



REVISTA DO PROGRAMA DE PÓS-  
GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA  
DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO  
GROSSO DO SUL (UFMS)

Volume 8, Número 17 – 2015 - ISSN 2359-2842

**Contribuições para o Desenvolvimento do Pensamento Algébrico**

**Contributions for Development of Algebraic Thinking**

Keila Tatiana Boni<sup>1</sup>

Angela Marta Pereira das Dores Savioli<sup>2</sup>

**Resumo**

Este artigo apresenta resultados de uma pesquisa que teve por objetivo investigar e analisar, em procedimentos de cálculos aritméticos, indícios de pensamento algébrico que são manifestados oralmente por estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental ao se envolverem com uma tarefa potencialmente algébrica. Com esse intuito, seis estudantes do 5º ano de uma escola pública foram dispostos em díades, sendo cada uma delas acompanhada por uma testemunha durante envolvimento com uma tarefa considerada como potencialmente algébrica. A partir de gravações de voz, registros escritos e diários de campo obtiveram-se informações que foram organizadas, analisadas e interpretadas à luz da Análise Textual Discursiva, bem como considerando estudos realizados sobre procedimentos de cálculos aritméticos, registros de representação semiótica e pensamento algébrico. Conclui-se que há inerências entre procedimentos de cálculos aritméticos e pensamento algébrico, sobretudo no que diz respeito à generalização de propriedades de números e operações, tais como associatividade e comutatividade da adição e da multiplicação, bem como no que diz respeito ao reconhecimento de padrões. Conclui-se, ainda, a atribuição da expressão em linguagem natural oral para a manifestação de indícios de representações mentais por meio dos quais foi possível inferir sobre os procedimentos de cálculos aritméticos utilizados por estudantes ao lidarem com a tarefa proposta.

**Palavras-chave:** Educação Matemática. Procedimentos de Cálculos Aritméticos. Pensamento Algébrico. Registros de Representação Semiótica.

**Abstract**

This article presents results of a research that aimed to investigate and examine in procedures of arithmetic, algebraic thinking of evidence which are expressed orally by students of the 5th year of elementary school to get involved with a potentially algebraic task. To that end, six students of the 5th year in a public school were arranged in pairs, each of which is accompanied by a witness during involvement with a task considered potentially

---

<sup>1</sup> Mestre e atual doutoranda do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual de Londrina/UDEL, Centro de Ciências Exatas, Paraná, Brasil. E-mail: [keilaboni@hotmail.com](mailto:keilaboni@hotmail.com) - com o apoio da CAPES.

<sup>2</sup> Professora doutora do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina /UEL, Centro de Ciências Exatas, Paraná, Brasil. E-mail: [angela@sercomtel.com.br](mailto:angela@sercomtel.com.br) - com o apoio da Fundação Araucária.

algebraic. From voice recordings, writings and daily field records yielded information that was organized, analyzed and interpreted in the light of Textual Analysis Discourse and considering studies of arithmetic procedures, semiotic representation registers and algebraic thinking. It follows that there is relationship between arithmetic procedures and algebraic thinking, especially with regard to the generalization properties of numbers and operations, such as associative and commutative addition and multiplication, as well as in regard to pattern recognition. It follows also the granting of expression in oral natural language for the manifestation of mental representations evidence by which it was possible to infer about the procedures of arithmetic used by students to deal with the proposed task.

**Keywords:** Mathematics Education. Arithmetic Calculations Procedures. Algebraic Thinking. Semiotics Representation Registers.

## Introdução

Considerando que nos anos iniciais da Educação Básica a concepção de ensino de Matemática predominante em muitas instituições continua sendo a tradicional (que entendemos como aquela que valoriza os algoritmos convencionais de cálculos aritméticos), bem como considerando diversas dificuldades que estudantes enfrentam em compreender a álgebra simbólica que, em geral, tem início no 7º ano, defendemos que o pensamento algébrico precisa começar a ser fomentado mais cedo, de maneira simultânea ao ensino e a aprendizagem de conceitos aritméticos.

Dessa forma, ao ser introduzida a álgebra simbólica, o estudante terá, provavelmente, maior facilidade de compreensão, visto que esta será apenas uma extensão da matemática estudada nos anos anteriores.

Com a exploração de conceitos aritméticos, sobretudo com o reconhecimento de padrões e regularidades em procedimentos de cálculos aritméticos, é possível contribuir para que o estudante possa expressar generalização, primeiramente em linguagem natural para, em seguida, seguir um percurso gradativo em direção à simbolização (MESTRE; OLIVEIRA, 2012).

Ainda, o trabalho integrado entre procedimentos de cálculos aritméticos e pensamento algébrico, além de possibilitar o desenvolvimento deste a partir da generalização de aspectos adjacentes em procedimentos de cálculo, contribui, do mesmo modo, para os estudantes reexaminarem e compreenderem o significado das operações e as diferentes formas de pensar a Matemática (RUSSELL; SCHIFFER; BASTABLE, 2011).

Considerando esse contexto e partindo da conjectura de que registros de representação semiótica, sobretudo a linguagem natural expressa oralmente, podem ser considerados como meios de exteriorizar representações mentais (DUVAL, 2003), inclusive procedimentos de cálculo mental, apresentamos, neste artigo, alguns resultados de uma pesquisa com o objetivo

de investigar e analisar, em procedimentos de cálculos aritméticos, indícios de pensamento algébrico que são manifestados oralmente por estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental ao se envolverem com uma tarefa potencialmente algébrica<sup>3</sup>.

Visando atender ao objetivo traçado, foram dispostos seis estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública do município de Apucarana-PR em díades, e a estes estudantes foi proposta uma tarefa que consideramos como potencialmente algébrica. Em díades, esses estudantes expressaram oralmente suas estratégias para resolver a tarefa, expressões essas consideradas como um tipo de representação semiótica que, de acordo com Duval (2003), permite exteriorizar indícios de representações mentais.

Por intermédio dos discursos entre os estudantes e entre estes e as testemunhas que acompanharam todo o processo de desenvolvimento da tarefa proposta, buscamos evidenciar manifestações de procedimentos de cálculos aritméticos (PARRA, 1996; LUCANGELI *et al*, 2003; entre outros) e nestes inferir indícios de pensamento algébrico (KAPUT; BLANTON, 2001; PIMENTEL; VALE, 2009; FUJII; STEPHENS, 2001; entre outros), visando destacar possíveis conversões de representações semióticas (DUVAL, 2003) entre os procedimentos de cálculos aritméticos e indícios de pensamento algébrico manifestados, o que nos permitiu chegar a algumas conclusões sobre o caráter potencialmente algébrico da aritmética.

### **A representação em linguagem oral e o cálculo mental**

Existem divergências com relação à definição de cálculo mental. Em geral, o cálculo mental é entendido apenas como sendo “sinônimo de memorização mecânica de fatos numéricos” (CORREA, 2004, p. 145). No entanto, apesar de a memorização de alguns fatos numéricos contribuírem com os procedimentos de cálculo mental, este não se restringe a isso, mas vai muito além.

