



**A Formação de Professores de Matemática frente à
Aprendizagem Ativa Significativa e à Inclusão do Aluno com
Deficiência Visual**

**The Mathematics Teachers Education in the face of Significant Active
Learning and the Inclusion of Visual Impairment Student**

Ana Maria Martensen Roland Kaleff¹

RESUMO

Desde meados da década de 1990, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e atualmente a recente Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para o Ensino Fundamental, apontam, no campo da Educação Matemática, para a importância de que o futuro professor possa, desde o início de sua formação, vivenciar práticas ativas em laboratórios de ensino com recursos didáticos concretos e conteúdos digitais. Bem como, a aquisição de conceitos, técnicas, competências e processos matemáticos devem ser decorrentes principalmente de atividades ligadas à resolução de situações-problema significativas para o aluno. Apresentamos ações advindas dessas orientações, nas quais a aprendizagem ativa significativa ocorre por meio do envolvimento dinâmico do futuro professor em busca da inclusão de alunos com deficiência visual em um contexto escolar regular. Tudo isso, associado ao desenvolvimento de recursos didáticos inclusivos para a sala de aula e a um museu interativo de matemática.

Palavras-chave: Educação Matemática. Aprendizagem Significativa. Educação Inclusiva.

ABSTRACT

Since the mid nineties, the National Curricular Parameters and the Common National Curricular Base for elementary and middle school (recently published) point the importance of allowing the in-service teachers to be exposed since the early stages of their education to live active practices in teaching laboratories with concrete didactic resources and digital contents in the field of Mathematics Education. Moreover, the acquisition of concepts, techniques and competences in mathematical procedures should mainly be consequent on the

¹ Doutora em Educação pela Universidade Federal Fluminense/FEUFF; Docente da Universidade Federal Fluminense/UFF, Niterói, Rio de Janeiro, Brasil. E-mail: anakaleff@vm.uff.br

development of activities related to the resolution of problem-situations significant to the student. We present activities based on such orientations in which significant active learning should be associated to the dynamic involvement of the becoming teacher in the intent of including visually impaired students into a regular school context. All this is associated with the development of inclusive didactic resources for the classroom and an interactive math museum.

Keywords: Mathematics Education. Significant Learning. Inclusive Education.

Introdução

As ações arroladas no presente artigo se relacionam a práticas educacionais coordenadas pela autora, entre 1994 a 2018, no Laboratório de Ensino de Geometria (LEG), no âmbito da formação de professores de matemática, em projetos sediados no Instituto de Matemática e Estatística da UFF (IME/UFF), em Niterói-RJ. Nestas práticas, os licenciandos eram convidados a conhecer e desenvolver recursos didáticos para o ensino de matemática, enfocando tanto relações entre conteúdos matemáticos e materiais didáticos manipulativos (concretos e virtuais) para um laboratório, quanto relações interpessoais envolvendo professor e aluno.

Fundado e idealizado pela autora, o LEG constitui-se em um ambiente de colaboração social em que todos os participantes (alunos licenciandos em Matemática e professores) se engajam em um processo de ações criativas inovadoras e desafiadoras, integradas a projetos de pesquisa, monitoria e extensão.

Os procedimentos educacionais desenvolvidos no LEG se desenvolveram segundo duas vertentes. Na primeira, buscava-se permitir ao licenciando vivenciar e reconhecer situações potencializadoras de uma aprendizagem ativa significativa dos conteúdos matemáticos por parte do aluno da escola básica (principalmente os da geometria escolar e da introdução às geometrias não euclidianas). Na segunda vertente, desde 2008, buscou-se também preparar o futuro professor para a docência da educação inclusiva na escola regular, objetivando a produção de recursos didáticos (novos ou adaptados) para o ensino de matemática para alunos com deficiência visual. Essas duas vertentes educacionais serão tratadas a seguir a luz do que entendemos por inclusão, por aprendizagem ativa significativa em sua relação com a modelagem de recursos didáticos manipulativos e suas representações matemáticas; apresentamos um Museu Interativo que criamos no LEG e terminamos apresentando uma coleção de recursos didáticos concretos e virtuais destinada ao ensino de curvas cônicas.

Como entendemos a inclusão

Inicialmente, enfatizamos que, no presente texto, estamos utilizando a expressão “aluno com deficiência” assumindo sua condição de pessoa inteira, com sua deficiência construída socialmente, e a ela remetida (ONU, 2006). No caso da limitação devida à deficiência visual, nos referimos ao “aluno cego” ou “aluno com baixa visão”. (BRASIL, 2003). As expressões “escola regular” e “sala de aula regular” se referem à sala de aula das escolas pertencentes ao sistema de ensino comum e não pertencentes ao âmbito das escolas especializadas, como o caso do Instituto Benjamim Constant (IBC), no Rio de Janeiro, voltada para o ensino de crianças com deficiência visual.

