REVISTA DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL (UFMS)

Volume 8, Número 17 – 2015 - ISSN 2359-2842

Análise de Dificuldades em relação à Propriedade Distributiva: uma discussão em um fórum no ambiente MOODLE

Analysis of Difficulties related to the distributive property: a discussion on a forum in MOODLE Environment

Thaísa Jacintho Müller[1]

Helena Noronha Cury[2]

José Valdeni de Lima[3]

Resumo

Neste artigo, são apresentados resultados parciais de uma investigação realizada com o objetivo de analisar dificuldades de aprendizagem apresentadas por alunos de Cálculo Diferencial e testar possibilidades de superá-las por meio de recursos tecnológicos. A investigação foi realizada com base em ideias de Ausubel e de Tall, sobre subsunçores, imagem de conceito, definição de conceito, já-encontrados e a-encontrar. Como instrumento de pesquisa, foi aplicado um teste sobre derivada de função e, a partir das respostas, os erros foram classificados, os resultados foram apresentados em quadros e por meio de texto descritivo. A partir da análise, foi possível detectar que as maiores dificuldades dos estudantes estão relacionadas à propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e, para discutir essas dificuldades, foi proposto um fórum no ambiente MOODLE. Os dados, tanto da análise dos erros como das discussões no fórum, mostraram que a propriedade distributiva é um já-encontrado que pode, muitas vezes, influenciar negativamente aprendizagens posteriores.

Palavras-chave: Dificuldades em Cálculo. Propriedade distributiva. Fórum no ambiente MOODLE.

Abstract

[1] Mestre em Matemática e Doutora em Informática na Educação pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Professora da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil. E-mail: thaisa.muller@pucrs.br.

[2] Doutora em Educação pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Professora do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática do Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, RS, Brasil. E-mail: curyhn@gmail.com.

[3] Doutor em Informática pela Université Joseph Fourier - Grenoble I (1990). Professor do Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil. E-mail: valdeni@inf.ufrgs.br.

In this paper, we present partial results of a research carried out with the aim of analyzing learning difficulties presented by students of Differential Calculus and test possibilities of overcoming them through technological resources. The research was based on Ausubel and Tall's ideas on subsumers, concept image, concept definition, met-before and set-before. As research instrument was applied a test about derivative of functions and, from the answers, errors were classified, the results were presented in tables and through descriptive text. From the analysis, it was possible to detect that the main difficulties of the students are related to the distributive property of multiplication with respect to addition and to discuss these difficulties it was proposed a forum in Moodle environment. The data from both the errors analysis and the discussion on the forum showed that the distributive property is an already-found that can often negatively influence further learnings.

Keywords: Difficulties in Calculus. Distributive property. Forum on MOODLE environment.

Introdução

Este artigo relata parte de uma pesquisa de doutorado que tem como objetivo analisar dificuldades de aprendizagem apresentadas por alunos de Cálculo Diferencial e testar possibilidades de superar tais dificuldades por meio de recursos tecnológicos. A experiência com ensino de Cálculo em cursos de Engenharia, por parte da autora e de sua coorientadora, bem como o apoio dos conhecimentos da área de Computação, por parte do orientador da tese, possibilitou a investigação de erros cometidos por alunos de Cálculo Diferencial e Integral de uma Instituição de Ensino Superior de Porto Alegre e a proposta de trabalho diferenciado, no ambiente de aprendizagem MOODLE. Para embasar a discussão dos resultados, foram usados aportes teóricos desenvolvidos por David Tall.

Pesquisas na área de Educação Matemática têm mostrado dificuldades de alunos na resolução de exercícios e problemas relativos a conteúdos de Cálculo Diferencial e Integral. (CURY, 2004; GIRALDO, 2004; HARDY, 2008; NASSER, 2009). Cury (2004) detectou respostas incorretas de alunos de Cálculo I, em questões sobre limites, derivadas e integrais, mostrando que os erros, muitas vezes, não decorrem dos próprios conteúdos envolvidos na questão, mas de problemas de aprendizagem originados na educação básica.

Giraldo (2004) investigou contradições encontradas na formação da imagem de um conceito matemático, especialmente no caso da derivada de uma função, e os obstáculos enfrentados pelos estudantes ao trabalhar com sistemas de computação simbólica. Em anos recentes, o autor, juntamente com dois colegas, discutiu a integração de recursos computacionais à prática docente, o que, segundo eles, possibilita conexões entre conteúdos, “criando novas formas de explorar e aprender” (GIRALDO; CAETANO; MATTOS, 2012, p. viii).

Hardy (2008) pesquisou dificuldades de alunos de Cálculo na resolução de tarefas envolvendo limites de funções. A autora mostra que as tarefas rotineiras de Cálculo, propostas pela instituição investigada, são frequentemente interpretadas pelos alunos como relacionadas com a linguagem e as características da Álgebra escolar e isso inibe a consolidação dos conceitos do Cálculo.

Nasser (2009) investigou dificuldades de alunos no traçado de gráficos de funções reais de uma ou duas variáveis, relacionando seu desempenho ao estilo visual de aprendizagem. Segundo a autora, é necessário desenvolver estratégias de ensino apropriadas aos estilos de aprendizagens dos alunos, particularmente no trabalho com gráficos.

