A - ky_B}{1-k}\right) \qquad (11)$$

Pode-se ilustrar o uso de tais fórmulas, com o seguinte exemplo: encontrar as coordenadas do ponto $P(x_P, y_P)$, que divide na razão $k = -2$ o segmento cujas extremidades são os pontos $A(6, 2)$ e $B(1, -3)$.

Nesse caso, têm-se: $x_A = 6$; $x_B = 1$ e $k = -2$. Substituindo esses dados na equação (6), obtém-se a abscissa x_P:

$$x_p = \frac{6-(-2)\cdot 1}{1-(-2)} \quad \Rightarrow \quad x_p = \frac{8}{3}$$

Analogamente, para calcular a ordenada do ponto P, têm-se: $y_A = 2$; $y_B = -3$ e $k = -2$. Substituindo essas incógnitas na equação (10), obtém-se a ordenada y_P:

$$y_p = \frac{2-(-2)\cdot(-3)}{1-(-2)} \quad \Rightarrow \quad y_p = -\frac{4}{3}$$

Portanto, o ponto:

$$P\left(\frac{8}{3}, -\frac{4}{3}\right) \cong P_1(2{,}66\ldots; -1{,}33\ldots)$$

divide o segmento $\overline{AB}$ na razão $k = -2$.

A representação gráfica do problema pode ser visualizada na Figura 3.

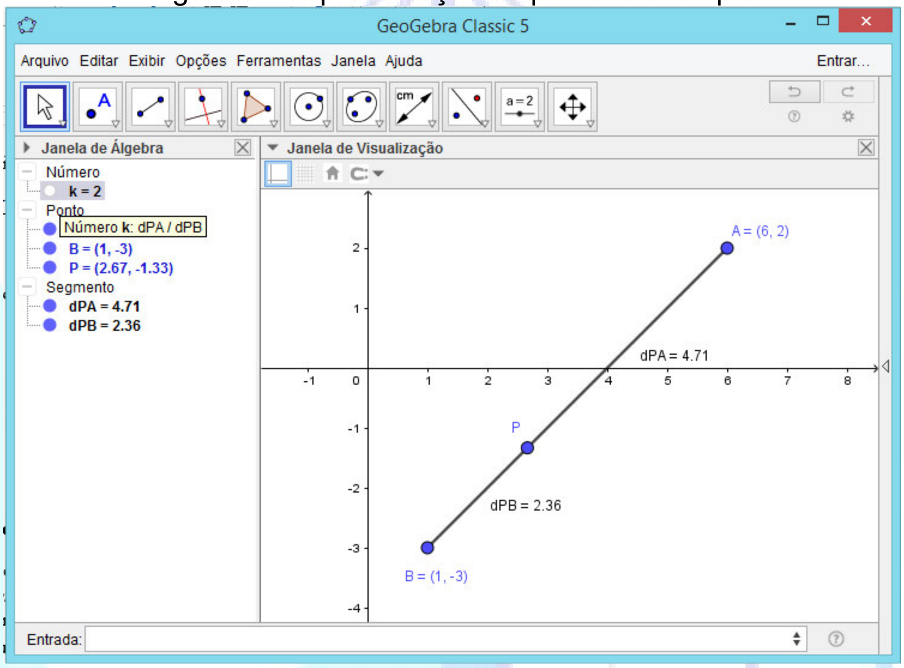
Também note que:

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = -\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = -k$$

, ou seja:

$$-\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = -\frac{\sqrt{\left(\frac{8}{3}-6\right)^2+\left(\frac{-4}{3}-2\right)^2}}{\sqrt{\left(\frac{8}{3}-1\right)^2+\left(\frac{-4}{3}+3\right)^2}} = -\frac{4{,}71}{2{,}36} = -2$$

Figura 3 - Representação do primeiro exemplo



Fonte: Autores – elaborado no software GeoGebra (2018)

Em seguida, apresenta-se um caso particular desse tipo de problema que motivou a percepção e uma resolução diferenciada dentre as apresentadas na literatura.