Cabe dizer também que comungamos com Fernanda M. C. da Rosa, ao entendermos a inclusão como um processo social que não se restringe às pessoas com deficiência, mas é extensivo a todos, pois consideramos ser: “necessário desconstruir os padrões e as convenções sociais (im)postas pelos os que se consideram maioria, assim como é fundamental que se rompa com o preconceito e com a construção social da deficiência [...]” (ROSA, 2017, p. 25). Além disso, concordamos com aqueles educadores que consideram não ser a Escola constituída por salas de aulas homogêneas, em que uma única maneira de ensinar iria suprir a todas as dificuldades dos aprendizes. Acreditamos que o sistema escolar precisa eliminar a ideia dessa homogeneidade e deva buscar desconstruir a dicotomia Inclusão/Exclusão, considerando que todos devam ter o mesmo direito à escolaridade, segundo as suas necessidades. Desta forma, todos devem ser incluídos, independentemente de suas facilidades e dificuldades (físicas ou mentais), respeitando as suas singularidades com vistas a uma aprendizagem significativa.

Podemos adiantar que a diversidade dos materiais didáticos manipulativos criados no LEG permite ao licenciando e ao professor em exercício, ainda que com poucos recursos monetários, transformar a sua sala de aula em um ambiente lúdico, motivador e inclusivo, o que possibilita uma maior aceitação da matemática escolar, além da disciplina ministrada alcançar um maior número de alunos evitando a exclusão escolar. Tais recursos possibilitam levar o estudante, vidente ou com deficiência visual, a uma aprendizagem ativa significativa dos conceitos matemáticos e a “não só ver a matemática escolar com as mãos, olhos e mente, mas também vê-la com o coração” (KALEFF, 2016b, p. 210).

Como entendemos a aprendizagem ativa significativa

Ao considerarmos a aprendizagem ativa, podemos primeiramente recordar que, há mais de cinco décadas, pesquisadores da área da Educação Matemática têm investigado o impacto de técnicas de ensino que hoje poderiam ser consideradas como *técnicas de aprendizagem ativa*, principalmente na educação de crianças e adolescentes. Tanto nos Estados Unidos, como na Europa e Brasil, foram realizadas muitas pesquisas com base construtivista e de interação entre o aprendiz com o meio ambiente, com recursos concretos manipulativos, com outros alunos e com o professor (interação social). Tais pesquisas, fundamentadas em estudos de educadores como Jerome Bruner, Jean Piaget, Lev Vygotsky e muitos outros, ressaltam o papel ativo da ação do aprendiz na formação do seu conhecimento.

A sociedade atual exige cada vez mais pessoas que saibam criar, pesquisar, interagir, colaborar e compartilhar, entre outras competências, pois tudo está em transformação, principalmente o que concerne aos âmbitos das áreas científicas e tecnológica. Nestas, praticamente a cada dia, surgem e exigem novas competências dos indivíduos. Assim, as competências que (re)conhecemos hoje deverão fazer parte do processo de ensino e aprendizagem do sujeito para que se torne apto a se realizar como ser humano e cidadão neste momento tão singular da Humanidade. Para tanto, acreditamos que os estudantes necessitem desenvolver, desde a mais tenra idade e com a orientação dos professores, sua capacidade autodidata durante a vida escolar, de forma a serem capazes de continuar aprendendo novas competências ao longo da vida, sem a necessidade de voltar à sala de aula. Portanto, como bem salienta a BNCC, a sala de aula deve se transformar em espaço de desenvolvimento de competências, onde a pesquisa, a troca de ideias, o exercício da argumentação e do diálogo, bem como de experiências colaborativas sejam as bases da interação e do desenvolvimento do conhecimento, deixando de lado a mera replicação de conteúdo (BRASIL, 2017).

Sob essas considerações é necessário que a Escola se renove em suas propostas didáticas e busque práticas educacionais inovadoras, diferentes daquelas metodologias de ensino clássicas, ou seja, a Escola pratique metodologias diferenciadas que sejam antagônicas às práticas meramente discursivas das aulas expositivas, nas quais se pretende que a aprendizagem do aluno fique subordinada ao ensino do professor e a currículos fixamente determinados. É sob esta perspectiva de inovação que surgiram ações didáticas ligadas à *aprendizagem ativa*, um termo empregado atualmente para indicar um conjunto de práticas pedagógicas (incluindo virtuais) que tratam do processo de aprendizagem do aluno no qual,

ênfatiza-se e se privilegia a atuação intensa e “o papel protagonista do aluno, ao seu envolvimento direto, participativo e reflexivo em todas as etapas do processo, experimentando, desenhando, criando, com orientação do professor” (MORAN, 2018, p. 3).

No decorrer do processo de aprendizagem ativa, é importante que o professor tenha em mente o papel fundamental do diálogo com o aluno, das orientações a serem estabelecidas nas atividades didáticas e nas perguntas que ele faz ao estudante. Enquanto algumas perguntas podem ser respondidas por repetição de informação adquirida anteriormente, mas não necessariamente compreendida pelo aluno (como muitas vezes nas aulas de expositivas sobre padrões e elementos matemáticos), outras perguntas não podem ser respondidas prontamente por repetição e padronização, pois devem ser de tal forma constituídas que induzam à reflexão. Essas perguntas devem ser geradoras de novos construtos mentais e geralmente motivadoras da ação do aluno, pois devem ajudar a ultrapassar ou a evitar possíveis *obstáculos cognitivos* que surgem ao longo de uma tarefa escolar a ser realizada. Ou seja, durante as atividades escolares para o entendimento de conceitos matemáticos, podem surgir blocos cognitivos, na mente do aluno, mesmo em adultos, “que impedem ou perturbam o estabelecimento de relações entre as representações mentais do sujeito no processo de compreensão de um conceito” (KALEFF, 2007, p. 72).