A análise de erros cometidos por estudantes de Cálculo, em cursos superiores da área de Ciências Exatas, aponta para a falta de significado atribuído a conceitos como limites, derivadas e integrais, que parecem se reduzir apenas a regras de cálculo. Também é possível detectar dificuldades em conteúdos matemáticos de Ensino Fundamental ou Médio, que são básicos para a aprendizagem do Cálculo.

Em qualquer desses trabalhos, é possível notar a presença das dificuldades, sejam elas em conteúdos de Matemática básica, de Álgebra ou de Cálculo. Para detectar erros em conhecimentos prévios relacionados à aprendizagem de Cálculo, foi planejada a aplicação de um teste e posterior realização de um fórum no ambiente MOODLE, cujos resultados são aqui apresentados.

Aportes teóricos

Ao se fazer uma proposta que considere a importância de trabalhar na direção de “preencher as lacunas” identificadas na aprendizagem de alunos que cursam disciplinas de Cálculo, é importante ter em mente que tais disciplinas dependem de muitos conhecimentos prévios, os quais, se não forem familiares aos estudantes, precisam ser retomados, ainda que sem uma ordem preestabelecida. Neste sentido, é importante atentar para questões relacionadas à aprendizagem significativa.

Em Ausubel (2003, p. xiii), é encontrada uma definição sucinta da Teoria da Assimilação, que compreende “processos e mecanismos mediadores da aprendizagem por meio da recepção e da retenção significativas e das variáveis cognitivas e afetivas/emocionais que colidem com os primeiros de forma positiva e negativa.”

De imediato, é necessário explicitar como o autor entende a recepção e a retenção significativas. Para Ausubel (2003), recepção significativa é o processo de aquisição de novos significados a partir de material de aprendizagem apresentado; no entanto, destaca que a aprendizagem significativa não é sinônimo de aprendizagem de material significativo, haja vista que o material só pode ser potencialmente significativo. O aprender significativamente implica relacionar, de forma não arbitrária e substantiva, uma nova informação a outras com as quais o aluno já está familiarizado. (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980). Além disso, é fundamental que o aluno manifeste uma disposição para aprender dessa forma.

É necessário que cada termo apresentado na teoria de Ausubel seja bem definido, para que se possa, posteriormente, embasar a proposta aqui apresentada. Assim, a expressão "não arbitrária" indica, segundo Moreira (1997), que o relacionamento da nova informação à estrutura cognitiva do aprendiz não é feito com qualquer aspecto dessa estrutura, mas com conhecimentos específicos, já existentes, que Ausubel chama de *subsunçores*.

Por outro lado, o que é incorporado à estrutura cognitiva é a substância do novo conhecimento, não apenas as palavras nas quais é expresso. Finalmente, *subsunçores* são conhecimentos já existentes na estrutura cognitiva do aprendiz, tais como proposições, concepções, ideias, invariantes operatórios ou representações sociais. Quando serve de âncora para um novo conhecimento, o subsunçor pode ser modificado, adquirindo novos significados. (MOREIRA, 2011).

Com relação ao Cálculo Diferencial e Integral, há uma grande quantidade de conceitos e propriedades, em particular dos conjuntos numéricos, que precisam estar disponíveis na estrutura cognitiva do aluno para que ele aprenda conteúdos, como os de limite, continuidade, derivadas e integrais. Entre esses, podem ser citados: as operações e propriedades definidas nos conjuntos numéricos, as relações de ordem nesses conjuntos, a noção de distância ou o módulo de um número real.

O aluno de Cálculo, para aprender regras de derivação, por exemplo, precisa ter claras as palavras ou símbolos que estão envolvidos na definição das propriedades da derivação, que se consubstanciam em regras (quantificadores, operações e propriedades nos conjuntos numéricos, com ênfase para a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição), combinando-os em sua estrutura cognitiva, de modo a assimilar o significado das propriedades da derivação. Em muitos casos, algumas dessas palavras ou símbolos foram memorizados sem compreensão, desde o Ensino Fundamental, e dessa forma não há possibilidade de relacioná-los para aprender significativamente o novo conceito.

Os subsunçores podem ser mais ou menos estáveis, mais ou menos diferenciados, mas no processo de assimilação de um novo conceito, eles se modificam, adquirindo novos significados. Assim, a aprendizagem significativa é dinâmica, pois a interação entre os conhecimentos prévios e os novos, que a caracteriza, é não-literal (ou seja, substantiva) e não-arbitrária (isto é, feita com elementos pré-existentes). (MOREIRA, 2011).

O educador matemático inglês David Tall apoiou-se em ideias de Ausubel, ao elaborar sua tese de doutorado, em 1986. Além disso, de seu trabalho com o educador matemático israelense Schlomo Vinner, tiveram origem alguns artigos sobre os constructos *imagem do conceito* e *definição do conceito*. Segundo Vinner (1983), a imagem de um conceito é algo não verbal, associado, na mente, ao nome do conceito. Por exemplo, à menção da palavra "função", um aluno pode evocar um exemplo, uma representação gráfica, a lei de alguma função já estudada, mas não necessariamente a definição formal. Como complementa o autor, não é costume consultar um dicionário para ter uma definição a qualquer instante em que uma palavra é mencionada.

Já a definição do conceito, segundo Tall e Vinner (1981), é uma maneira de usar palavras para especificar o conceito em questão. Pode ser aprendido por um aluno somente por memorização mecânica ou aprendido de maneira significativa, relacionando-se em maior ou menor grau com o conceito como um todo. De certa forma é o que o aluno evoca da imagem daquele conceito e a expressa em palavras.