Para Parra (1996), o cálculo mental pode ser compreendido como

[...] o conjunto de procedimentos em que, uma vez analisados os dados a serem tratados, estes se articulam, sem recorrer a um algoritmo preestabelecido para obter resultados exatos ou aproximados.

Os procedimentos de cálculo mental se apoiam nas propriedades do sistema de numeração decimal e nas propriedades das operações, e colocam em ação diferentes tipos de escrita numérica, assim como diferentes relações entre o número (PARRA, 1996, p. 189).

---

<sup>3</sup> Consideramos como *tarefa potencialmente algébrica* aquela que permite evidenciar indícios de pensamento relacional, ou seja, a qual possibilita ao sujeito expressar generalizações de relações e propriedades dos números e das operações, bem como a noção de equivalência associada ao sinal de igualdade.

Do mesmo modo consideramos o cálculo mental: como um conjunto de procedimentos, os quais se apoiam nas propriedades de números e operações e que contribuem para que o sujeito desenvolva uma maneira de pensar mais flexível, permitindo-o estabelecer diferentes representações e relações entre números e operações.

Destacamos que nesta pesquisa nos referiremos ao cálculo mental como um tipo de cálculo que está incluso no que chamamos de *procedimentos de cálculos aritméticos*, que correspondem aos processos e às maneiras pelas quais os estudantes buscam solucionar situações matemáticas com as quais se envolvem. O cálculo mental ganha destaque dentre estes procedimentos devido a nossa concepção de que indícios de cálculo mental podem ser manifestados por meio da linguagem natural (DUVAL, 2009), principal meio em que buscamos investigar elementos essenciais para desenvolver esta pesquisa. Sobre essa abordagem ainda traremos maiores esclarecimentos.

Parra (1996) defende que o cálculo mental precisa ser desenvolvido desde os anos iniciais e, para sustentar a sua defesa, destaca quatro hipóteses didáticas:

a) as aprendizagens no terreno do cálculo mental influem na capacidade de resolver problemas, uma vez que os alunos passam a estabelecer relações, que incluem o tratamento dos dados que possuem e a utilização de diferentes decomposições de número, e a tirar conclusões a partir dessas relações;

b) o cálculo mental aumenta o conhecimento no campo numérico, pois o aluno começa a refletir sobre o cálculo que faz, o que favorece o tratamento das relações matemáticas, tais como as propriedades das operações;

c) o trabalho com cálculo mental habilita para uma maneira de construção do conhecimento que favorece uma melhor relação do aluno com a matemática, uma vez que ao articular o que já sabe com o que tem que aprender, o estudante se torna mais confiante ao assumir sua individualidade;

d) o trabalho de cálculo pensado deve ser acompanhado de um aumento progressivo do cálculo automático, afinal o cálculo pensado pode ser uma via de acesso ao algoritmo e uma ferramenta de controle deste (PARRA, 1996).

Alguns autores defendem o desenvolvimento dos procedimentos de cálculo mental na escola ao considerar que este é o tipo de cálculo mais frequentemente utilizado na vida cotidiana, além de trazer várias contribuições para o aprendizado escolar:

Na aula de matemática, as crianças fazem conta para acertar, para ganhar boas notas, para agradar a professora, para passar de ano. Na vida cotidiana, fazem as mesmas contas para pagar, dar troco, convencer o freguês de que seu preço é razoável (CARRAHER; CARRAHER; SCHLIEMANN, 1995, p. 19).

Boulay, Le Bihan e Violas (2004) apresentam duas funções para o cálculo mental: uma social e uma pedagógica. A primeira se refere à utilização de cálculos em situações cotidianas, em que prevalece a utilização de cálculos aproximados e, pelo segundo entende-se que o cálculo mental contribui para a formação do conhecimento relativo às propriedades e estruturas numéricas, amplia a capacidade do estudante em criar estratégias próprias de resolução e auxilia na resolução de problemas.

Quando o estudante expõe oralmente os procedimentos que utilizou ao evocar um resultado, explicita ao professor procedimentos e estratégias que utilizou e que não foram descritos em seus registros escritos. Além disso, por meio da linguagem oral o estudante argumenta seus pensamentos com os colegas de turma, permitindo a troca de experiências e o compartilhamento de procedimentos de cálculo. Ao mesmo tempo, por meio das trocas de informações, os estudantes podem identificar equívocos e erros em suas resoluções além de apreender estratégias e procedimentos de resolução por outras perspectivas.

Assim sendo, entendemos que a aprendizagem é dependente de diversos fatores dentre os quais podemos citar as interações e argumentações entre alunos e entre estes com o professor. Além disso, interações precisam ocorrer entre o aluno e o objeto matemático e pode acontecer por meio de sistemas de representações.

De acordo com Duval (2009), um conceito matemático só pode ser compreendido a partir da capacidade de diferenciar o objeto matemático de sua representação, e as representações de objetos matemáticos podem ser consideradas como mentais, computacionais (ou internas) e semióticas.

As representações mentais são aquelas relacionadas às interiorizações das representações externas. As representações computacionais (ou internas) correspondem a aquelas que são executadas automaticamente para se produzir uma resposta a determinada situação. Quanto às representações semióticas, segundo Duval (2009), estas são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representação, as quais apresentam características próprias de significado e funcionamento.

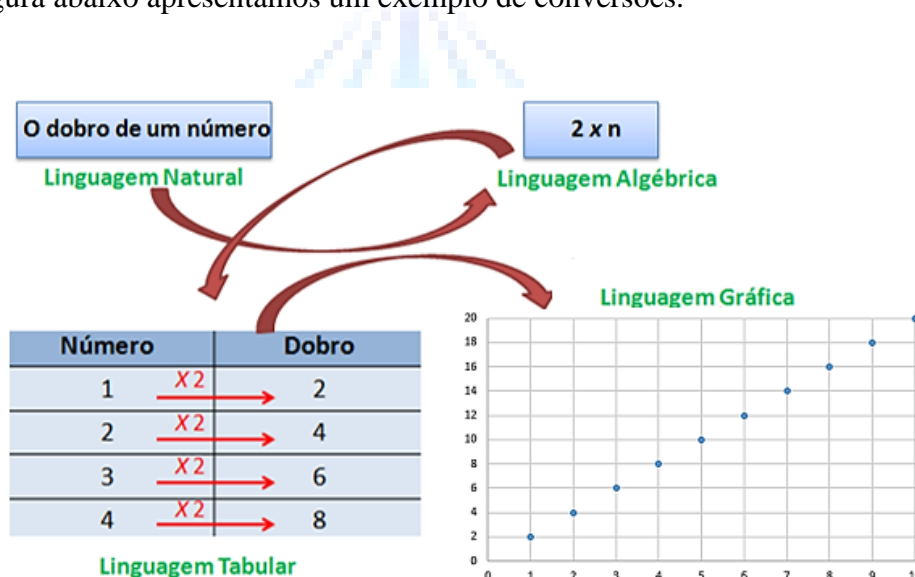
As representações semióticas podem ser consideradas como um meio de exteriorizar as representações mentais, permitindo comunicar estas a outras pessoas. Porém, as representações semióticas vão além da possibilidade de comunicação: são fundamentais para a atividade cognitiva do pensamento (DUVAL, 2012).