Há anos, nas pesquisas realizadas no LEG, observamos vários obstáculos cognitivos relativos ao reconhecimento de figuras tridimensionais em desenhos bidimensionais, como, por exemplo, nos de cubos traçados em perspectiva como figuras hexagonais planas (KALEFF; GARCIA; REI, 1996). Este reconhecimento do objeto espacial em um desenho traçado no plano é uma fonte de obstáculos cognitivos que vão interferir no desempenho do aluno (tanto de crianças como adultos e professores), até mesmo em situações cotidianas, como, por exemplo, no cálculo do volume de figuras de sólidos elementares (KALEFF, 2017). Sabendo que tal cálculo faz parte do currículo escolar dos anos iniciais, como preconiza a BNCC, o ensino desse conteúdo nos causa preocupação, pois ele é um fator de reprovação e até da exclusão escolar precoce do aluno, muitos ainda em tenra idade.

Por outro lado, ainda temos outras preocupações se considerarmos a aprendizagem significativa da definição de um conceito matemático em sala de aula. Para que se dê tal aprendizagem, devemos realizar um trabalho preparatório com o aluno, o qual deve estar adequadamente relacionado à sua idade e maturidade cognitiva. Para tanto, devemos levar o aprendiz a realizar atividades as quais possibilitam os primeiros contatos com os atributos

relevantes do conceito matemático em questão, ou seja, com suas características determinantes, bem como com seus atributos não relevantes. Comungando com Bairral e Silva (2004), consideramos atributos relevantes àqueles que aparecem em qualquer exemplo do conceito matemático, isto é, são *todos* os atributos que devem ser satisfeitos para se ter um exemplo positivo desse conceito. Enquanto que, os atributos não relevantes são características que se apresentam em *apenas alguns* exemplos desse conceito. Cabe adiantar que, atividades criadas no LEG e apresentadas junto a recursos manipulativos no ambiente de um Museu Interativo permitem essa abordagem.

É preciso salientar que, da mesma maneira que os educadores matemáticos israelenses liderados por Rina Hershkowitz, entendemos ser do confronto entre o *sim* e o *não*, ou seja, frente à presença e à ausência de atributos relevantes que o aluno vai construindo o significado do conceito matemático, tornando a sua aprendizagem em uma aprendizagem significativa (HERSHKOWITZ, 1994). Dessa forma, a definição de um conceito matemático surge como consequência de um processo construtivo de elaboração cognitiva (mental) do aluno, portanto, não lhe sendo apresentada *a priori* pelo professor.

Bem sabemos que, muitas vezes, tal processo de elaboração mental da construção do conceito, como o que aqui estamos considerando, parece ser inadequado e, até mesmo, errôneo, para muitos professores, principalmente para aqueles que estão acostumados a ministrar aulas expositivas no ensino tradicional, partindo de uma definição, seguida por exemplos e contraexemplos de um conceito matemático. No entanto, como muitas pesquisas em Educação Matemática têm mostrado, a maioria das crianças apresenta sucesso em tarefas que permitem a construção do conceito e do significado matemáticos de uma definição elementar, por meio de um procedimento didático que envolva seus atributos ou características relevantes. Por outro lado, a aprendizagem matemática está ligada à compreensão, isto é, à apreensão do significado. Portanto, apreender o de um conceito (definição de um objeto ou propriedade matemática) pressupõe perceber suas relações com outros objetos e acontecimentos, dentro de um determinado contexto. Isto pode ser visto em destaque na BNCC, pois entre as competências específicas que a matemática escolar pode desenvolver no aluno do ensino fundamental, o documento considera as de:

Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens: gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna.

Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados. (BRASIL, 2017, p. 221).

É necessário ressaltar ainda que o conceito de um objeto matemático pressupõe um significado individual para cada aluno, assim, a aprendizagem significativa desse conceito, bem como a sua decorrente definição matemática, estão diretamente vinculadas à sua funcionalidade e resolução de situações-problema, pois os conhecimentos adquiridos devem ser efetivamente utilizados quando a circunstância em que o aluno se encontra o exija. Relembrando os PCN, ressaltamos que “o significado da Matemática para o aluno resulta das conexões que ele estabelece entre ela e as demais disciplinas, entre ela e seu cotidiano e das conexões que ele estabelece entre os diferentes temas matemáticos” (BRASIL, 1998, p. 20).

Como entendemos a manipulação dos recursos didáticos e as representações matemáticas

A guisa de esclarecimento, o LEG se caracteriza por uma forma bastante peculiar de laboratório de ensino de matemática porque é mais do que uma sala repleta de armários e computadores cheios de recursos manipulativos concretos ou virtuais, na qual ocorrem vivências interativas com os mesmos. Em tal espaço físico se desenvolve um processo de ensino e se mantém o acervo do *Museu Interativo Itinerante Inclusivo de Educação Matemática: o Museu LEGI*.

Se a palavra museu lembra uma coleção antiga, pronta e acabada de determinados objetos, que não devem ser tocados, este não é o caso do LEGI. Ao contrário, trata-se de um acervo vivo, que, embora fique parcialmente em exposição em um dos corredores do IME/UFF, suas mostras são dinâmicas e seus recursos interativos, pois seu acervo é constantemente renovado por novos recursos educacionais e materiais manipulativos a serem colocados à disposição dos visitantes. Este acervo está em permanente crescimento pelo trabalho colaborativo de todos que circulam pelo LEG: alunos da licenciatura, professores da universidade, bolsistas de extensão dos projetos alocados no LEG, monitores de disciplinas, professores colaboradores externos etc. Para mais detalhes sobre as parcerias com projetos e escolas, ver Dysman e Kaleff (2011) ou Kaleff (2016a; 2016b).