Além dessas ideias, também são destacados os conceitos de *já-encontrados* e *a-encontrar*. Lima e Tall (2008, p. 4) definem *já-encontrados* como "[...] um constructo mental que um indivíduo usa em um dado momento, baseado em experiências que ele encontrou anteriormente."

Para Lima (2007, p. 88), um *já-encontrado* é "[...] toda e qualquer experiência anterior a certo aprendizado, considerada como constructo mental, presente na imagem do conceito do aluno, que possa interferir no aprendizado em questão, seja de forma positiva ou negativa".

Considera-se que a influência é positiva quando o conceito anterior está bem fundamentado e é coerentemente relacionado com o novo conhecimento, colaborando para que este seja adquirido. Por exemplo, se o aluno sabe adicionar frações numéricas, ou seja, já tem uma imagem do conceito de fração soma, ele terá facilidade em compreender a adição de frações algébricas.

A influência de um *já-encontrado* pode ser negativa quando não está bem estruturado na mente do sujeito e precisa de uma reconstrução, podendo vir a se tornar um obstáculo para uma nova aprendizagem. Por exemplo, se um aluno estudou perímetro e área de polígonos regulares apenas por meio da memorização de fórmulas, isso pode se tornar um obstáculo para a compreensão dessas medidas para polígonos não regulares.

Deste modo, assim como experiências anteriores podem afetar novos aprendizados, novas experiências também podem interferir em aprendizados anteriores. Tall (2013, p. 20) define o termo *a-encontrar* como "uma estrutura mental com a qual nós nascemos, que pode levar certo tempo para amadurecer à medida que nossos cérebros fazem conexões em uma tenra idade". Os *a-encontrar* são experiências que podem ainda não ser parte da imagem do conceito de um indivíduo, mas podem tanto modificá-la quanto vir a fazer parte dela. Neste último caso, os *a-encontrar* acabam se tornando *já-encontrados*. (LIMA, 2007).

Essas são premissas por trás desta pesquisa, já que é importante entender os *já-encontrados* na mente de alunos de Cálculo, em conteúdos de Matemática da educação básica, para posteriormente discuti-los com os estudantes, em um ambiente de aprendizagem, de modo a fazerem parte de suas imagens de conceito.

Em termos de recursos tecnológicos, optou-se, nesta pesquisa, pela utilização do ambiente MOODLE, por ser adotado pela Universidade na qual a pesquisa foi desenvolvida. O MOODLE é um ambiente virtual de aprendizagem que oferece aos professores a possibilidade de criar e conduzir cursos à distância, por meio de atividades que exigem ação do aluno, como responder e discutir. Possui também a possibilidade de inserção de materiais para consulta e estudo organizados a partir de um plano de ensino. Este ambiente começou a ser desenvolvido em 2001 é um dos mais utilizados no mundo todo. O uso do MOODLE é predominante entre as universidades brasileiras (LEITE, 2008), tendo diversos recursos disponíveis, tais como fóruns, enquetes e questionários, todos estes utilizados nesta pesquisa.

Tecnicamente, o MOODLE é uma plataforma de ensino a distância baseada em software livre, cuja sigla significa Modular Object-Oriented Dynamic Learning Environment (ambiente modular de aprendizagem dinâmica orientada a objetos). É uma aplicação baseada na Web e possui dois componentes: um servidor central em uma rede IP, que abriga os scripts, softwares, diretórios, bancos de dados, etc. e clientes de acesso a um ambiente virtual (que é visualizado através de qualquer navegador da Web). O MOODLE é desenvolvido na linguagem PHP e suporta vários tipos de bases de dados. Além disso, tem seu código fonte disponibilizado gratuitamente, e pode ser adaptado, estendido, personalizado, etc., pela organização que o adota (SABBATINI, 2007).

Com relação aos aspectos educacionais, Sabbatini (2007) afirma que os cursos desenvolvidos no MOODLE são criados em um ambiente centrado no estudante e não no professor. Este ajuda o aluno a construir o conhecimento com base nas suas habilidades e características próprias, ao invés de simplesmente publicar e transmitir esse conhecimento.

Seguindo esta linha, o MOODLE dá uma grande ênfase nas ferramentas de interação entre os protagonistas e participantes de um curso. A filosofia pedagógica do MOODLE também leva em conta que a aprendizagem é favorecida em ambientes colaborativos. Por esse motivo, existem, no ambiente, ferramentas que apoiam o compartilhamento de papéis dos participantes (que podem ser tanto formadores quanto aprendizes, dependendo da situação) e a geração colaborativa de conhecimento, como *wikis*, e-livros, assim como ambientes de diálogo, como diários, fóruns e *chats*.

Procedimentos metodológicos

A pesquisa da qual é apresentado um recorte neste artigo foi dividida em três etapas. Inicialmente, foi aplicado um teste a alunos de Cálculo Diferencial e Integral, com o propósito de analisar erros cometidos por esses alunos na solução das questões. A partir do que foi observado neste primeiro teste com erros relacionados a conteúdos da educação básica, questionou-se se os alunos ingressantes na disciplina de Cálculo teriam conhecimentos de Matemática elementar e, em caso negativo, como poderiam ser auxiliados por meio de atividades propostas no ambiente MOODLE.