Divisão de segmentos em partes iguais

Um problema particular consiste em *"descobrir quais são as coordenadas de todos os n pontos que dividem o segmento numa mesma razão"*, ou seja, que dividem o segmento em $n+1$ partes iguais.

Primeira possibilidade de resolução: por meio da Geometria Analítica

Uma estratégia de resolução consiste na aplicação das fórmulas (6) e (8) n vezes, sendo que:

$P_1(x_1, y_1)$ dividirá o segmento na razão: $k_1 = \frac{-1}{n}$

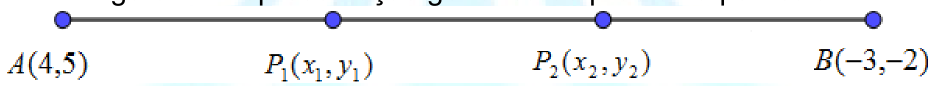
$P_2(x_2, y_2)$ dividirá o segmento na razão: $k_2 = \frac{-2}{n-1}$

...,

$P_n(x_n, y_n)$ dividirá o segmento na razão: $k_n = \frac{-n}{1}$

Como exemplo, suponha que se queira determinar as coordenadas dos dois pontos que dividem o segmento que tem por extremos os pontos $A(4,5)$ e $B(-3,-2)$ em três partes iguais. Nesse caso $n = 2$, ou seja, será necessário descobrir as coordenadas de dois pontos: $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$, conforme apresentado na Figura 4.

Figura 4 - Representação genérica do problema particular.



Fonte: Autores

Assim, para se calcular as coordenadas de$P_1(x_1, y_1)$, considera-se a razão: $k_1 = \frac{-1}{n}$, ou seja:$k_1 = \frac{-1}{2}$, pois:

$$k_1 = \frac{\overline{P_1A}}{\overline{P_1B}} = -\frac{1}{2}$$

Substituindo os valores na fórmula (6) e (10):

$$x_1 = \frac{4 - \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-3)}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} \ ; \ y_1 = \frac{5 - \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-2)}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} \Longrightarrow$$

$$P_1\left(\frac{5}{3}, \frac{8}{3}\right) \cong P_1(1{,}66 \ldots ; 2{,}66 \ldots)$$

Para se calcular as coordenadas de$P_2(x_2, y_2)$, considera-se a razão: $k_2 = \frac{-2}{n-1}$

Nesse caso:$k_2 = \frac{-2}{2-1} \Longrightarrow k_2 = \frac{-2}{1}$, o que corresponde à:

$$k_2 = \frac{\overline{P_2A}}{\overline{P_2B}} = \frac{-2}{1} = -2$$

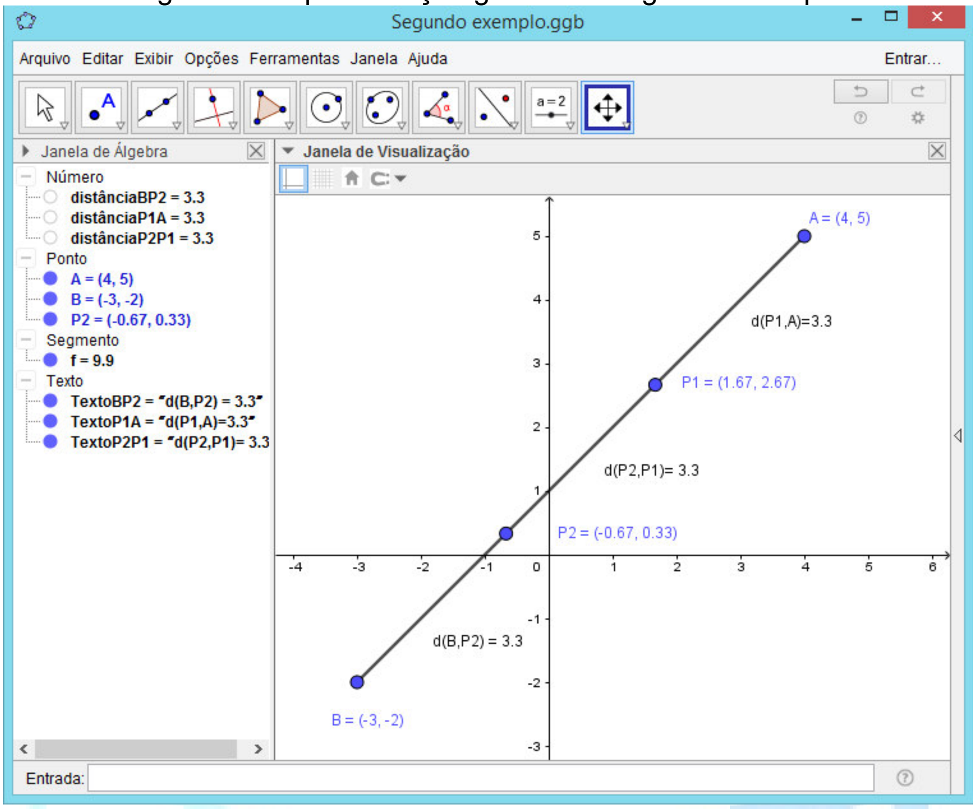
Substituindo os valores na fórmula (6) e (10):

$$x_2 = \frac{4 - (-2) \cdot (-3)}{1 - (-2)} \ ; \ y_2 = \frac{5 - (-2) \cdot (-2)}{1 - (-2)} \Longrightarrow$$

$$P_2\left(-\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right) \cong P_2(-0{,}66 \ldots ; 0{,}33 \ldots)$$

A representação do segundo problema pode ser visualizada na Figura 5.

Figura 5 - Representação gráfica do segundo exemplo



Fonte: Autores – elaborado no software GeoGebra (2018).

Segunda possibilidade de resolução: por meio da Geometria Plana

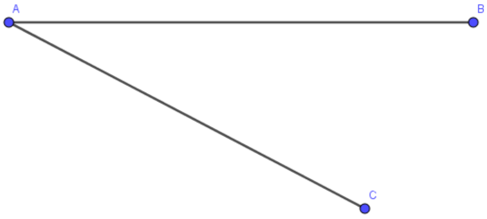
Na literatura, também se verifica que o problema de dividir um segmento em partes iguais pode ser resolvido por meio de construções geométricas.

Segundo Kilhian (2010), nesse caso, também é considerada a existência de segmentos proporcionais, obtidos pela aplicação do Teorema de Tales.

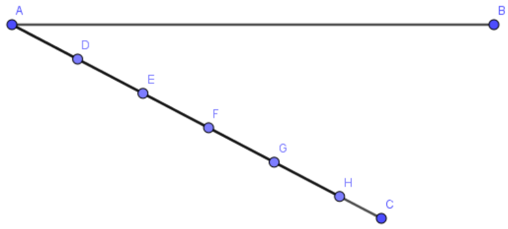
Assim, caso se queira dividir um segmento qualquer em n partes iguais, traça-se um segmento de reta auxiliar ao segmento $\overline{AB}$, com origem em um dos extremos do segmento original. Como exemplo, poderia ser o segmento auxiliar $\overline{AC}$, conforme apresentado na Figura 6(a), no qual se marcam n pontos equidistantes (qualquer distância escolhida), por meio do uso de régua e compasso. Desse modo, se queira dividir o segmento em cinco partes iguais, marcaríamos cinco pontos equidistantes ($D, E, F, G,$ e H), conforme apresentado na Figura 6(b).

Posteriormente, une-se o último ponto marcado no segmento auxiliar ao outro extremo do segmento original. No exemplo, seria obtido o segmento $\overline{HB}$ (ver Figura 6(c)), e traçam-se paralelas a ele, passando pelos pontos equidistantes, os quais foram marcados no segmento auxiliar inicial $\overline{AC}$ (ver Figura 6 (d)).