O acervo do Museu LEGI ganha vida e crescimento em todas as aulas e reuniões que acontecem no laboratório e quando é apresentado em exposições itinerantes, pelo Brasil. (KALEFF, 2012; 2016b). Durante as aulas, os licenciandos e os bolsistas são convocados a

participar da criação e manutenção de recursos didáticos manipulativos (concretos e digitais), aprendem conteúdos teóricos e práticos necessários ao uso e desenvolvimento de tais recursos para ensino de matemática, realizam pesquisas para a criação de novos materiais e, de fato, produzem e renovam constantemente o acervo do Museu.

Devemos nos lembrar que as aulas, nas quais o aluno (licenciando ou da escola básica) dispõe de recursos didáticos manipulativos e atividades como as realizadas no LEG e em uma mostra do Museu Interativo, permitem o desenvolvimento do potencial próprio do estudante, ou seja, o de fazer com que o aprendiz se envolva de maneira ativa e sensorial com os materiais manipulativos, ampliando sua percepção sobre o que está sendo aprendido e despertando sensações, tais como curiosidade, atenção e compreensão.

Estas sensações conduzem o aprendiz à motivação geradora de um envolvimento pleno e característico do estado lúdico. Assim sendo, a ludicidade provocada por um recurso didático, não depende só da beleza do mesmo e do possível envolvimento do aluno devido à sua atração estética (das cores e formas harmônicas), mas do uso adequado do recurso e da orientação do professor.

Além disso, embora consideremos que a ludicidade auxilia a aprendizagem, ela não é suficiente para garantir uma aprendizagem significativa. Portanto, sem conhecimento adequado para o uso correto dos recursos didáticos, o professor corre o risco de se ver em uma situação em que apesar de levar à atuação ativa do aluno, não se fazem presentes nem a esperada ludicidade e muito menos a aprendizagem significativa. Como já apontamos em outros documentos, não está no “jogo pelo jogo e nem no material pelo material” a importância de um bom recurso didático manipulativo concreto ou virtual, mas na sua potencialidade para levar o aluno à aprendizagem desejada pelo professor (KALEFF, 2016a)

É preciso ressaltar que cada recurso didático desenvolvido no LEG sempre é acompanhado por um *Caderno de Atividades*, as quais buscam permitir ao professor agir como um verdadeiro orientador do aluno na busca ativa pelo conhecimento, ou seja, a fomentar e guiar o estudante para a descoberta e ao desenvolvimento do significado do conceito matemático envolvido (modelado) no recurso. No entanto, as atividades também permitem o aluno interagir de maneira ativa autônoma com o material manipulativo, sem o auxílio do professor. Até mesmo ao aluno com deficiência visual é capaz de ter essa autonomia, pois os Cadernos são impressos em tipo de letra grande (no mínimo 24 pts) e em

Braille, o que permite a leitura, tanto pelo aluno com baixa visão quanto pelo cego. Bem como os desenhos são traçados em alto-relevo, o que permite a sua percepção tátil.

As atividades e a manipulação ativa de um recurso didático (jogos diversos, quebra-cabeças planos ou espaciais; aparelhos modeladores de elementos geométricos e superfícies, ábacos diversos etc.) permitem o aluno tanto se tornar consciente das propriedades matemáticas modeladas pelo mesmo como a descobrir as representações gráficas (traçados de desenhos e gráficos) ou representações linguísticas (por meio do surgimento de símbolos e sinais) que representam o conceito. Dessa maneira, enfatizamos que, no LEG, partindo-se de um recurso didático manipulativo modelador do conceito, as atividades buscam levar o aluno a diversas representações (semióticas) matemáticas.

Enfatizamos também que, essa estratégia de condução das atividades, potenciadora da aprendizagem significativa, ao levar o aluno a interagir ativamente com o recurso didático, está em consonância com aquelas apresentadas pelas educadoras matemáticas Bartolini Bussi e Alessandra Mariotti, bem como com Raymond Duval, pois, no LEG: consideramos o *recurso didático* como *uma ferramenta de mediação semiótica* quando usada pelo professor para intervir intencionalmente na aprendizagem das representações matemáticas de um conteúdo, por meio de grafias diversas, símbolos e sinais (BUSSI; MARIOTTI, 2008).

Pelo apresentado, os recursos e atividades desenvolvidos no LEG, sempre tiveram sua criação fundamentada em conhecimentos teóricos rigorosos, tanto a partir dos aspectos matemáticos quanto dos pedagógicos. Por outro lado, na construção dos recursos foi necessário se fazer uso de matéria prima de baixo custo, para que pudessem ser reproduzidos por professores da educação básica; ter portabilidade, para atender à itinerância do Museu e também possuir versões para a educação inclusiva das pessoas com baixa visão e cegos.