Em nossa pesquisa reconhecemos, tal como Duval (2009, 2012), a essencialidade da linguagem natural oral como meio do estudante exteriorizar sua representação interna de um

objeto matemático. Na comunicação de sua representação mental por meio da linguagem oral, visamos investigar os procedimentos de cálculo mental que são utilizados pelos estudantes ao se envolverem com uma tarefa que consideramos como potencialmente algébrica, permitindo-nos analisar e interpretar possíveis relações entre esses procedimentos de cálculo com o desenvolvimento do pensamento algébrico, apontando possíveis conversões que poderiam ser realizadas a partir dessas relações.

As conversões, de acordo com Duval (2003), correspondem às transformações em que ocorrem mudanças de registros, porém conservando a menção ao mesmo objeto matemático. É às conversões que Duval (2003) atribui a aprendizagem em matemática.

Na figura abaixo apresentamos um exemplo de conversões.



**Figura 1** – Conversões entre registros  
Fonte: Das autoras.

Na figura acima apresentamos três sistemas de registros para representar um mesmo conceito: o dobro de um número. Os sistemas de registros apresentados são: linguagem natural, linguagem algébrica, linguagem tabular e linguagem gráfica, sendo as conversões explicitadas por meio de flechas.

Contudo, Duval (2003) ainda defende que é a coordenação entre registros de representação que tem papel fundamental na apreensão conceitual de objetos matemáticos. A coordenação entre registros consiste na capacidade de distinguir, dentre diferentes representações, o mesmo objeto e de converter de uma transformação à outra, e à primeira retornar.

## Os procedimentos de cálculo mental e o pensamento algébrico



Defendemos que a aprendizagem da Matemática nos anos iniciais só se torna significativa a partir do momento que o ensino é pautado na compreensão e, nesse sentido, acreditamos que a valorização de diferentes procedimentos de cálculos aritméticos, dentre os quais destacamos o mental, e do desenvolvimento do pensamento algébrico são essenciais nesse processo.

As relações entre o cálculo mental, tal como o definimos, com o pensamento algébrico nos anos iniciais podem ser ponderados a partir das definições de pensamento algébrico apresentados por alguns autores:

- Kaput e Blanton (2001) defendem o pensamento algébrico como aritmética generalizada, ou seja, como a generalização de operações aritméticas e propriedades numéricas;

- Fujii e Stephens (2001), abordam sobre o conceito de quase-variáveis, considerando que nos contextos aritméticos estão relacionadas variáveis implícitas que são utilizadas pelos estudantes;

- Usiskin (2000) argumenta que, mesmo sem perceberem, os professores dos anos iniciais já ensinam álgebra, apresentando exemplos que mostram reconhecimento de padrões e generalização em propriedades de números e de operações aritméticas.

Além disso, Pimentel e Vale (2009) defendem que um trabalho integrado entre a aritmética e a álgebra nos anos iniciais de escolaridade propicia uma extensão natural da matemática nos anos subsequentes e destacam o fato de “[...] as ideias aritméticas, conceitos e técnicas terem um caráter potencialmente algébrico no sentido de que são generalizáveis” (PIMENTEL; VALE, 2009, p. 02).

É nesse contexto que defendemos o desenvolvimento do pensamento algébrico mais cedo, a partir dos anos iniciais, de maneira integrada ao ensino e a aprendizagem de conceitos aritméticos, sobretudo de procedimentos de cálculos aritméticos, dentre os quais destacamos o cálculo mental, pautando-nos na percepção e generalização de propriedades e relações de números e de operações, bem como no entendimento do sinal de igual como uma relação de equivalência, em detrimento de um simples indicador de resultado.

Nessa perspectiva, nos inspiramos em elementos de estudos de Lucangeli *et al* (2003), mais especificamente nas estratégias<sup>4</sup> de cálculo mental que eles apresentam, para investigar

---

<sup>4</sup> Entendemos estratégias de cálculo no mesmo sentido que consideramos procedimentos de cálculos aritméticos: os processos e as maneiras pelas quais os estudantes buscam solucionar situações matemáticas com as quais se envolve.

procedimentos de cálculos aritméticos que são utilizados pelos estudantes ao se envolverem com uma tarefa que consideramos como potencialmente algébrica, e, a partir desses procedimentos, analisar e interpretar indícios de possíveis relações entre os procedimentos de cálculos aritméticos evidenciados e o pensamento algébrico, apontando possíveis conversões que poderiam ser realizadas a partir dessas relações.

Tais estratégias são elencadas e explicadas no processo de análise das informações obtidas durante a pesquisa. O que adiantamos é que Lucangeli *et al* defendem a essencialidade de um currículo que enfatiza a flexibilidade, bem como a promoção da aprendizagem de estratégias de cálculo mental e escrito (que incluímos, genericamente, de procedimentos de cálculos aritméticos) como central no processo de ensino e, ao mesmo tempo, transversal às diversificadas unidades do currículo de Matemática nos anos iniciais.

Em nosso estudo, entendemos que o principal avanço com relação aos estudos de Lucangeli *et al* está no fato de que entendemos que os procedimentos de cálculos aritméticos são centrais no processo de ensino, mas não apenas para promover um trabalho matemático mais flexível, mas, sobretudo, porque apresentam potencialidades para o desenvolvimento do pensamento algébrico. Tais considerações fazemos ao considerarmos os estudos realizados em teorias que contemplam o desenvolvimento do pensamento algébrico desde os anos iniciais, pautados em propriedades e relações de números e operações aritméticas.

### **Os procedimentos metodológicos**

A investigação foi realizada em uma escola municipal de Apucarana – PR, a qual era participante de um projeto do Programa Observatório da Educação/Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), programa do qual a pesquisadora e as testemunhas eram participantes.

Para a coleta das informações optamos por selecionar estudantes do 5º ano, último ano escolar ofertado nessa instituição de ensino. Vale destacar que nem a pesquisadora e nem as testemunhas envolvidas eram professores dos estudantes participantes da pesquisa.

Como a intenção era investigar as linguagens naturais orais, precisaríamos de um número limitado de estudantes e, por isso, foi pedido para que a professora de Matemática da turma selecionasse apenas seis estudantes. A professora nos informou que seu critério de escolha dos alunos selecionados foram: os que mais se destacavam em Matemática na turma e que não possuíam dificuldades, como timidez, para se expressarem oralmente.