Na segunda etapa, a partir dos resultados obtidos no primeiro teste, foram criados objetos de aprendizagem para cada tipo de erro detectado e, após o trabalho com esses objetos, foram propostas discussões em fóruns no ambiente MOODLE, para cada conteúdo envolvido nos erros detectados. A professora-pesquisadora, primeira autora deste artigo, elaborou o teste, os objetos de aprendizagem usados (um deles já descrito em MÜLLER; LIMA; CURY, 2013) e criou os fóruns, discutindo com os alunos suas dúvidas, visto que o MOODLE é usado, rotineiramente, para atividades na disciplina de Cálculo I da Instituição em questão, razão pela qual não houve problemas de comunicação no ambiente. Houve, ainda, uma terceira etapa, na qual foi entrevistada a responsável pelo laboratório de aprendizagem da Instituição, para analisar suas opiniões sobre os materiais produzidos; no entanto, esta etapa da pesquisa não está relatada neste artigo.

Na primeira etapa, foram recolhidas as respostas de 35 alunos calouros de Cálculo Diferencial e a análise dos erros encontrados mostrou que a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição é um dos obstáculos para a aprendizagem de conteúdos de Cálculo, haja vista que os estudantes, tendo formado uma imagem de conceito equivocada sobre essa propriedade, acabam por não conseguir resolver exercícios relacionados a limites, derivadas ou integrais. Essa constatação já havia sido feita em outras investigações sobre erros em Cálculo (MARIOTTI; CERULLI, 2001; CURY; KONZEN, 2006).

Neste artigo, por restrições de espaço, é relatada apenas a análise dos erros nas respostas a uma das questões do teste, que envolve o cálculo de derivadas de funções.

A questão, aberta, teve o seguinte enunciado: *Calcule as derivadas das funções abaixo:*

a) $f(x)=\dfrac{2x-1}{x^2+3}$ c) $f(x) = \sqrt{x^3 - 2x + 5}$

b) $\cos x - x.e^x$

A análise dos dados obtidos a partir das respostas dos alunos foi realizada em três fases: pré-análise, exploração do material e tratamento dos resultados. Na primeira fase, as respostas foram identificadas por letras, para preservar as identidades dos estudantes, e coladas em um arquivo de texto, permitindo a leitura conjunta. Esse conjunto de questões organizadas forma o *corpus*, sobre o qual foi realizada a análise das respostas. Na correção das soluções, foram consideradas quatro categorias: resposta correta (código “2”), resposta parcialmente correta (código “1”), resposta incorreta (código “0”) e ausência de resposta (código “9”).

A segunda fase da análise, de exploração do material, corresponde à classificação das respostas parcialmente corretas ou incorretas. Os critérios de classificação foram criados *a posteriori*, a partir da observação das respostas apresentadas, através do agrupamento das semelhantes. Já na fase de tratamento dos resultados, foram criadas tabelas e textos-síntese com a descrição dos erros encontrados.

A análise dos resultados do primeiro teste foi a base sobre a qual foram criados os objetos de aprendizagem e propostos os fóruns, dos quais participaram 45 alunos de nova turma de Cálculo da mesma Instituição. Neste artigo, são enfocados, apenas, os resultados referentes ao teste que mostram as dificuldades relativas à propriedade distributiva e o fórum criado para discutir essa propriedade. Pretende-se, assim, neste artigo, enfocar, à luz das ideias de Tall, como o fórum sobre propriedade distributiva pode auxiliar a superar dificuldades com essa propriedade.

Apresentação e análise dos erros

Iniciando a análise dos dados coletados, foi feita uma contagem da quantidade de respostas que se enquadram em cada uma das quatro categorias acima citadas. Os resultados obtidos são indicados no Quadro 1, a seguir:

Classes	Respostas à Questão					
	Item a		Item b		Item c	
	N.	%	N.	%	N.	%
2	12	34,3	2	5,7	13	37,1
1	18	51,4	21	60,0	9	25,7
0	5	14,3	10	28,6	10	28,6
9	0	0,0	2	5,7	3	8,6
Total	**35**	**100**	**35**	**100**	**35**	**100**

Quadro 1 – Distribuição das classes de respostas da questão
Fonte: Dados da pesquisa

Foi possível observar que a maioria dos alunos tentou efetivamente responder a questão, visto que a classe de número 9 é a menos frequente, chegando a não existir no item "a". A maior parte das respostas foi enquadrada na categoria "parcialmente correta", uma vez que foi bastante comum, por exemplo, o aluno iniciar corretamente a aplicação da regra de derivação, mas se equivocar nos cálculos que seguiam. É apresentada, a seguir, a análise das respostas contabilizadas nas categorias "parcialmente correta" e "incorreta".

1) Item *a*:

No item *a*, era solicitada a derivada da função dada por $f(x)=\dfrac{2x-1}{x^2+3}$. A resposta esperada é: $f'(x)=\dfrac{(x^2+3).2-(2x-1).2x}{(x^2+3)^2}=\dfrac{2x^2+6-4x^2+2x}{(x^2+3)^2}=\dfrac{-2x^2+2x+6}{(x^2+3)^2}$. Nesse item, foram categorizados sete tipos de erros, indicados a seguir:

A) erros quanto à propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição (ou subtração): nesse caso, os alunos erraram, na segunda parcela do numerador, quando deveriam ter usado parênteses em –(2x-1) para multiplicar por 2x. Foram detectadas expressões sem parênteses, tais como -2x-1 ou 2x-1, o que acarretou erro no resultado final.