Assim, no processo de pesquisa e desenvolvimento dos recursos didáticos, os licenciandos sempre vivenciaram situações que se mostraram determinantes para a construção de suas identidades como professores. No desenvolvimento dos materiais inclusivos, por exemplo, vivenciaram, de diferentes formas, a realidade dos estudantes com deficiência visual (KALEFF, 2016b). Buscaram soluções que possibilitassem a interação destes alunos com os recursos produzidos, trabalharam com formas, relevos, texturas etc., para substituir as cores que se apresentavam nos materiais; aprenderam a ler e escrever em Braille, pois necessitavam editar as atividades nesse registro para que um cego pudesse lê-las.

Além disso, na medida do possível, os licenciandos estabeleceram contato com estudantes cegos ou com visão muito baixa em ações práticas realizadas no IBC e no Colégio Pedro II, no Rio de Janeiro e Niterói. Nestas ocasiões, bem como em contato com pessoas com tal deficiência nas mostras do Museu LEGI, os futuros professores aprenderam que precisam compreender como cada pessoa percebe ou entende o mundo a sua volta, para poder auxiliá-la na construção dos conceitos matemáticos, e também para poder desenvolver atividades adaptáveis às diferentes necessidades de cada aprendiz.

No que se segue, apresentamos uma coleção de recursos manipulativos concretos que foram criados ao longo de mais de 10 anos por monitores e bolsistas dos projetos alocados no LEG.

Exemplo de recursos didáticos manipulativos concretos e virtuais: seções e curvas cônicas

Os recursos sobre o ensino de cônicas aqui descritos a seguir, foram a base de três experimentos educacionais criados em ambiente virtual no âmbito do projeto *Conteúdos Digitais para o Ensino e Aprendizagem da Matemática do Ensino Médio (CDME). Projeto Condigital MEC – MCT/CAPES*. Esse projeto, realizado no IME/UFF de 2008 a 2011, permitiu que, grande parte dos aparelhos e jogos concretos criados no LEG, e virtualizados com recursos da geometria dinâmica, fossem transformados em jogos virtuais e aplicativos interativos organizados na forma de experimentos educacionais em uma intensa adaptação e produção de recursos multimídia. No projeto CDME, criamos, com a ajuda de bolsistas licenciandos e do Curso de Computação da UFF, onze experimentos educacionais, com mais de trinta pequenos jogos virtuais e aplicativos interativos, e três *softwares* que tiveram como base teórica o Modelo de van Hiele do desenvolvimento do pensamento geométrico e também apresentamos ao professor recursos manipulativos concretos.

Os experimentos e *softwares* criados no CDEM permitem uma intensa relação de interdisciplinaridade entre Geometria e Trigonometria com áreas das Artes, Português, Física e Biologia. Esses experimentos educacionais foram aceitos pelo *Banco Internacional de Objetos Educacionais* e estão publicados no *Portal do Professor do MEC* e na página do CDME da UFF (www.uff.br/cdme).

Os Cadernos de Atividades relacionados ao estudo das curvas cônicas estão descritos nos experimentos educacionais na página do CDME e podem ser compilados a partir da

modelagem das figuras cônicas como curvas luminosas, como lugares geométricos e outras como linhas envolventes (KALEFF et al, 2011a; 2011b)

Um exemplo para o ensino da elipse, apresentamos um Caderno de Atividades completo para a sala de aula no texto: “*Se Descartes Tivesse Lápis, Barbante e Dobrasse Papéis... Introduzindo as Cônicas por Meio da Elipse*” (KALEFF, 2016a, p. 149-160). Nessas atividades, apesar de aparentemente ingênuas, o aluno adolescente, com cerca de 12 a 15 anos, vai ser levado a vivenciar três diferentes maneiras de se tratar a introdução do conceito de elipse, as quais podem ser estendidas às outras curvas cônicas: hipérbole e parábola. Na primeira atividade a construção da forma elíptica se dá por meio da obtenção de um emaranhado de linhas retas, por meio de dobradura de papel, que “geram” a curva, sendo a elipse, na realidade, a curva envolvente dessas linhas retas. Lembramos que os matemáticos chamam de *envolvente* a figura geométrica que tem uma família de linhas retas, ou de outras curvas, rodeando-a, isto é, envolvendo-a. À figura geométrica dá-se o nome de envolvente da família de linhas (ou curvas).

Na segunda e terceira atividades o aluno é levado, por meio de um processo manipulativo de um pedaço de barbante, a encontrar a noção de elipse como lugar geométrico. Esta surge como o conjunto de pontos do plano cuja soma das distâncias a dois outros pontos é constante, sendo a elipse é o lugar geométrico desses pontos. Somente após haver realizado mais três atividades envolvendo elementos analíticos do plano cartesiano, possibilitamos ao aluno chegar ao conceito de elipse de uma terceira maneira e ser levado a acompanhar o surgimento de uma equação analítica da curva.

O processo anterior de construção dos três conceitos ligados às cônicas pode ser vivenciado pelo aluno com deficiência visual, se o professor utilizar matéria prima adequada à manipulação tátil, como por exemplo, no caso do papel para as dobraduras das envolventes. O mais indicado é o papel vegetal com gramatura de 180gr, pois o comum com 80gr, embora mais em conta e comumente encontrado no comércio, não produz os vincos das dobras em alto-relevo de uma maneira tão sensível ao tato quanto o de gramatura mais alta.