Como relatado, deixamos a escolha dos alunos à critério da professora. Pode não ter sido a melhor escolha, uma vez que a mesma justificou ter selecionado apenas os “melhores” alunos da turma, segundo a sua concepção, e, por esse motivo, consideramos que a presente pesquisa se configura como um estudo de caso, em que os resultados não podem ser generalizados para alunos em geral do 5º ano escolar.

Escolhemos por realizar nossa investigação na sala de informática da escola, por se tratar de um lugar silencioso e propício para realização da atividade que seria proposta. Os alunos foram separados em três grupos, formando díades, sendo que estas foram escolhidas por eles mesmos. Em uma das díades esteve a primeira autora e para cada uma das outras díades esteve uma testemunha, que são estudantes de pós-graduação do mesmo programa da pesquisadora.

Como as testemunhas faziam parte do mesmo programa de pós-graduação da pesquisadora, bem como eram integrantes do projeto do Programa Observatório da Educação/Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), todas elas já estavam preparadas para participar da pesquisa de maneira a não induzir as respostas dos alunos investigados.

Às díades foi proposta uma tarefa que consideramos como potencialmente algébrica e, durante a realização dessa tarefa, para cada díade foi disponibilizado um gravador de voz. Além disso, a pesquisadora e cada uma das testemunhas possuíam um diário de campo, no qual registravam outras informações relevantes para a pesquisa. Vale ressaltar que em nenhum momento a tarefa foi explicada para os estudantes.




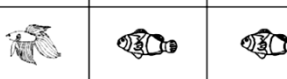



A escolha por separar os estudantes em díades deu-se pelo anseio em evidenciar por meio da comunicação entre eles suas compreensões com relação à tarefa proposta, bem como os procedimentos de cálculos aritméticos que seriam utilizados para evocar as respostas. Quando os estudantes chegavam à resposta sem manifestar como pensaram ou quando conversavam muito baixo entre si, o que poderia impossibilitar ouvi-los nas gravações posteriormente, eles foram questionados pela pesquisadora ou testemunhas a responderem como pensaram para obter os resultados que encontraram.

A tarefa que propomos foi encontrada em Cullen e Gaymore (2008), publicada na National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), que a consideram como capaz de invocar o raciocínio e a resolução de problemas, bem como de exigir habilidades de comunicação e conectar diversos conceitos e princípios matemáticos (CULLEN; GAYMORE, 2008). Além disso, essa mesma tarefa, oferece às crianças “a oportunidade de raciocinar

logicamente e determinar os valores de combinações de diferentes objetos” (CULLEN; GAYMORE, 2008, p. 345).

A tarefa proposta aos estudantes participantes da presente investigação foi a que segue:

**Quanto custa cada peixe?**

	<b>R\$ 6,00</b>	
	<b>R\$ 12,00</b>	
	<b>R\$ 19,00</b>	
	<b>R\$ 16,00</b>	
<b>R\$ 13,00</b>	<b>R\$ 19,00</b>	<b>R\$ 21,00</b>
		
<b>R\$ _____</b>	<b>R\$ _____</b>	<b>R\$ _____</b>

**Figura 2** – Tarefa proposta para os estudantes participantes da pesquisa  
Fonte: CULLEN; GAYMORE (2008, p. 347).

Nesta tarefa estão distribuídos em um quadro de quatro linhas e três colunas, três tipos diferentes de peixes, e em cada linha e coluna, são apresentados os valores dos respectivos conjuntos de peixes. Por meio dessas informações, o estudante precisa encontrar estratégias para descobrir qual é o valor de cada peixe. Destacamos que essa tarefa foi proposta aos alunos sem que nenhuma dessas informações fossem passadas a eles, sendo os mesmos orientados, apenas, a analisarem a tarefa e a resolverem da maneira que julgassem correta.

Pautando-se nas afirmações de Cullen e Gaymore (2008) sobre a tarefa apresentada e considerando os demais estudos teóricos que realizamos e já mencionamos, acreditamos que esse tipo de tarefa contribui para o desenvolvimento do pensamento algébrico e para a comunicação em sala de aula, aspectos esses que são essenciais para que os alunos compreendam diferentes maneiras de pensar sobre o mesmo problema e, assim, poderem refletir sobre qual a maneira mais lógica de resolvê-lo. E, são esses aspectos que pretendemos investigar e inferir a partir dos procedimentos de cálculos aritméticos manifestados pelos alunos durante envolvimento com a tarefa, sendo esse processo analítico realizado à luz de procedimentos da análise textual discursiva (MORAES, 2003). Para isso foram submetidas à

procedimentos analíticos as informações provenientes das gravações em áudio que foram transcritas e comparada com as anotações de diários de campo.

De acordo com Moraes (2003), a análise textual discursiva

[...] pode ser compreendida como um processo auto-organizado de construção de compreensão em que novos entendimentos emergem de uma sequência recursiva de três componentes: desconstrução dos textos do *corpus*, a *unitarização*; estabelecimento de relações entre os elementos unitários, a categorização; o captar do novo emergente em que a nova compreensão é comunicada e validada. (MORAES, 2003, p. 192).

Seguindo os procedimentos à luz dessa metodologia, primeiramente, as informações coletadas foram desconstruídas e unitarizadas por meio das relações possibilitadas nos primeiros momentos. Por conseguinte, considerando o fenômeno em análise, categorizamos as unidades de análise em categorias mistas (parte à priori e parte emergentes) sendo estas inspiradas nas categorias de Lucangeli *et al* (2003), considerando, ainda, estudos realizados nos referenciais teóricos que adotamos: em Parra (1996) no que diz respeito aos procedimentos de cálculo mental, em Duval (2003; 2009; 2012) no que corresponde às representações semióticas, sobretudo a linguagem natural como meio de exteriorizar indícios de representações mentais e em Kaput e Blanton (2001) e Pimentel e Vale (2009) no que tange à elementos da aritmética como potenciais para o desenvolvimento do pensamento algébrico, sobretudo devido à generalização.

### O processo de análise das informações obtidas

Visando preservar as identidades dos envolvidos nessa investigação, foram atribuídos códigos para cada um deles. Os seis estudantes são identificados como E1, E2,..., E6, e a pesquisadora e os testemunhas são identificados como T1, T2 e T3. Os estudantes E1 e E2 foram acompanhados por T1, os estudantes E3 e E4 por T2 e, por fim, E5 e E6 foram acompanhados por T3.