B) erros relacionados à regra da derivada do quociente, em que era esperada, como resposta correta, $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)=\dfrac{g(x).f'(x)-f(x).g'(x)}{[g(x)]^2}$. Para esse item, foram detectadas expressões dos tipos: $\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{f'(x)}{g'(x)}$; $\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{f(x)}{g'(x)}$; $\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{f'(x).g(x).f(x).g'(x)}{[g(x)]^2}$; $\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{f'(x).g(x)+f(x).g'(x)}{[g(x)]^2}$.

C) erros de simplificação de fração algébrica: foram encontradas simplificações do tipo: $\frac{2x-1}{2x}=-1$; $\frac{-2x^2-2x+6}{(x^2-3)^2}=-2x^2-2x+6$; $\frac{(x^2-3)(2x)-(2x-1)(2x)}{(x^2-3)^2}=\frac{x^2+3-2x-1}{(x^2-3)^2}$.

D) erro na derivada de x^2+3, indicada como 2.

E) erro no quadrado de um binômio, efetuado como: $(x^2+3)^2 = x^4+9$.

F) cópia equivocada da função: um aluno trocou x^2+3 por x^2-5.

G) erro não identificado.

2) Item *b*:

No item *b*, era solicitada a derivada de $g(x)=\cos x - x.e^x$ e era esperado que os estudantes indicassem $g'(x)=-senx-(x.e^x+e^x)=-senx-x.e^x-e^x$. Nesse item, foram categorizados três tipos de erros, indicados a seguir:

H) erros quanto à propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição (ou subtração): na segunda parte da resposta, o termo $-(xe^x+e^x.1)$ foi trocado por $-xe^x+e^x.1$ ou $-e^x+x.e^x$. Também houve casos em que a expressão $cosx-xe^x$ foi vista como $(cosx-x)e^x$, ocasionando a utilização da regra do produto para derivadas.

I) erros relacionados à regra de derivação do produto de duas funções, em que era esperada a resposta $(f(x).g(x))' = f(x).g'(x)+f'(x).g(x)$: as regras equivocadamente aplicadas foram: $(f(x).g(x))' = f'(x).g'(x)$ e $(f(x).g(x))' = f(x).g'(x)$.

J) erro não identificado.

3) Item *c*:

No item *c*, era solicitado ao aluno que derivasse a função dada por $f(x)=\sqrt{x^3-2x+5}$, cuja resposta deveria ser $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x^3-2x+5}}.(3x^2-2)=\frac{3x^2-2}{2\sqrt{x^3-2x+5}}$.

Nessa questão, foram encontrados cinco categorias de erros:

K) erros relacionados à regra da cadeia, de três tipos:

i) derivada correta da raiz quadrada, mas sem a multiplicação por $3x^2 - 2$. (Esquecimento da regra da cadeia propriamente dita);

ii) uso, na derivada, da expressão $3x^2 - 2$ dentro da raiz quadrada, mas uso correto da regra da derivada da potência;

iii) resposta multiplicada pela expressão $x^3 - 2x + 5$;

L) erros relacionados a regras de derivação, de maneira geral, como a resposta do aluno que manteve a raiz quadrada e derivou apenas a função do radicando ou que considerou ser a derivada de $u^{1/2}$ igual a $-\frac{1}{2}.u.u'$ ou, ainda, igual a $\frac{1}{2}.u.u'$;

M) erros relacionados à operação de potenciação, também de três tipos:

i) transformação da raiz quadrada em potência (sendo usado outro expoente no lugar de ½).

ii) uso de falsa "propriedade distributiva" da potenciação em relação à adição;

iii) no uso da regra da cadeia, a potência ½ é indicada também em $3x^2 - 2$.

N) erro na cópia da expressão: nesse caso, foram consideradas as respostas em que o aluno "perdeu" o 2 do denominador de uma linha para outra da resolução ou em que houve troca do expoente -1/2 por -1;

O) erro não identificado.

Sintetizando essa classificação no Quadro 2, temos a seguinte distribuição:

Item	**Classe de erro**	**Número de ocorrências**
a	A	14
	B	7
	C	3
	D	1
	E	1
	F	1
	G	1
B	H	9
	I	14
	J	9
C	K	3

	L	3
	M	6
	N	2
	O	4

Quadro 2 – Distribuição das classes de erros por item da questão
Fonte: dados da pesquisa

Na classificação acima, destacam-se, então: no item *a*, a classe de erro A, relacionada à propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição; no item *b*, as classes de erros H e I, relacionadas também à propriedade distributiva; no item *c*, a classe de erros M-ii, relacionada à operação de potenciação.

Efetivamente, pode-se considerar que o maior problema desses estudantes está relacionado à propriedade distributiva: no item *a*, esse fato já está indicado na própria análise; no item *b*, além da distributividade do fator (-1), pode-se considerar que há um equívoco ao ser criada uma “distributividade” da derivação em relação à operação de multiplicação de funções; no item *c*, da mesma forma, uma “distributividade” da potenciação em relação à adição ou multiplicação.

Assim, considera-se que esses alunos apresentam “falsos subsunçores”, representados pela ideia de distribuir qualquer operação em relação à outra. Usando as ideias de Tall, é possível dizer que esses estudantes formaram imagens conceituais de distributividade que estão em desacordo com o que é aceito pela comunidade matemática. Desse modo, o que o aluno evoca dessa propriedade tem influência negativa nas soluções.