Os recursos didáticos que apresentamos na Figuras 1, modelam seções e curvas cônicas (elipses, hipérbolas e parábolas) e permitem o seu reconhecimento tátil e visual a partir de cortes planos de modelos de cones de isopor e de acetato, como mostrado na Figura 1. As seções cônicas foram modeladas com papelão do tipo Paraná.

Figura 1. Modelos de seções cônicas obtidas a partir de cortes em cones de isopor e de acetato.



Fonte: Acervo do LEG.

A sequência de fotos na Figura 2 apresenta os artefatos construídos para a modelagem dos elementos matemáticos envolvidos no Teorema de Dandelin, mostrando o modelo de duas esferas pousadas sobre os focos de uma elipse que corta o cone: as esferas de Dandelin. Em geometria, sabemos que uma seção cônica não degenerada formada pela intersecção de um plano com um cone possui uma ou duas dessas esferas. A matéria prima utilizada na confecção do artefato foi acetato e bolas de isopor. Os recursos emulam o modelo de cone de acrílico encontrado no comércio e apresentado à direita da Figura 2.

Figura 2. Modelos de cones, seção elíptica e esferas de Dandelin.

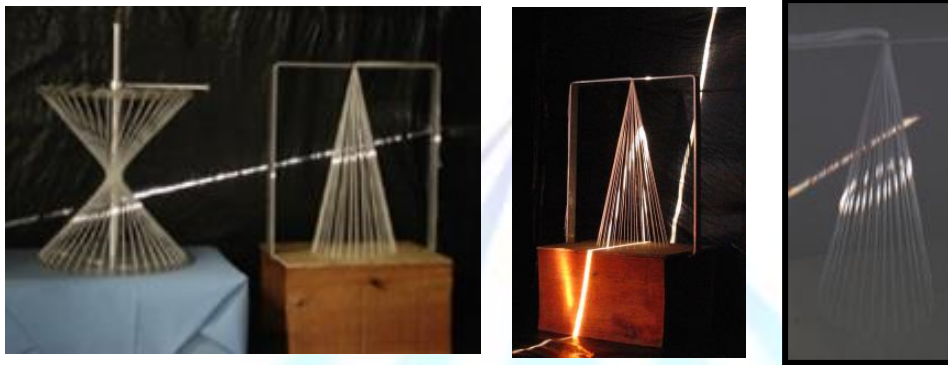


Fonte: Acervo do LEG.

As fotos apresentadas na Figura 3, mostram cones de fios construídos sobre estruturas de madeira para a modelagem de curvas cônicas, as quais são obtidas pela projeção de um feixe de luz de um aparelho retroprojctor, cuja superfície iluminada foi encoberta por uma

placa plana de papelão, na qual foi feito um rasgo retilíneo pelo qual passa a luz formando um feixe luminoso, que emula um plano cortando os fios.

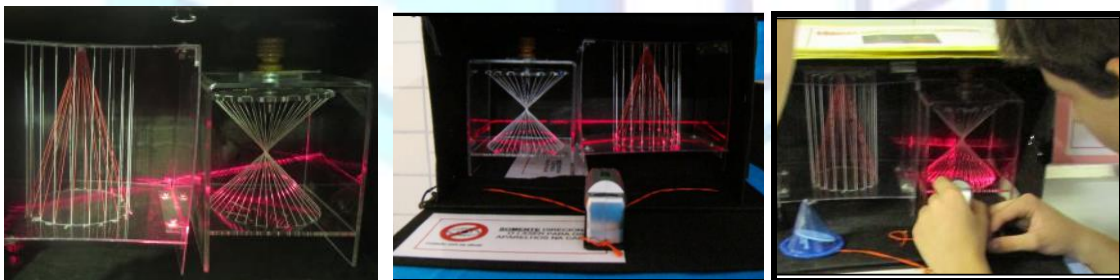
Figura 3. Modelos de curvas cônicas obtidas com um feixe de luz sobre cones de fios.



Fonte: Acervo do LEG.

Após muitas experiências realizadas com diversas fontes de luz, entre elas como mostrado nas fotos da Figura 3, passamos a utilizar uma lanterna a laser, obtida de um aparelho comercial usado em construção civil para estabelecer o nível de um plano ou um fio de prumo. Esse aparelho permite emitir um feixe linear de raios laser sobre os modelos de cones e cilindros construídos com fios de barbante ou elástico, como mostrado na Figura 4. O feixe modela curvas luminosas que enchem de curiosidade os alunos e visitantes de todas as idades do Museu LEGI.

Figura 4. Modelos de curvas cônicas obtidas com o uso de feixe de laser sobre cones de fios.



Fonte: Acervo do LEG.

Algumas Constatações

O leitor(a) deve ter percebido que, no LEG, o principal desafio apresentado aos licenciandos e ao professor em ação, sempre foi o da produção de recursos manipulativos e da redação dos Cadernos de Atividades, com objetivo de propiciar aprendizagem ativa significativa. Na maioria das vezes, notamos que os futuros professores (e até professores!) se sentem despreparados para tal desafio, pois estão acostumados ao ensino tradicional e, portanto, levá-los a aceitar a desconstruir as estratégias expositivas, transformando-as em ativas nem sempre foi um exercício didático muito fácil. Muitos licenciandos declararam que, somente após eles mesmos vivenciarem atividades apresentadas nas disciplinas que ministramos no LEG, cujos textos geralmente são de nossa autoria, se sentiram mais à vontade para a elaboração de recursos didáticos.