A análise, como já mencionado, é realizada à luz das estratégias de cálculo elencadas por Lucangeli *et al* (2003). O quadro abaixo apresenta essas estratégias, porém, com adaptações que realizamos de maneira que nos permitisse reunir as unidades de análise da presente pesquisa:

ESTRATÉGIAS PARA A ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO MENTAL	
COF	<i>Contando nos dedos</i> . A partir de um determinado valor da operação, geralmente o maior deles, o aluno altera o resultado (adicionando ou subtraindo) pelo número de unidades

	indicadas pelo menor número, utilizando os dedos para representar essas unidades. Nesse processo é comum o aluno contar alto e com ritmo nos movimentos dos dedos das mãos.
CON	<i>Contagem mental a partir de um ponto específico.</i> Esta é uma estratégia de nível suavemente superior, quando a criança é capaz de operar com números em um nível representativo. Nesse processo movimentos corpóreos podem ocorrer.
1010	<i>Estratégia de decomposição.</i> Os números são separados em unidades e dezenas para somá-los ou subtraí-los separadamente, remontando o resultado no final. Exemplo: $[77+49 = (70+40) + (7+9); 77-42 = (70-40) + (7-2)]$ .
N10	Apenas o segundo operador é dividido em unidades e dezenas, para posteriormente, adicionar ou subtrair com o outro operador. Exemplo: $[77+49 = (77+10+10+10+10) + 9; 52-28 = (52-10-10) - 8]$ .
C10	<i>Formação de 10 unidades.</i> As crianças formam múltiplos de dez de maneira a facilitar suas operações. Exemplo: $[43+6 = (43+7) - 1; 43-7 = (43-3) - 4]$ .
<b>Estratégias para a multiplicação e a divisão mental</b>	
DO	<i>Operação diferente.</i> Na multiplicação, a criança a transforma em adição, adicionando-se o multiplicando conforme indicado pelo multiplicador. Exemplo: $[31 \cdot 3 = 31+31+31; 31 \cdot 3 = (30+30+30) + 3]$ . Na divisão, esta operação é transformada em multiplicação, considerando-se o dividendo como resultado de uma multiplicação na qual o multiplicador é o divisor. Exemplo: $[120:4 = ? \rightarrow 4 \cdot ? = 120]$ .
<b>Estratégias para as quatro operações</b>	
MA	<i>Algoritmo mental.</i> A criança imagina a operação da mesma forma estrutural utilizada para a execução de uma escrita, operando em um algoritmo mental.
AUTO	<i>Cálculo automático.</i> Ao resolver a operação, a criança recupera um resultado da memória.

**Quadro 1** – Estratégias de cálculo mental e escrito  
Fonte: Adaptação de Lucangeli *et al* (2003).

A seguir, descrevemos as categorias, apresentando exemplos de fragmentos de relatos dos estudantes que se enquadram em cada categoria. Por fim, explicitamos algumas inferências.

**COF** - *Contando nos dedos*: nesta categoria foram reunidos os momentos que, de acordo com a pesquisadora e as testemunhas, alguns estudantes utilizaram os dedos das mãos para efetuar contagens durante a resolução da tarefa. Em geral, esse processo de contagem utilizando os dedos era acompanhado por um movimento rítmico da cabeça. A seguir são apresentados os momentos de resolução dos estudantes E2 e E4, que fizeram uso desse procedimento, bem como a anotação de suas respectivas testemunhas.

Trecho de descrição do áudio no momento em que os estudantes operam sobre a 1ª coluna da tarefa:

*E1: 2 mais 2, 4, com mais 2, 6 e com mais 7 ... 13.*

*Anotação de T1: Ao efetuar a adição de 6 mais 7 a estudante E1 calcula mentalmente enquanto que E2 resolve a mesma operação contando nos dedos das mãos*

Trecho de descrição do áudio no momento em que os estudantes operam sobre a 3ª linha da tarefa:

*E4: Espera, espera, achei um jeitinho... esses daqui custam 19 reais, então...*

*Anotação de T2: O aluno contou nos dedos (dividindo 19 por 3), mas não obteve resultado inteiro*

**CON - Contagem mental a partir de um ponto específico:** nesta categoria reunimos as partes das transcrições dos áudios e diários de campo que indicam momentos em que os estudantes calcularam mentalmente uma operação a partir de um ponto específico. Vale ressaltar que, apesar de não utilizarem os dedos durante a contagem, movimentos rítmicos com a cabeça foram identificados. Esta estratégia foi utilizada por E3 e E4 conforme exemplificamos a seguir, nas passagens em negrito.

Trecho de descrição do áudio no momento em que os estudantes operam sobre a 3ª linha da tarefa:

*E4: Deixa eu ver... para dar 12...12 mais 2, **14, mais cinco dá...15, 16, 17, 18, 19.** Achei! Aqui é...*

*E3: 7?*

*E4: não...*

*E3: 9?*

*E4: Não, é 12.*

*E3: 12, 12... Como 12?*

*E4: Aqui é 14, mais cinco.... deu 14, deu 14...*

*E3: Se for 12 esses dois aqui vai dar 24... vai dar 26.*

*E4: Ah é, dá 24. Para dar 14 tem que ser ...é ué tá certo! ...Ah não, tá não, é 7...7 e 7, **14, mais 5...***

*E3: **19! 14, 15, 16, 17, 18, 19... é está certo: 7 reais***

**DO - Operação diferente:** nessa categoria reunimos os trechos das transcrições que indicam trocas de operações feitas pelos estudantes. Essas trocas podem ser observadas nas falas de E1, E2, E3 e E4, conforme exemplificamos na sequência, nos trechos que enaltecemos em negrito.

Trecho de descrição do áudio no momento em que os estudantes operam sobre a 4ª linha e sobre as 3 colunas da tarefa, conferindo os resultados encontrados:

*E2: Esse daqui é **7 mais 7, 14, mais 2, 16.***

*T1: E será que assim (mostrando as colunas) também dá certo?*

*E1: **2 mais 2, 4, com mais 2, 6 e com mais 7...13.***

*Anotação de T1: Ao efetuar a adição de 6 mais 7 a estudante E1 calcula mentalmente enquanto que E2 resolve a mesma operação contando nos dedos das mãos.[...]*

*E1: **5 com mais 5, 10, com mais 7, 17, com mais 2, 18, 19.***

*E1: Agora esse outro aqui é **7 com mais 7, é 14...***

*E2: com mais 5 é 19, com mais 2 é 21*

Trecho de descrição do áudio no momento em que os estudantes operam sobre a 2ª linha da tarefa:

*E4: Cada peixe eu acho que é 2 reais, por que daí dá **2, 4 e 6.***

*E3: É, pode ser.*

*E4: E esse daqui tem que dar 12 reais. Então, **4, 8 e 12.***

*E3: Mas esse daqui vale 4 também?*

*Anotação de T2: nesse momento E3 aponta para o peixe diferente na 2ª linha.*

*E4: Deve ser, porque está nessa figura.*

*E3: Não... acho que esse daqui vai dar o mesmo tanto que esse daqui, não vai?*

*Anotação de T2: nesse momento E3 aponta para o peixe da 1ª linha.*

*E4: Espera aí! Nossa que difícil! ...Ah, entendi!*

*E3: Esse daqui vai valer 2 reais também, não vai?*

*E4: Por que é 2 reais, e esse daqui vai dar 6, eu acho.*

*E3: 6 e 6, 12... 14...calma aí...*

*E4: 2, 4 e 6...*

*E3: vai dar 10.*

*E4: não vai dar, tem que ser mais do que 2, como 4*

**AUTO - Cálculo automático:** nessa categoria reunimos os trechos das transcrições que apontam os estudantes que, ao resolverem a operação, recuperaram um resultado da memória. Exemplos dessa categoria são mostrados a seguir, destacados em negrito.