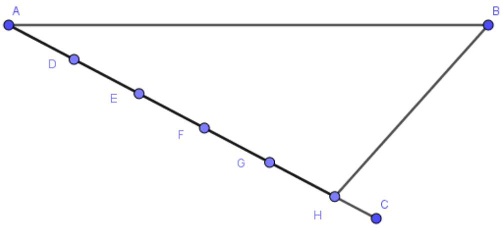
Figura 6 - Construção gráfica para resolução do problema particular



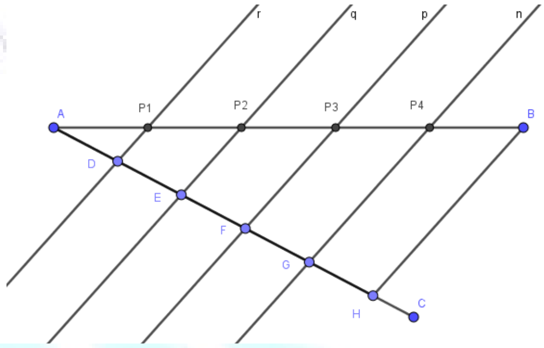
Primeira parte



(b) Segunda parte



(c) Terceira parte



(d) Quarta parte

Fonte: Autores.

Sabe-se que:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DE}} = 1$$

e pelo Teorema de Tales:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AP_1}}{\overline{P_1P_2}} = 1$$

, ou seja: $\overline{AP_1} = \overline{P_1P_2}$

De modo análogo, demonstra-se que os pontos P_1, P_2, P_3 e P_4 dividem o segmento $\overline{AB}$ em cinco partes iguais.

Terceira possibilidade de resolução: proposta alternativa com uso do conceito de progressão aritmética

Ao ser proposto o problema de dividir um segmento em partes iguais em sala de aula, uma acadêmica do curso de licenciatura em Matemática percebeu que ele poderia ser resolvido por meio de uma abordagem alternativa, que consistia na utilização do conceito de Progressão Aritmética (P.A.), pois, assim como a distância que deveria ser igual entre dois pontos quaisquer segue uma dada razão, a P.A. também poderia ser definida em torno dessa razão estabelecida.

Além disso, a estudante observou que, assim como o ponto médio de um segmento é obtido por meio da média aritmética entre abscissas e ordenadas relativas aos pontos extremos do segmento, o termo central de uma P.A. também é obtido por meio da média aritmética dos termos dos extremos, ou seja:

a) Na Progressão Aritmética: (a_1, a_2, a_3) o termo central pode ser calculado como:

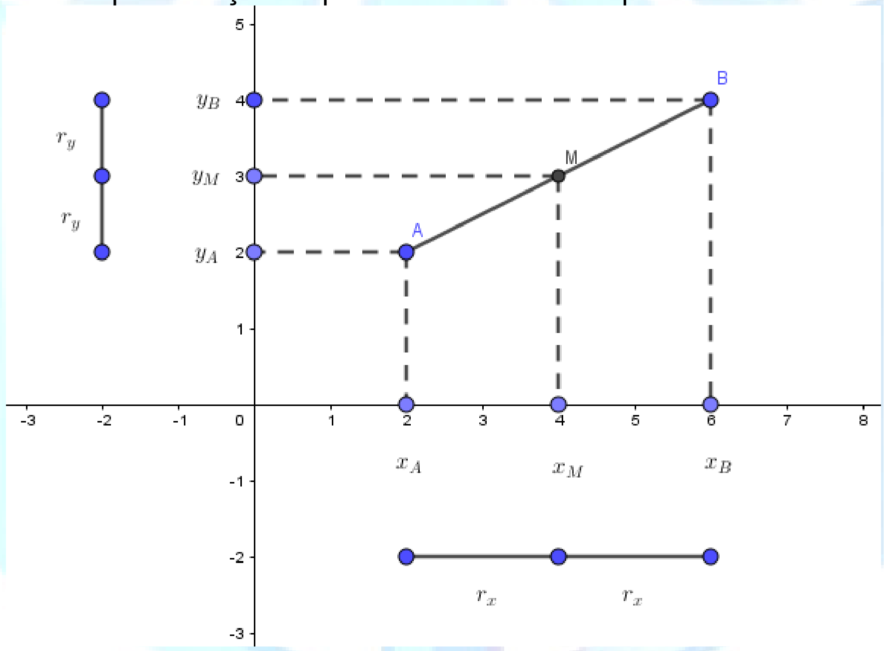
$$a_2 = \frac{a_{1+}a_3}{2}$$

b) No segmento de reta $\overline{AB}$, considerando os pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ como extremos do segmento, o ponto médio é dado por

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

Desse modo, verificou-se que as relações se assemelham, uma vez que, analisam-se as abscissas como uma P.A. de razão r_x e as ordenadas como outra P.A. de razão r_y, conforme pode ser observado na Figura 7.

Figura 7 - Representação do ponto médio e razões que se mantêm nos eixos



Fonte: Autores – elaborado no software GeoGebra (2017).

No caso do ponto médio:

a) a razão r_x pode ser calculada por:

$$r_x = \frac{x_B - x_A}{2}$$

b) a razão r_y pode ser calculada por:

$$r_y = \frac{y_B - y_A}{2}$$

Assim, as coordenadas da P. A. (x_A, x_M, x_B), em relação ao eixo das abscissas, com razão $r_x = \frac{x_B - x_A}{2}$, podem ser calculadas como:

$$x_A = x_A$$

$$x_M = x_A + r_x \qquad \Longrightarrow \qquad x_M = x_A + \frac{x_B - x_A}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$$

$$x_B = x_A + 2r_x \qquad \Longrightarrow \qquad x_B = x_A + 2\left(\frac{x_B - x_A}{2}\right) \qquad \Longrightarrow \qquad x_B = x_B$$

De modo análogo, as coordenadas da P.A. (y_A, y_M, y_B), em relação ao eixo das ordenadas, com razão $r_y = \frac{y_B - y_A}{2}$, podem ser calculadas como:

$$y_A = y_A$$

$$y_M = y_A + r_y \qquad \Longrightarrow \qquad y_M = y_A + \frac{y_B - y_A}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

$$y_B = y_A + 2r_y \qquad \Longrightarrow \qquad y_B = y_A + 2\left(\frac{y_B - y_A}{2}\right) \qquad \Longrightarrow \qquad y_B = y_B$$

Generalizando, verifica-se a aplicabilidade da fórmula para o cálculo do termo geral de uma P.A. de razão r: $a_n = a_1 + (n-1).r$, para se obter as coordenadas dos pontos que dividem um segmento em $n - 1$ partes iguais, na qual considera-se:

$a_n =$ último termo, $a_1 =$ primeiro termo, $n =$número de termos e $r =$ razão.

Para tanto, ao considerar o segmento de reta $\overline{AB}$:

a) Para se calcular as abscissas dos pontos considera-se: $a_1 = x_A$; $a_n = x_B$ e a razão:

$$r_x = \frac{x_B - x_A}{n - 1}$$

onde n é a quantidade de pontos que se deseja obter (incluindo os extremos). Desse modo:

$$a_1 = x_A$$

$$a_2 = x_1 = x_A + r_x$$

$a_3 = x_2 = x_A + 2r_x$ ...

$a_n = x_B = x_A + (n-1)r_x$

b) Para se calcular as ordenadas dos pontos considera-se: $a_1 = y_A$; $a_n = y_B$ e a razão:

$$r_y = \frac{y_B - y_A}{n - 1}$$

, onde n é a quantidade de pontos que se deseja obter (incluindo os extremos). Desse modo:

$$a_1 = y_A$$

$$a_2 = y_1 = y_A + r_y$$

$a_3 = y_2 = y_A + 2r_y$ ...

$$a_n = y_B = y_A + (n-1)\ r_y$$

Usando esse resultado no exemplo anterior, no qual era solicitado que fossem determinadas as coordenadas dos pontos que dividem em três partes iguais o segmento que tem por extremos os pontos $A(4,5)$ e $B(-3,-2)$, se procederia do seguinte modo:

a) Para o cálculo da P.A. das abscissas: $(x_A, x_1, x_2, x_B) = (a_1, a_2, a_3, a_4)$

Sabe-se que $a_1 = x_A$; $a_4 = x_B$ e $n = 4$

Além disso: a razão:

$$r_x = \frac{x_B - x_A}{n - 1}$$

é dada por

$$r_x = \frac{-3 - 4}{4 - 1} = \frac{-7}{3}$$

Assim:

$$a_2 = a_1 + r_x \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_A + r_x \quad \Rightarrow \quad x_1 = 4 + \left(\frac{-7}{3}\right) \Rightarrow \quad a_2 = x_1 = \frac{5}{3}$$

$$a_3 = a_1 + 2r_x \Rightarrow x_2 = x_A + 2r_x \Rightarrow x_2 = 4 + 2\left(\frac{-7}{3}\right) \Rightarrow a_3 = x_2 = -\frac{2}{3}$$

b) Para o cálculo da P.A. das ordenadas: $(y_A, y_1, y_2, y_B) = (a_1, a_2, a_3, a_4)$

Sabe-se que $a_1 = y_A$; $a_4 = y_B$ e $n = 4$

Além disso: a razão:

$$/r_y = \frac{y_B - y_A}{n - 1}$$

é dada por:

$$r_y = \frac{-2 - 5}{4 - 1} = -\frac{7}{3}$$

Assim:

$$a_2 = a_1 + r_y \quad \Rightarrow \quad y_1 = y_A + r_y \quad \Rightarrow \quad y_1 = 5 + \left(\frac{-7}{3}\right) \Rightarrow \quad a_2 = y_1 = \frac{8}{3}$$

$$a_3 = a_1 + 2r_y \Rightarrow y_2 = y_A + 2r_y \Rightarrow y_2 = 5 + 2\left(\frac{-7}{3}\right) \Rightarrow a_3 = y_2 = \frac{1}{3}$$

Logo, as coordenadas dos pontos são:

$$P_1\left(\frac{5}{3}, \frac{8}{3}\right) \cong P_1(1{,}66\ldots; 2{,}66\ldots)\ ;\ P_2\left(-\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right) \cong P_2(-0{,}66\ldots; 0{,}33\ldots)$$

Considerações Finais

Nota-se que a resolução algébrica disponibilizada na literatura, apresentada no contexto da Geometria Analítica, para o problema da divisão de um segmento de reta em partes iguais, apesar de ser precisa, torna-se extensa à medida que a quantidade de pontos considerados sobre o segmento aumenta o que torna o cálculo manual extenso e demorado.

Com os resultados obtidos, foi possível verificar, que a interação entre conhecimentos geométricos e algébricos podem auxiliar na compreensão e na resolução de problemas, podendo tornar o processo mais rápido, conforme apresentado no artigo.

Além da facilitação dos cálculos algébricos, em relação aos processos usuais, presentes na literatura consultada, a resolução apresentada permite perceber relações entre diversos conceitos matemáticos, tais como: ponto médio, pontos equidistantes e progressão aritmética, o que também favorece a compreensão desses tópicos da geometria analítica e da álgebra, para os estudantes de matemática. Destaca-se que normalmente tais conceitos são trabalhados isoladamente no Ensino Médio, o que não favorece a aprendizagem significativa. Destaca-se que na solução alternativa apresentada, a estudante percebeu que poderia interpretar os segmentos proporcionais como termos de uma P.A., onde o crescimento (ou decrescimento) é dado através de uma razão pré-estabelecida, o que foi algo inovador na resolução do problema proposto.