Alguns poucos licenciandos não se renderam às nossas orientações e se mostraram irredutíveis quanto à aceitação dos materiais concretos manipulativos. Estes alunos, geralmente se declaravam estar cursando a licenciatura somente com vistas ao diploma universitário, pois pretendiam seguir outras carreiras e não a de professor.

Por outro lado, para nossa satisfação, a maioria dos licenciandos passou a aceitar as atividades, principalmente, após serem monitores de uma mostra do LEGI, na qual vivenciavam situações e emoções inesperadas. Esse foi o caso de um aluno bolsista de extensão, após um dia de mostra do Museu, apresentada em uma cidade do interior do estado do Rio de Janeiro. A mostra havia sido visitada por mais de 1000 pessoas, em um único dia. Em nossas anotações e lembranças sobre esse dia de ações extremamente exaustivas, o aluno declarou que:

Vivenciei em 12 horas, mais emoções do que nos três anos que estou na UFF. Na parte da manhã, conversei em inglês, com crianças dos primeiros anos de uma escola de elite, que só se comunicavam nessa língua com os professores que as acompanhavam. Relembrei termos que só vi em livros e curti o entusiasmo das criancinhas! Durante a tarde, tive contato com um adolescente autista, a quem dei especial atenção, e ele conseguiu realizar um quebra-cabeça pitagórico, que outras crianças não haviam conseguido! Mas o mais legal aconteceu à noite com alunos adultos e bem mais velhos do que eu. Eram de uma turma de EJA. Me senti valorizado pelo respeito que apresentaram por mim e também me senti privilegiado por poder lhes ensinar algo que os fez ver a matemática com ‘olhos brilhantes’ (relato de Raphael, bolsista PROEX, 2017).

Outros casos particulares que ilustram bem o papel das práticas e situações envolvendo o LEG e o LEGI, na formação de professores, bem como apresentações com detalhamento técnico e mais resultados, podem ser encontradas em vários documentos, como em Dysman e Kaleff (2011); Kaleff e Rosa (2012; 2013; 2018); Kaleff (2016b).

Finalizando

Esperamos que o leitor(a) possa ter constatado que os resultados destacados neste relato não podem ser simplesmente resumidos em números estatísticos, pois os aspectos enfocados são qualitativos, tratando-se de circunstâncias e suas consequências com vistas a uma melhor qualidade da formação docente e na construção da identidade do professor.

Buscamos apresentar a maneira como conduzimos as nossas práticas e propiciamos vivências geradoras de significados e sentidos no fazer escolar ativo inclusivo, a partir da permanência do licenciando no LEG.

Ao expormos as práticas desenvolvidas no LEG, associadas ao Museu, buscamos apresentar a importância, na formação docente (do licenciando e na formação continuada), de estratégias didáticas que envolveram, de maneira ativa e plena, o sujeito em pesquisa e no desenvolvimento de recursos para o ensino inclusivo. Enfatizamos que, para este envolvimento ser intenso, prazeroso e também tenha caráter lúdico, em relação às ações realizadas, é importante que o licenciando ou o docente perceba que as pesquisas e os produtos criados por ele são, de fato, direcionados e adequados à sua prática profissional, na busca de uma aprendizagem ativa significativa inclusiva.

Referências

- BAIRRAL, Marcelo. A.; SILVA, Marco A. **Instrumentação do ensino de Geometria** - Módulo 1. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ. 2004.
- BARTOLINI BUSSI, M. G.; MARIOTTI, M. A. Semiotic mediation in the mathematics classroom: artifacts and signs after a Vygotskian perspective. In: ENGLISH, L et al (Eds.) **Handbook of International Research in Mathematics Education**. 2. Ed. Mahwah: Lawrence Erlbaum, 2008, p. 746-783.
- BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental: Matemática** (5ª a 8ª séries). Brasília: MEC/SEF. 1998.
- BRASIL. Ministério de Educação e Cultura. **Portaria nº 3284, de 7 de novembro de 2003**. Brasília, 2003.
- BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular - Ensino Fundamental**. 2017. Disponível em: <https://nova-escola-producao.s3.amazonaws.com/nPFB7y5Zm9B9dWWetPTDyTpMhf6hZTTNAeMxKsM5AemMSeFy9RYf3JkAv7sw/bncc-documento-final.pdf>. Acesso em 03 de nov. 2018.
- DYSMAN, Anne Michelle; KALEFF, Ana Maria M. R. Parceria entre Universidade e Escola em Prol de uma Docência mais Criativa. Encontro Brasiliense de Educação Matemática, 5. 2011, Brasília. **Anais...** Brasília: Sociedade Brasiliense de Educação Matemática. v.2, 2011. p. 47-63.

HERSHKOWITZ, R. ET AL Aspectos psicológicos de aprendizagem da Geometria. **Boletim-GEPEM**, Rio de Janeiro. n 32. 1994. p. 03 - 31.

KALEFF, Ana Maria M. R. LEGI: o Museu Interativo Itinerante de Educação Matemática do Laboratório de Ensino de Geometria da Universidade Federal Fluminense. **Boletim SBEM**, Salvador: SBEM. n.9. fev.2012. p.02-10. Disponível em:

<https://semur.edu.uy/home/images/stories/2012/SBEM09.pdf>. Acesso em 10 de out. 2018.