Pelos erros detectados e analisados, considera-se que a aprendizagem das regras de derivação exige que sejam, primeiramente, superados os obstáculos representados por imagens equivocadas de conceitos de álgebra elementar. Uma das possibilidades para auxiliar os alunos é discutir essas dificuldades, *on-line*, de modo que as discussões, mediadas por um professor, permitam uma reconstrução de conceitos de Matemática elementar, o que foi feito na pesquisa aqui relatada.

O fórum sobre a propriedade distributiva

Quarenta e cinco alunos participaram do fórum sobre a propriedade distributiva, sendo que a maioria deles fez mais de uma postagem ao longo do período estipulado para participação.

As postagens foram salvas no ambiente e, posteriormente, seu conteúdo foi analisado pelos autores com base na teoria estudada.

Os alunos são indicados pela letra A, seguida de números, para evitar sua identificação[4]. A questão proposta no fórum e que desencadeou as discussões, teve o seguinte enunciado:

1) É possível desenvolver as expressões **$(3x+1)^2$** e **(x-1).(x+1)** sem fazer uso da propriedade distributiva? Como?
2) Você concorda que foi usada a propriedade distributiva nas igualdades abaixo? Justifique.

   A) $2x^2 - 4x = 2x(x-2)$

   B) $(x – 3) . (x – 2) = x^2 -2x -3x +6$

Optou-se por digitar as postagens dos alunos e da professora-pesquisadora, porque a cópia das telas não é suficientemente legível e, também, porque seria preciso deletar todos os nomes dos envolvidos.

Postagem do aluno A1: *"Concordo, pois a propriedade distributiva relaciona operações, assim a multiplicação pode ser distribuída pelas parcelas da adição. É o método "chuveirinho" onde cada termo é multiplicado com o outro da outra operação."*

Postagem do aluno A2: *"A) Foi apenas colocado em evidência o 2x; B) Foi feito o ´chuveirinho`."*

Postagem do aluno A3: *"Concordo, pois na letra A botou-se em evidência, para eliminar o expoente, distribuindo o x em 2 partes. Já na letra B ´abriu-se` a equação com o método do ´chuveirinho` obtendo uma equação de 2º grau".*

Nota-se que esses três alunos têm uma imagem de conceito da propriedade distributiva que leva em conta elementos corporificados (TALL, 2013), especificados pela palavra "chuveirinho", expressão usada por eles para expressar o que está representado na Figura 2:

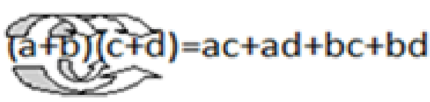

Figura 2 – Representação da propriedade distributiva por meio de flechas
Fonte: Os autores

[4] Também optou-se por usar para todos o tratamento masculino, "o aluno", da mesma forma preservando as identidades.

Postagem do aluno A3: *"Concordo, pois na letra A foi colocado em evidência, que é um método da propriedade distributiva e na letra B abriu a equação, que também é".*

Postagem da professora-pesquisadora: *"E esse colocar em evidência, será que pode também ser chamado de aplicação da propriedade distributiva? Lembrem que a igualdade é uma ´via de duas mãos`. Tem uma dica para isso no material sobre esse assunto".*

Postagem do aluno A4: *"A) se bota em evidencia, pq era de interesse tirar o expoente 2 da variável x. B) x.x=x^2; x. -2= - 2x; -3. x= - 3x; -3.-2= -6; x^2-2x-3x+6".*

Postagem da professora-pesquisadora: *"Pessoal, vamos seguir a discussão a partir dos comentários dos colegas! Até o momento, todos que se manifestaram, disseram que há aplicação da propriedade distributiva... vamos eliminar a palavra "chuveirinho". Mas alguns se referiram a ´por em evidência`. O que isso tem a ver com a propriedade distributiva? Ela não significa ´distribuir`, ao invés de ´por em evidência`?".*

Postagem do aluno A5: *"Acredito que ´por em evidência` seja o processo inverso da distributiva, ou seja, desfazer a distribuição. Veja bem: no exemplo A, para por em evidência o 2x foi necessário desfazer a distributiva de $2x^2$-4x".*

Postagem do aluno A6: *"Concordo que a propriedade distributiva fora utilizada na letra B, pois foi multiplicada as duas propriedades dentro dos parênteses para que achasse a fórmula, porém na letra A foi o contrário da B, que foi colocado o 2x em evidência".*[5]

Nota-se, nesse diálogo, que a professora-pesquisadora desafiou os estudantes, para verificar se eles tinham uma definição do conceito de distributiva ou se apenas estavam ligados à representação figural. A resposta do aluno A5 mostra um subsunçor bem estabelecido e a ancoragem de novos conceitos sobre essa propriedade, mas A6 ainda não tem clara a definição.

Postagem da professora-pesquisadora: *"E se lermos a igualdade $2x^2$ - 4x = 2x(x-2) como 2x(x-2) =$2x^2$- 4x? Neste caso faz sentido falar em processo inverso da distributiva? Observem que isto é perfeitamente possível numa igualdade, pois se a=b então b=a".*

Postagem do aluno A7: *"Acho que não seria um inverso da distributiva, pois ambos só trocaram o lado na igualdade, não?".*

Postagem do aluno A8: *"Isto não seria o processo inverso da distributiva, pois as duas equações são iguais, só muda o lado na igualdade, sem fatoração em nenhuma das duas".*

Postagem do aluno A9: *"Não, pois só foi alterado o lado das operações na igualdade. A propriedade não se inverte, continua a mesma coisa".*

---

[5] Optou-se por copiar as respostas da forma como foram postadas.