Trecho de descrição do áudio no momento em que os estudantes operam sobre as 1ª, 2ª e 3ª linha da tarefa:

*E2: Vai dar 2 (apontando para a 1ª linha).*

*Anotação de T1: Como vocês pensaram?*

*E1: **Que seis dividido por 3 dá 2, por causa que esses peixes devem valer o mesmo tanto de reais (apontando para a 1ª linha)***

*Anotação de T1: Os estudantes conversaram entre eles.*

*E2: Agora a gente vai ter que fazer **12 menos 2 por causa que tem esse peixe diferente e fazer o que der dividido por 2**(apontando para a 2ª linha).**Então cada um desses dois custam 5 e esse outro vale 2.***

*T1: Por que você acha que esses dois custam 5?*

*E2: **Porque 10 dividido por 2 dá 5.***

*E1: E tem que fazer 12 menos 2 pra descobrir quanto que dá esses dois peixes juntos. Agora é 19 menos 5 para saber quanto que dá esses dois peixes (apontando para a 3ª linha). E agora é o **resultado dividido por 2...dá 7.***

Trecho de descrição do áudio nos momentos em que os estudantes operam sobre a 2ª linha e sobre a 3ª linha, respectivamente:

*E3: **6 e 6, 12... 14... calma aí...***

*E4: 2, 4 e seis...*

*E3: vai dar 10.*

*E4: **não vai dar, tem que ser mais do que 2, como 4.***

*[...] E4: Não, é 12.*

*E3: 12, 12... Como 12?*

*E4: **Aqui é 14, mais cinco.... deu 14, deu 14...***

*E3: **Se for 12 esses dois aqui vai dar 24...vai dar 26.***

*E4: Ah é, dá 24. Para dar 14 tem que ser ...é, está certo! ...Ah não, está não, é 7...7 e 7, 14, mais 5...*

*E3: 19! 14, 15, 16, 17, 18, 19... é está certo: 7 reais*

Trecho de descrição do áudio no momento em que os estudantes explicam como encontraram os valores dos peixes:

*E5: Cada peixinho desse custa 2 reais.*

*T3: E como vocês sabem que esses três custam o mesmo tanto?*

*E6: **Porque é 6 reais, daí eu pensei em dividir por 3, que dá 2.***

*T3: E esse daqui também dá pra dividir por 3? (apontando para a 2ª linha)*

*Provavelmente, as alunas mexeram a cabeça respondendo: não.*

*T3: Por que esse não dá?*

*E5: **Porque tem um peixe diferente.***



*T3: E aí então como que vocês fizeram para descobrir esse daqui? (apontando para a 2ª linha)*

*E5: Porque se esse era dois, faltava 10 então cada um... dividindo por 2, deu 5.*

*T3: E esse daqui, como vocês fizeram? (Apontando para o peixe diferente da 3ª linha).*

*E6: Nós descobrimos que esse daqui era cinco, daí para 19 faltava 14, daí dividindo 14 por 2 dá 7*

Os procedimentos, à luz das estratégias de cálculo segundo Lucangeli *et al* (2003), que foram possíveis de serem identificadas foram COF (contagem nos dedos), CON (contagem mental a partir de um algoritmo), DO (operação diferente) e AUTO (cálculo automático). Porém, considerando que os valores utilizados na tarefa proposta eram “pequenos”, e que para este trabalho aplicamos apenas essa única tarefa, não podemos afirmar que os alunos investigados não utilizam as demais estratégias apontadas pelos autores.

Na categoria COF, apesar do uso dos dedos no processo de contagem caracterizar um procedimento bastante elementar para estudantes de 5º ano, este representa uma maneira de se apoiar em um recurso externo para não se perder no cálculo mental. Sendo assim, a contagem utilizando os dedos representa uma estratégia pessoal que não pode ser desvalorizada pela escola, pois por meio dessa estratégia, o estudante consegue atribuir sentido para o conceito matemático com o qual está operando e, assim, podemos considerar este procedimento como uma representação para o objeto matemático.

Além disso, a utilização da contagem nos dedos, associados ao cálculo mental e ao cálculo escrito, mostram a capacidade do estudante em criar vários sentidos para um mesmo objeto matemático e, quando valorizados, evitam que o estudante identifique o objeto matemático com uma única representação, o que pode acarretar na confusão entre o que é o objeto e o que é sua representação, vendo-os como um só.

Na categoria CON, em que se enquadram os estudantes E3 e E4, temos um procedimento no qual os estudantes já são capazes de efetuar uma operação a partir de um valor, que geralmente é o maior dentre aqueles com os quais se opera, adiciona ou subtrai o outro valor, porém, para isso, não faz uso de recursos externos, ainda que seja possível observar movimentos corpóreos. Pelas falas de E3 e E4 que foram apresentadas, os estudantes efetuam adições se apoiando em um valor maior e somando unidade por unidade até chegar ao resultado, sem utilizar nesse processo, a contagem nos dedos.

Na categoria DO, os estudantes que aqui se enquadram (E1, E2, E3 e E4), manifestaram trocar operações visando facilitar seus cálculos. Por exemplo, em situações que poderiam utilizar a multiplicação, optaram por realizar a adição do número de peixes iguais (adição reiterada) que contém a linha ou coluna em que operavam, ou o processo inverso, utilizando a multiplicação quando poderiam recorrer à adição de parcelas iguais. Tais

transformações de uma para outra podem ser caracterizadas como *tratamentos* (DUVAL, 2003; 2009; 2012), uma vez que ocorrem dentro de um mesmo registro, que no caso, é o registro aritmético.

A seguir, apresentamos os possíveis tratamentos dos registros apresentados pelos estudantes E1 e E4:

<b>TRATAMENTO NO REGISTRO ARITMÉTICO</b>	
<p>“E1: 2 mais 2, 4, com mais 2, 6”</p>	<p>e “E4: Cada peixe eu acho que é 2 reais, por que daí dá 2, 4 e 6”</p>
<p>As representações em linguagem natural de E1 e E4 descritas acima poderiam ser escritas como:</p>	
<p>(I) <math>2 + 2 + 2 = 6</math> o que pode ser generalizada para (II) <math>2 \cdot 3 = 6</math></p>	
<p>Ainda, em (I) temos: <math>(2+2) + 2 = 6</math> (processo utilizado por E1 e por E4), que representa a propriedade associativa da adição.</p>	

**Quadro 2** – Tratamento entre registros aritméticos  
Fonte: Das autoras.

Por meio do procedimento utilizado por esses estudantes, bem como pelas justificativas fornecidas por eles para realização dessas operações para descobrir o valor de cada peixe da 1ª linha, pudemos inferir que a possibilidade de evidenciar indícios de pensamento algébrico, uma vez que podemos entender o valor *dois* de um dos peixes como uma quase-variável (FUJII; STEPHENS, 2001), conforme mostra a figura 3. Tal inferência realizamos considerando que em diversos momentos os alunos recorreram à adição quando poderiam utilizar a multiplicação ou, de maneira contrária, recorreram à multiplicação quando poderiam utilizar a adição, o que nos leva a concluir que os mesmos reconhecem as relações entre ambas as operações aritméticas.