KALEFF, Ana Maria M. R. **Tópicos em Ensino de Geometria: a Sala de Aula frente ao Laboratório de Ensino e à História da Geometria**. 2. ed. Niterói: CEAD/UFF. 2016a. Disponível em:

<https://drive.google.com/file/d/0B0M9GEU6FsoVRGRoQTZmWTRhTGM/view?usp=sharing_eid&ts=5787e9f0>. Acesso em: 07 out. 2018.

KALEFF, Ana Maria M. R. (Org.) **Vendo com as Mãos, Olhos e Mente: um Laboratório e um Museu de Educação Matemática para o Aluno com Deficiência Visual**. Niterói: CEAD/UFF. 2016b. Disponível em

<https://drive.google.com/file/d/0B0M9GEU6FsoVcTBqNDk1eWxBRE0/view?usp=sharing_eid&ts=5787ea05>. Acesso em: 07 out. 2018.

KALEFF, Ana Maria M. R. Considerações sobre a diversidade dos saberes docentes e a formação em Geometria do professor de Matemática nos cursos de Matemática da Universidade Federal Fluminense – Niterói. Volume Especial sobre: A Geometria na Formação de Professores de Matemática no Brasil. **Educação Matemática em Foco**. João Pessoa: UFPB. v. 6, n. 01. jan/jun. 2017. Disponível em <http://revista.uepb.edu.br/index.php/REMEMF/issue/view/264>. Acesso em 28 de fev. 2018.

KALEFF, Ana Maria M. R.; DYSMAN, Anne Michelle. Um Museu Interativo Itinerante de Educação Matemática na Formação do Professor de Matemática. **Educação Matemática em Foco**. João Pessoa: UFPB, v. 2. 2012. p. 53-66.

KALEFF, Ana Maria M. R.; ROSA, Fernanda M. C. Buscando a Educação Inclusiva em Geometria. **Revista Benjamin Constant**. Rio de Janeiro: IBC, n. 51, v.1, 2012. p. 22 – 33.

KALEFF, Ana Maria M. R.; ROSA, Fernanda M. C. Modelos Concretos e Virtuais: Móviles, Luzes e Sombras de Poliedros de Platão e seus Duais como uma Proposta Pedagógica Interdisciplinar e de Inclusão. Seminário Nacional de Histórias e Investigações de/em aulas de Matemática, 8, 2013. Campinas. **Anais...** Campinas: UNICAMP. 2013. Disponível em:

<<https://docs.google.com/file/d/0B6LrM9hpRrC6WlU3c3FUTXNhRVE/edit>>. Acesso em: 05 out. 2018.

KALEFF, A. M. M. R., ROSA, F. M. C. Vendo com as mãos: em busca da inclusão do aluno com deficiência visual nas aulas de Matemática. **Caderno Dá licença**, vol. 8, Ano 11, Dezembro 2013. p. 205-225. Disponível em:

http://www.uff.br/dalicensa/index.php?option=com_content&view=article&id=73&Itemid=12. Acesso em: 05 out. 2018.

KALEFF, Ana Maria M. R.; ROSA, Fernanda M. C (Org.). A Necessidade da Discussão de Temas Relacionados à Educação Inclusiva em Disciplinas da Formação de Professores: Ações Realizadas em um Laboratório de Ensino de Geometria. In: ROSA, Fernanda M. C.; BARALDI, Ivete Maria. **Educação Matemática Inclusiva: Estudos e Percepções**. Campinas/SP: Mercado de Letras. 2018. p. 99-118.

KALEFF, Ana Maria M. R.; GARCIA, Simone S.; REI, Dulce M. Como adultos interpretam desenhos e calculam volumes de sólidos construídos por pequenos cubos. **Zetetiké**. Faculdade de Educação – UNICAMP. Campinas, v. 4. n. 6, 1996. p.135-152.

KALEFF, A. M.M. R. ET AL. **Cônicas como Curvas Luminosas**. Portal do Professor/MEC . Banco Internacional de Objetos Educacionais. Experimento Educacional. Projeto Condigital MEC - MCT.

Projeto CDME – UFF – Matemática. 2011a. Disponível em <<http://www.cdme.im-uff.mat.br/>>. Acesso em: 20 out. 2018.

KALEFF, A. M.M. R. ET AL. **Cônicas**. Portal do Professor/MEC. Banco Internacional de Objetos Educacionais. Experimento Educacional. Projeto Condigital MEC - MCT. Projeto CDME – UFF – Matemática. 2011b. Disponível em <<http://www.cdme.im-uff.mat.br/>>. Acesso em: 20 out. 2018.

MORAN, José. Metodologias ativas para aprendizagem mais profunda. In: BACICH, Lilian; MORAN, José **Metodologias ativas para uma educação inovadora**. Porto Alegre: Penso. 2018, cap.1, p. 1-16.

ONU. **Convenção sobre os Direitos das Pessoas com Deficiência. 2006**. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato20072010/2009/decreto/d6949.htm>. Acesso em: 20 out. 2018.

ROSA, Fernanda Malinosky Coelho da. **Professores de Matemática e a Educação Inclusiva: análises de memoriais de formação**. 2013. 182f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” – Unesp, Rio Claro/SP, 2013.

Submetido em Novembro de 2018

Aprovado em Dezembro de 2018