Postagem do aluno A10: *"Não seria um processo inverso da distributiva e sim uma forma mais simplificada".*

Postagem do aluno A11: *"Na questão A, foi colocado em evidência o fator comum do $2x^2$-4x. Na questão B, foi feita a distributiva do produto. Acredito que não há um processo inverso à distributiva, pois a equação continua a mesma nos dois lados da operação".*

Novamente a professora-pesquisadora instigou os estudantes a pensarem sobre o significado da palavra "inverso", pois notou que eles a usavam como se estivessem se referindo aos membros de uma equação. É interessante notar que os alunos procuram opinar, ainda que usando expressões que não são corretas. Por exemplo, ao falar em "dois lados da operação", A11 parece considerar que o sinal de igualdade indica uma operação, equívoco bastante encontrado em pesquisas (BURGELL, 2013).

Postagem do aluno A12: *"Sim, apesar de neste caso a PD estar sendo utilizada apenas para ´simplificar` uma equação".*

Postagem do aluno A13: *"Na primeira equação o 2x foi colocado em evidência, que aplicando o chuveirinho resultaria naquela equação de grau 2. Na segunda equação aplicando a propriedade de que cada termo do parênteses é multiplicado pelos outros termos do outro, resulta a outra equação".*

Postagem do aluno A14: *"Não necessariamente, a letra A pode ser dita sim, ter sido colocado em evidência e ter sido feita a propriedade distributiva, pois o 2x acaba sim, multiplicando os valores dentro dos parênteses".*

Postagem do aluno A15: *"Sim, a letra A foi aplicado a propriedade da distributiva pelo método de colocar em evidência e na letra B também pelo método ´chuveirinho`.".*

Postagem da professora-pesquisadora: *"Pessoal, antes de postar, leiam as respostas, minhas e dos colegas. Vocês viram o objeto de aprendizagem que trata deste assunto? E mais uma vez, vamos eliminar a palavra chuveirinho, ok? Não é o termo correto".*

Notando que os alunos estavam tentando, cada um, mostrar sua participação, mas às vezes com contribuições que repetiam as anteriores e sem cuidados com a linguagem matemática, a professora-pesquisadora se preocupou em direcioná-los para a leitura das telas do objeto postado sobre esse assunto, que tinha as explicações e as expressões corretas para a propriedade. A seguir, encerrou a discussão, visto que, pelo andamento das postagens, já haviam se passado 20 dias desde o início da discussão.

Postagem final da professora-pesquisadora para esse fórum: *"Para encerrarmos a discussão: é fato que, nos dois itens, foi usada a Propriedade Distributiva. Talvez no segundo* *de forma mais explícita, mas também no primeiro, uma vez que a igualdade pode ser lida tanto da esquerda para a direita como da direita para a esquerda. Isso consta, inclusive, no objeto de aprendizagem relativo às propriedades das operações. Após todas as postagens, creio que o problema foi resolvido. Quem ainda tiver dúvidas, pode seguir em contato. :)".*

Comparando os erros analisados e as postagens desses estudantes, é possível notar que, muitas vezes, a propriedade distributiva é um *já-encontrado* que influencia negativamente a aprendizagem. O esquema com flechas, que os alunos chamam de chuveirinho, os leva a considerar que qualquer operação pode ser distribuída em relação à outra, desde que esteja visivelmente disposta como na Figura 1.

O debate com os alunos sobre suas respostas erradas, a disponibilização de objetos de aprendizagem e a criação de fóruns de discussão são algumas das possibilidades para auxiliar os estudantes a transformarem os *já-encontrados* em imagens de conceitos bem fundamentadas.

Considerações finais

Os estudantes que participaram das etapas da pesquisa aqui descritas certamente não têm dificuldades somente em relação à propriedade distributiva, como foi visto na descrição das classes de erro. Nota-se que a influência dos conhecimentos do Ensino Fundamental e Médio não significativamente construídos se estende pelo ensino superior, especialmente em disciplinas introdutórias de cursos da área de Ciências Exatas, como o Cálculo Diferencial. Os alunos participantes parecem não possuir os subsunçores necessários para a promoção de uma aprendizagem significativa dos conteúdos de Cálculo. Além disso, acreditam conhecer os conceitos ensinados na Educação Básica, mas os resultados do teste, bem como as discussões nos fóruns, mostraram problemas que já deveriam ter sido superados no final do Ensino Médio.

Ao trazer essas dificuldades para a sala de aula, debatendo com os alunos suas respostas, desafiando-os a reconstruir suas imagens e definições de conceito ou propondo discussões *on-line* no ambiente MOODLE, estão sendo proporcionadas ocasiões de retomada dos conhecimentos prévios.

Os equívocos referentes à propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição destacaram-se tanto nas respostas do teste quanto nas discussões do fórum. No laboratório de aprendizagem da Instituição em questão, não houve, ainda, possibilidade de fazer um trabalho detalhado sobre as dificuldades apresentadas pelos alunos que procuram atendimento. Os relatórios dos bolsistas ou das professoras responsáveis, em geral, trazem dados quantitativos, sem uma análise do tipo de erro cometido pelos alunos ou de sua dedicação a um determinado trabalho de retomada dos conteúdos nos quais apresentam dificuldades. Esse fato, aliado ao uso da análise de erros para embasar a construção de um objeto de aprendizagem e criação de um fórum de discussão em ambiente virtual, parecem ser os resultados originais da pesquisa relatada.