Duval (2011) indica que a maior dificuldade na aprendizagem da Matemática decorre do fato de que o acesso aos objetos matemáticos implica na utilização e no trânsito entre sistemas semióticos existentes. Segundo ele, um sistema semiótico se constitui num conjunto de signos, organizados segundo regras próprias de formação e de convenções, que apresentam relações internas as quais permitem identificar os objetos por meio dele representados. Assim, destaca que um sistema semiótico tem a função de comunicação, pois possibilita produzir e transmitir informações.

Duval (2003) destaca que a representação de objetos matemáticos pode envolver diferentes "registros de representação" semióticos, sendo eles de quatro tipos: figural, simbólico, gráfico ou língua natural. Além disso, indica que a compressão matemática está associada ao desenvolvimento da capacidade de percepção, de representação e de coordenação de mudanças possíveis entre ao menos dois tipos de registros de representação semiótica, as quais podem ser estimuladas pela manipulação das representações dos objetos matemáticos tratados, no trânsito entre os diferentes sistemas semióticos existentes.

Na investigação bibliográfica realizada, ao pesquisar sobre possibilidades de resolução disponíveis na literatura, foi possível perceber que o assunto, inicialmente abordado na disciplina de "Geometria Analítica" (pontos que dividem um segmento em uma razão dada), também tinha resolução geométrica por meio de conceitos trabalhados na disciplina de "Desenho geométrico", uma vez que, o Teorema de

Tales, base para o estudo do conteúdo do artigo, pôde ser percebido e aplicado nessa situação.

Deste modo, percebe-se que a interação entre conteúdos matemáticos pode estimular e favorecer a compreensão de diversos conceitos. Em resoluções, tais como a alternativa apresentada, verifica-se que, ao estimular o trânsito entre diferentes registros semióticos, é possível acionar conceitos prévios existentes nas estruturas cognitivas dos estudantes, de modo a propiciar a construção de novos conceitos, o que possibilita a ocorrência da almejada aprendizagem significativa em matemática.

Referências

BAUMGART, J. K. **Álgebra:** tópicos de história da matemática para uso em sala de aula. São Paulo: Atual Editora, 1992.

BONGIOVANNI, V. **O Teorema de Tales: uma ligação entre o geométrico e o numérico.** Disponível em: < https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/12993/12094>. Acesso em: 31 de outubro 2017.

BOYER, C. B. **História da matemática.** São Paulo, SP. Editora Edgar Blucher LTDA, 1974. 488p.

DUVAL, R. Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: Machado, Silvia Dias Alcântara (Org). **Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica.** Campinas, SP: Papirus, p. 11-33. 2003.

__________ **Ver e ensinar a matemática de outra forma:** entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas. São Paulo: PROEM, 2011.

EVES, H. **Introdução à história da matemática.** Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2004. 843p.

KILHIAN, K. **Divisão de um segmento de reta em n partes iguais.** O Baricentro da Mente. 2010. Disponível em:< https://www.obaricentrodamente.com/2010/10/divisao-de-um-segmento-em-n-partes.html>. Acesso em: 15 de fev. de 2018.

LAVAL, A.; SANTOS, D. L. Uma história concisa da geometria analítica. In: DANYLUK, O. S., ET AL (Orgs.). **História educação matemática: escrita e reescrita de histórias.** Porto Alegre, RS: Editora Meridional LTDA, p. 170-207. 2009.

REY, R. D. **A Origem da Álgebra**. 2010. Disponível em: <http://matematiques.com.br/conteudo.php?id=603>. Acesso em: 21 de abril de 2020.

STEINBRUCH, A.; BASSO, D. **Geometria analítica plana.** São Paulo: Makron, MacGraw, 1991. 193p.

Submetido em: 28 de setembro de 2018

Aceito em: 20 de abril de 2020