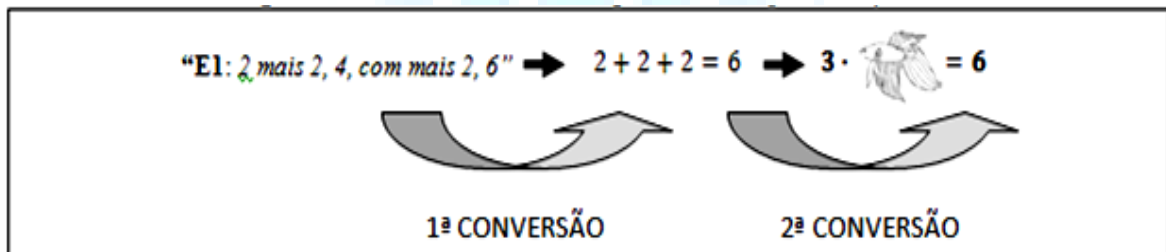
Além disso, por meio do mesmo procedimento podemos inferir indícios de apropriação, ainda que inconsciente, de propriedades de operações (no caso, associatividade da adição) que puderam ser evidenciadas em diversos momentos, o que nos levou a considerar a generalização dessas propriedades, caracterizando, assim, o que Kaput e Blanton (2001) chamam de aritmética generalizada.

Ainda, defendemos a manifestação de indícios de pensamento algébrico ao considerarmos a generalização de propriedades de operações, uma vez que Pimentel e Vale (2009) defendem que quando estas são generalizáveis, então as ideias aritméticas possuem um caráter potencialmente algébrico.

Com relação a essa manifestação de propriedades de operações, recorrendo ao que expusemos sobre o que menciona Parra (1996) sobre o cálculo mental, modalidade de cálculo que incluímos e destacamos dentre procedimentos de cálculos aritméticos, inferimos a existência de inerências entre este tipo de cálculo e o desenvolvimento do pensamento algébrico, uma vez que os procedimentos de cálculo se apoiam nas propriedades de operações, que inferimos que, quando generalizadas, são essenciais para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

A partir do que foi manifestado pelos estudantes é possível, ainda, realizar a *conversão* (DUVAL, 2003; 2009; 2012) entre os registros, ou seja, transformar uma representação em certo registro em uma representação em registro diferente, mas que representam o mesmo objeto matemático.

A seguir, apresentamos a conversão entre registros de representação semiótica:



**Figura 3** – Conversão entre Registros de Representação Semiótica  
Fonte: Das autoras.

Na Figura 3 apresentamos as conversões a partir da linguagem natural e do procedimento de cálculo manifestado por E1, que poderia servir como base para fomentar o desenvolvimento do pensamento algébrico, em um nível mais complexo, envolvendo simbolismo. Destacamos que a figura 3 foi elaborada pelos pesquisadores a partir da linguagem natural oral de E1, ilustrando que o cálculo mental realizado pelo aluno pode ser entendido como a expressão aritmética destacada na 1ª conversão, a qual pode ser entendida, ainda, tal como expresso na 2ª conversão, uma vez que em diversas passagens da transcrição de E1 pudemos evidenciar o reconhecimento de relações entre as operações de adição e multiplicação.

As 1ª e 2ª conversões que apresentamos correspondem, respectivamente, à representação em linguagem natural para a representação aritmética e à representação aritmética para a representação algébrica, sendo que nesta última, o desenho do peixe representa a incógnita da situação-problema que, posteriormente, poderia ser substituída por uma letra, como o  $x$  e, portanto, esta é uma representação expressa em linguagem algébrica simbólica.

Por fim, na categoria AUTO, todos os estudantes participantes da investigação realizada manifestaram um cálculo efetuado de maneira rápida por recuperarem na memória resultados simples. Apesar de muitas vezes ser mencionada a palavra “divisão” compreendemos que as falas dos estudantes se enquadravam nessa categoria ao invés da categoria MA, na qual o estudante estrutura mentalmente o algoritmo tal como no cálculo escrito, pela rapidez com que o resultado era enunciado, bem como pelo fato dos números utilizados nas operações serem pequenos, além de, por se tratar de um 5º ano, já terem, provavelmente, realizado diversas operações envolvendo esses mesmos valores, o que torna fácil a memorização desses resultados.

Vale ressaltar que mesmo possuindo material e espaço suficientes para realizar cálculo escrito, nenhum dos seis estudantes fez uso desse tipo de cálculo.

Algo que nos chamou a atenção durante a aplicação da tarefa foi o fato de todos se atentarem, inicialmente, apenas com as linhas. Ao término da tarefa, ou seja, após descobrirem os valores de cada peixe, apenas os estudantes E3 e E4 se preocuparam com as colunas, enquanto os outros estudantes observaram as colunas e conferiram os resultados encontrados apenas após as testemunhas os questionarem sobre essas colunas e os valores fornecidos em cada uma delas.

Ao término, foi fornecido lápis de cor para que os estudantes colorissem suas tarefas e, nesse momento, outro ponto nos chamou a atenção: todos os estudantes pintaram os desenhos iguais da mesma cor, pressupondo que reconhecem que desenhos iguais representam mesmos valores.



**Figura 4** – Pintura da tarefa de um dos estudantes

Fonte: Das autoras.

Trecho de descrição do áudio no momento em que um estudante justifica sua pintura:

**T2:** *Por que você está pintando esses peixes da mesma cor?*

**E4:** *Por que são iguais*

Assim, mais uma vez que por meio dos discursos durante o desenvolvimento da tarefa e, agora, considerando do mesmo modo as pinturas da tarefa realizadas pelos estudantes, pudemos inferir que houve manifestação de indícios pensamento algébrico.

### Considerações finais

Partindo do pressuposto de que a aritmética possui um caráter potencialmente algébrico, uma vez que propriedades e relações de números e de operações podem ser generalizáveis, bem como considerando que tais relações e propriedades constituem as bases para os procedimentos de cálculo, sobretudo, o mental, nos propusemos a *investigar e analisar, em procedimentos de cálculos aritméticos, indícios de pensamento algébrico que são manifestados oralmente por estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental ao se envolverem com uma tarefa potencialmente algébrica.*

Tendo em vista cumprir com esse objetivo, propusemos uma tarefa que consideramos como potencialmente algébrica a seis estudantes do 5º ano de uma escola pública do município de Apucarana-PR, sendo esses dispostos em díades, permitindo, desse modo, a evidenciação de indícios que ansiamos investigar por meio da linguagem natural manifestada oralmente entre eles. Defendemos que isso foi possível uma vez que nos apoiamos em Duval (2009) no que diz respeito à linguagem natural ser uma representação semiótica externa, que possibilita a exteriorização de indícios de representações mentais.