Sugere-se que novos estudos sejam realizados, com outros tipos de questões aplicadas a alunos de disciplinas matemáticas, para que outros tipos de erros sejam identificados e, a partir deles, seja possível a criação de novos recursos, em ambientes virtuais ou presenciais, para propiciar uma aprendizagem significativa, tanto dos conteúdos de Cálculo como daqueles que lhes servem de base.

Referências

AUSUBEL, D. P. **Aquisição e retenção de conhecimentos**: uma perspectiva cognitiva. Lisboa: Plátano Edições Técnicas, 2003.

AUSUBEL, D. P.; NOVAK, J. D.; HANESIAN, H. **Psicologia Educacional**. Rio de Janeiro: Ed. Interamericana, 1980.

BURGELL, F. ¿Qué significados atribuyen al signo de *igual* los estudiantes de primer año del ciclo básico de enseñanza media? Aportes para pensar los cimientos del álgebra. In: Congreso Iberoameriocano de Educación Matemática, 7., 2013, Montevideo. **Actas**. Montevideo: SEMUR, 2013. 1 CD-ROM.

CURY, H. N. “Professora, eu só errei um sinal”!: como a análise de erros pode esclarecer problemas de aprendizagem. In: CURY, H. N. (Org.). **Disciplinas matemáticas em cursos superiores**: reflexões, relatos, propostas. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2004. p. 111-138.

CURY, H. N.; KONZEN, B. Análise de resoluções de questões em matemática: as etapas do processo. **Educação Matemática em Revista-RS**, v. 7, p. 33-41, 2006.

GIRALDO, V. **Descrições e conflitos computacionais**: o caso da derivada. 2004. Tese (Doutorado em Engenharia de Sistemas e Computação) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2004.

GIRALDO, V.; CAETANO, P.; MATTOS, F. **Recursos computacionais no ensino de Matemática**. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

HARDY, N. A subtle interplay between ordinary, algebraic and analytic registers in college level Calculus courses as a source of students’ difficulties. In: INTERNATIONAL CONGRESS IN MATHEMATICAL EDUCATION (ICME 11), 11., 2008, Monterrey, Mexico. **Proceedings.** Disponível em: <http://tsg.icme11.org/tsg/show/32>. Acesso em 20 dez. 2012.

LEITE, M. T. M. **O ambiente virtual de aprendizagem Moodle na prática docente**: conteúdos pedagógicos. 2008. Disponível em: <http://www.virtual.unifesp.br/cursos/oficinamoodle/textomoodlevvirtual.pdf>. Acesso em: 02 jul. 2011.

LIMA, R. N. de. **Equações Algébricas no Ensino Médio: u**ma Jornada por Diferentes Mundos da Matemática. 2007. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2007.

LIMA, R. N.; TALL, D. Procedural embodiment and magic in linear equations. **Educational Studies in Mathematics**, v. 67, n. 1, p. 3-18, 2008.

MARIOTTI, M. A.; CERULLI, M. Semiotic Mediation for Algebra Teaching and Learning. In: Van den Heuvel-Panhuizen, M. (Ed.). **Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**. Utrecht, NL, 2001. V. 3, p. 225-232. Disponível em: <http://www.researchgate.net/publication/32231281_Semiotic_mediation_for_algebra_teaching_and_learning>. Acesso em 20 fev. 2015.

MOREIRA, M. A. **Aprendizagem significativa**: um conceito subjacente. 1997. Disponível em: <http://www.if.ufrgs.br/~moreira/>. Acesso em 15 dez. 2012.

MOREIRA, M. A. **Aprendizagem significativa**: a teoria e textos complementares. São Paulo: Ed. Livraria da Física, 2011.

MÜLLER, T. J.; LIMA, J. V.; CURY, H. N. Construção de objeto de aprendizagem sobre números reais, adaptado aos estilos de aprendizagem dos alunos. **Vidya**, v.33, n. 2, p. 9 - 19, 2013.

NASSER, L. Uma pesquisa sobre o desempenho de alunos de cálculo no traçado de gráficos. In: FROTA, M. C. R.; NASSER, L. **Educação Matemática no ensino superior**: pesquisas e debates. Recife: SBEM, 2009. p. 43-56.

SABBATINI, R. M. E. Ambiente de Ensino e Aprendizagem via Internet: a Plataforma Moodle. Campinas: Instituto Edumed, 2007. Disponível em: <http://www.ead.edumed.org.br/file.php/1/PlataformaMoodle.pdf>. Acesso em: 15 março 2015.

TALL, D. **How humans learn to think mathematically:** exploring the three worlds of mathematics. New York: Cambridge, 2013.

TALL, D.; VINNER, S. Concept image and concept definitionin mathematics with particular reference to limits and continuity. **Educational Studies in Mathematics**, n. 12, p. 151–169, 1981.

VINNER, S. Concept definition, concept image and the notion of function. **International Journal of Mathematics Education in Science and Technology**, v. 14, n. 3, p. 293-305, 1983.

Submetido em abril de 2015

Aprovado em setembro de 2015