Analisando as produções escritas, as gravações de voz e as anotações em diário de campo de cada testemunha que acompanhou cada díade de estudantes, percebemos, de maneira geral, que diante da tarefa proposta todos os estudantes preferiram utilizar o cálculo mental em detrimento do cálculo escrito. Acreditamos que o fato da tarefa proposta ter sido realizada em díades facilitou essa preferência, uma vez que ao se comunicarem sobre a tarefa ficava evidente o que deveriam fazer para encontrar os resultados almejados e, considerando os valores pequenos, os cálculos poderiam ser realizados mentalmente sem grandes dificuldades.

Durante a realização da tarefa, alguns procedimentos de cálculos aritméticos puderam ser observados. Estes procedimentos caracterizam estratégias próprias que os estudantes

utilizam não apenas para facilitar a evocação do resultado que precisam, mas para determinar os caminhos que deveriam tomar para se chegar a esses resultados.

Todavia, o que mais nos chama a atenção durante a realização da tarefa, e que foi possível identificar por meio das conversas entre as díades, foi o reconhecimento rápido de padrões na tarefa proposta, uma vez que estes estudantes não estão habituados a este tipo de tarefa. Esses padrões, por exemplo, ficam claros na pintura da tarefa realizada por cada estudante, em que todos eles pintaram os peixes iguais da mesma cor, reconhecendo que peixes iguais possuem valores iguais.

Outro fato que destacamos foi a manifestação de propriedades de operações (associatividade, comutatividade, etc.) ainda que estes estudantes não tivessem conhecimento formal (a partir da sala de aula) sobre estas propriedades (informações essas fornecidas pela professora dos alunos participantes da pesquisa). E, tais manifestações ocorreram em diversos momentos durante envolvimento com a tarefa, o que nos levou a considerar a generalização dessas propriedades de operações.

Assim sendo, considerando os resultados das análises bem como os estudos teóricos realizados sobre as relações entre aritmética e pensamento algébrico, inferimos que os procedimentos de cálculos aritméticos, tal como os consideramos nessa pesquisa, e o pensamento algébrico estão estritamente ligados: a descoberta e a generalização de padrões colaboram para o desenvolvimento de procedimentos de cálculos aritméticos, uma vez que conduzem à compreensão das estruturas numéricas e das relações e propriedades de números e operações. Todo esse processo traz possibilidades de contribuições iniciais para a promoção e a evolução do pensamento algébrico dos estudantes desde os anos iniciais de escolaridade.

Outro ponto evidenciado na presente pesquisa e que vale ressaltar é a linguagem oral para descrever os procedimentos e as escolhas para resolver a tarefa proposta. A linguagem natural oral, além de permitir ao professor o acesso às imagens mentais dos estudantes durante a realização de alguma tarefa matemática, permite que o estudante reflita sobre as relações existentes na situação-problema e sobre as respostas que encontrou.

## Referências

BOULAY, S.; LE BIHAN, M.; VIOLAS, S. Le calcula mental. **Mathémaques**, 2004.  
Disponível em <[http://jclebreton.ouvaton.org/IMG/doc/Le\\_calcul\\_mental.doc](http://jclebreton.ouvaton.org/IMG/doc/Le_calcul_mental.doc)> Acesso em 10 dez. 2013.



CARRAHER, T. N.; SCHLIEMANN, A.; CARRAHER, D. W. **Na vida dez, na escola zero**. 10. ed. São Paulo: Cortez, 1995.

CORREA, J. A resolução oral de tarefas de divisão por crianças. **Estudos de Psicologia Natal**, v.9, n.1, p. 145-155, 2004.

CULLEN, C.; GAYMORE, J. Ocean quest. **Teaching Children Mathematics**. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, v. 14, n. 6, p. 344-351, 2008.

DUVAL, R. Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: MACHADO, Silvia D. A. **Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica**. Campinas: Editora Papirus, 2003, p.11-34.

DUVAL, R. **Semiósis e pensamento humano: registros semióticos e aprendizagens intelectuais**. 1. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Tradução: Moretti, M. T. **Revemat**, v.7, n.2, p. 266-297, 2012.

FUJII, T.; STEPHENS, M. Using Number Sentences to Introduce the Idea of Variable. In: GREENES, C.; RUBENSTEIN, R. (Eds.). **Algebra and Algebraic Thinking in School Mathematics – Seventieth Yearbook**. Reston: NCTM, 2008, p. 127-140.

KAPUT, J.; BLANTON, M. Algebrafying the Elementary Mathematics Experience. Part I: Transforming Task Structure. **Proceedings of the ICMI-Algebra Conference**. Melbourne, Austrália.

Disponível em:

<<http://www.scps.k12.fl.us/scctm/TextFiles/Educational%20Articles/Algebrafying%20elementary%20mathematicsPart%20I.pdf>> Acesso em 10 dez. 2013.

MESTRE, C.; OLIVEIRA, H. A mobilização da capacidade de generalização através da exploração de estratégias de cálculo: um estudo com alunos do 4º ano. **Revista Interações**, Lisboa, n. 20, p. 9-36, 2012.

MORAES, R. Uma tempestade de luz: a compreensão possibilitada pela análise textual discursiva. **Ciência & Educação**, Bauru, v. 9, n. 2, p. 191-211, 2003.

LUCANGELI *et al.* Effective strategies for mental and written arithmetic calculation from the third to the fifth grade. **Educational Psychology**, v. 23, n. 5, p. 507-520, 2003.

PARRA, C. Cálculo mental na escola primária. In: PARRA, C.; SAIZ, I. (org.) **Didática da matemática: reflexões psicopedagógicas**. Porto Alegre: Artmed, 1996.

PIMENTEL, T.; VALE, I. A descoberta de padrões no desenvolvimento do cálculo mental: uma experiência com professores do 1º ciclo. In: ENCONTRO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 19, 2009, Vila Real. **Anais...** Vila Real, 2009.

RUSSELL, S. J.; SCHIFFER, D.; BASTABLE, V. Developing algebraic thinking in the context of arithmetic. In: CAI, J.; KNUTH E. (Eds.). **Early algebraization: a global dialogue from multiple perspectives**. New York, NY: Springer, 2011, p. 43–69.

USISKIN, Z. Doing Algebra in Grades K-4. In: MOSES, B. (Ed.), **Algebraic thinking, grades K-12: Readings from NCTM's School-Based Journals and Other Publications**. Reston: NCTM, 2000, p. 5-6.

**Submetido em abril de 2015**

**Aprovado em setembro de 2015**



PERSPECTIVAS DA  
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA