REVISTA DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL (UFMS)

Volume 12, número 30 – 2019

ISSN 2359-2842

Conceitos e Ideias Envolvidas no Desenvolvimento do Teorema Fundamental do Cálculo

Concepts and Ideas Involved in the Development of the Fundamental Theorem of Calculus

André Lúcio Grande[1]

Benedito Antonio da Silva[2]

RESUMO

Neste trabalho são apresentados os principais conceitos relacionados à gênese do Teorema Fundamental do Cálculo (TFC) desde os seus primórdios com os trabalhos de Arquimedes até a formalização dada por Cauchy, com destaque à inter-relação entre a integral e a derivada de uma função, ideia central do teorema. Os dados aqui apresentados fazem parte dos resultados de pesquisa da tese de doutorado, que apresentou um estudo epistemológico do referido teorema voltado ao seu ensino. Utilizando-se de alguns episódios ligados ao contexto histórico dos problemas de quadratura e traçado de tangentes, procurou-se analisar algumas questões sobre o ensino e aprendizagem do TFC e dos conceitos a ele relacionados, como o de acumulação e o de variação, por exemplo. O embasamento teórico pauta-se por ideias ligadas ao uso da intuição e do rigor inerentes a uma atividade matemática, sob o ponto de vista do filósofo e matemático Henri Poincaré.
PALAVRAS-CHAVE: Teorema Fundamental do Cálculo, Intuição, Rigor, Contexto Histórico.

ABSTRACT

In this paper, are presented the main concepts related to the genesis of theFundamental Theorem of Calculus (TFC) from its beginnings with the Archimedes jobs until the formalization given by Cauchy, with emphasis on the interrelation between the integral and the derivative of a function, central idea of the theorem. The data presented here are part of the research results of the doctoral thesis, which showed an epistemological study of that theorem returned to his teaching. Using a few episodes linked to the historical context of quadrature problems and stroke tangents, tried to analyze some questions about the teaching and learning of TFC and concepts to it related, such as accumulation and variation, for example. The theoretical foundation is guided by ideas related to the use of intuition and rigor inherent in a mathematical activity, from the point of view of the philosopher and mathematician Henri Poincaré.
KEYWORDS: Fundamental Theorem of Calculus, Intuition, Rigor, Historical Context.

---

[1] Faculdade de Tecnologia de Mauá – Brasil. andreluciogrande@gmail.com

[2] Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – Brasil. benedito@pucsp.br

Introdução

As dificuldades apresentadas por alunos ingressantes na universidade nos cursos de exatas, na disciplina de Cálculo têm sido, nas últimas décadas, motivo de estudos investigativos realizados no âmbito da Educação Matemática. A Comissão Internacional de Instrução Matemática (ICMI) criou na década de 1990, a Conferência Internacional do Ensino de Matemática no nível superior (ICMT), que encoraja a comunicação entre matemáticos e educadores matemáticos e promove fóruns entre diferentes culturas. Esse fato é um indicativo de que a comunidade está atenta às questões que envolvem o processo do ensino da Matemática e, em particular, do Cálculo.

São variadas e diferentes as dimensões do ensino e da aprendizagem dessa disciplina. As dificuldades vividas pelos alunos passam pela mudança brusca da Educação Básica para a Universidade, pelas expectativas dos estudantes e professores envolvidos no processo, pelos obstáculos inerentes aos conteúdos estudados etc., dificuldades estas que constituem um inesgotável manancial de questões a serem investigadas.

Neste artigo, discorremos sobre a componente relativa às dificuldades representadas pelo ensino e aprendizagem do Teorema Fundamental do Cálculo (TFC), sendo um extrato de alguns resultados da nossa tese de doutorado que objetivou realizar um estudo didático e epistemológico sobre o TFC, em que se elaborou uma proposta didática de uma sequência de ensino do teorema, baseada em possíveis situações-problema que auxiliassem na compreensão da relação entre integração e derivação, buscando emergir tal conexão.

A epistemologia histórica traz à luz obstáculos e paradoxos que acompanharam a gênese dos conceitos da Matemática. Esse fenômeno, por si só, já aponta para o fato de que o ensino talvez possa se tornar mais eficaz se não for desvinculado da evolução histórica. Além disso, aponta para a necessidade de investigações e estudos a fim de melhor se conhecer esta importante componente do ensino e da aprendizagem (SILVA, 2011).

O Cálculo Diferencial e Integral (CDI) apresenta muitos conceitos e elementos que ao longo de sua gênese se desenvolveram de maneira intuitiva com a formulação de conjecturas, hipóteses, métodos e técnicas de resolução de problemas, baseando-se na ideia dos indivisíveis ou quantidades infinitamente pequenas utilizadas por Newton e Leibniz e que posteriormente foram fundamentados por meio da noção de limite, que se tornou um tema central no estudo do CDI a partir do século XVIII.

Além da noção de limite, o objeto matemático que permeia o desenvolvimento dos mais variados elementos do Cálculo é o conceito de função, sendo que este termo foi utilizado pela primeira vez por Leibniz no século XVII. Ao estudarmos sequências, continuidade, operações como derivação e integração, nos deparamos com questões que abrangem de maneira implícita ou explícita essa noção. Todavia os problemas considerados primordiais para o desenvolvimento histórico dos conceitos do CDI surgiram muitos séculos antes e dizem respeito ao cálculo de áreas e o traçado de tangentes em um determinado ponto de uma curva.

O problema do cálculo de áreas, elaborado por Anaxágoras, surgiu no século V a. C. e propunha a construção de um quadrado com área exatamente igual à de um círculo de raio dado. Por seu turno, nos séculos II e III a. C. Arquimedes e Apolônio trabalharam na resolução do problema da tangente, que diz respeito ao traçado da reta tangente a uma curva em um ponto. A dificuldade da obtenção da reta que passa pelo ponto de tangência reside no fato de se descobrir sua inclinação, uma vez que por um ponto é possível traçar infinitas retas. Posteriormente a questão do traçado da reta tangente passou a apresentar o seguinte enfoque: dentre todas elas, qual será a que mais se aproxima da curva nas vizinhanças do ponto específico?

Esses dois problemas (quadratura e tangente), aparentemente não relacionados originaram, respectivamente, dois conceitos essenciais no estudo do CDI: a integral e a derivada, sendo que o teorema que estabelece a relação entre tais conceitos é denominado hoje Teorema Fundamental do Cálculo (TFC). Esse teorema relaciona a integração e a derivação como operações inversas uma da outra e permite concluir que os problemas de áreas de regiões planas limitadas pelo gráfico de uma função em um intervalo e o problema da determinação da inclinação da reta tangente em um ponto desse gráfico podem ser resolvidos conjuntamente: solucionado um deles, o outro também fica resolvido.

A relação existente entre as operações de integração e derivação, estabelecida pelo teorema, pode ser entendida da seguinte maneira: dada uma função contínua f definida num intervalo $[a, b]$, pode-se determinar uma função F definida no mesmo intervalo pela expressão $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, com $x \in [a, b]$, que é derivável e $F'(x) = f(x)$.

Entretanto, de um modo geral para os estudantes de Cálculo, a relação entre as operações de integração e derivação passa despercebida. Isso é evidenciado em pesquisas na área de Educação Matemática voltada ao Ensino Superior, em que se observa a incompreensão por parte de alunos desse teorema, com o indício da pouca exploração desses elementos por parte dos professores. Esse fato é enfatizado na pesquisa de Segadas Vianna (1998), que investigou a compreensão dos alunos sobre o TFC, com o objetivo de procurar identificar as dificuldades que eles manifestaram no tocante aos conceitos envolvidos no teorema, como continuidade de uma função, que interferem segundo a autora em sua compreensão de maneira explícita ou implícita.

Motivados por essas questões, realizamos em nossa pesquisa de tese um estudo epistemológico do TFC voltado ao ensino e aprendizagem dele. A proposta foi desenvolver uma sequência de ensino com o intuito de explorar situações-problema que auxiliassem na compreensão da relação existente entre as operações de integração e derivação, que constitui a essência do teorema. Tal intervenção de ensino privilegiou, por meio da resolução de algumas questões propostas, a exploração de aspectos ligados ao raciocínio intuitivo dos estudantes, como a elaboração de conjecturas, hipóteses e analogias.

Na sequência de ensino desenvolvida, descreveu-se e analisou-se dentre outros elementos o contexto histórico ligado à gênese do TFC. De um modo geral, o contexto histórico em que os conceitos matemáticos se desenvolveram possibilita formular conjecturas acerca do objeto de estudo, utilizar dados relacionados ao aparecimento e à formação das noções. O papel da evolução histórica na compreensão da invenção e descoberta dos conceitos para o ensino e aprendizagem é explicitado na afirmação de Ávila:

> Muitas teorias matemáticas são de difícil compreensão, no seu porquê, quando vistas isoladamente ou separadas do contexto histórico em que se desenvolveram. Cremos que o estudo da Matemática, auxiliado pelo acompanhamento de sua evolução histórica, de seu papel num contexto científico mais amplo, e do fascinante jogo de ideias no cenário da invenção e descoberta, é estimulante e enriquecedor à formulação do aluno, sobretudo de sua capacidade de apreciação crítica da disciplina (ÁVILA, 1999, prefácio do autor).

Destacamos que o estudo do contexto histórico se tornou um elemento chave na elaboração da intervenção de ensino por dois aspectos: de um lado, possibilitou entender a evolução das ideias, dos acertos e erros cometidos durante séculos até convergir na formulação do teorema como é conhecido atualmente, e que por outro, evidenciou-se quantos aspectos da intuição e do rigor estiveram presentes nesse processo.

Neste artigo apresentamos e analisamos alguns elementos e episódios do contexto histórico ligados à gênese e ao desenvolvimento do TFC presentes nos diferentes períodos que serão destacados. Procuramos descrever quais foram as principais ideias, conceitos, conjecturas, hipóteses e analogias elaboradas por meio do raciocínio intuitivo que se tornaram decisivas na compreensão da relação existente entre as operações de integração e derivação, bem como discutir suas possíveis implicações para o ensino e aprendizagem do Cálculo. Para tanto, buscamos embasamento teórico nos princípios relacionados à intuição e ao rigor na construção do conhecimento científico, na visão do filósofo e matemático Henri Poincaré (1854 – 1912).

Tipos de Intuição

Apesar de diversas concepções, pontos de vista e interpretações, o uso da intuição, imaginação, raciocínio dedutivo e visualização geométrica no processo de ensino e aprendizagem da matemática vêm sendo defendido e estudado por muitos pesquisadores.

Para Poincaré a intuição é uma ideia ou interpretação antecipada daquilo que se está procurando, constituindo-se de um sentimento que possibilita gerar hipóteses na constituição do conhecimento. O autor faz críticas à ciência concebida como absoluta e inquestionável, e discute a importância da intuição e da lógica nesse processo de construção do conhecimento matemático, apresentando em suas principais obras, como *A Ciência e a Hipótese*, *O Valor da Ciência* e *Ciência e Método* alguns temas que discutem o papel da intuição, da lógica e da hipótese na construção do conhecimento científico.

Poincaré considerava a Matemática como uma construção mental em que os objetos são elaborados; o homem tem uma intuição particular que lhe permite construções mentais a partir de uma percepção imediata, uma intuição, sendo que há uma participação do sujeito na construção do conhecimento. No tocante às características do raciocínio intuitivo, Poincaré classifica a intuição basicamente em dois tipos: a *sensível* ou *geométrica* e a intuição ao *número puro*.

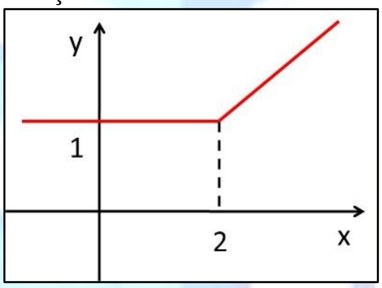
A intuição sensível ou geométrica está ligada ao apelo aos sentidos e à imaginação e ao uso de representações geométricas, por exemplo. Esse tipo de intuição, segundo o autor, não pode nos dar a certeza, entretanto ela possui a propriedade de instrumento da invenção do conhecimento matemático. Para Poincaré, a intuição não se baseia apenas na imagem geométrica, mas também física. A analogia física, segundo o autor, permite obter a solução que um matemático não poderia estabelecer pelo raciocínio dedutivo na busca de uma solução. A intuição física, portanto, não pressente a solução, mas sugere o raciocínio necessário para encontrá-la.

Já para a intuição ao número puro, que pode ser a geradora do verdadeiro raciocínio matemático, o número é desprovido de qualquer característica geométrica, de onde se origina a generalização por indução e pode-se encontrar de forma explícita nas ciências experimentais. Esse tipo de intuição apresenta a propriedade de invenção em menor grau, sendo o instrumento da lógica formal, da demonstração.

O cuidado, segundo o autor, que se deve tomar reside no fato de que o uso da intuição pode trazer resultados inesperados, pois algumas afirmações podem ser consideradas verdadeiras por uma simples ideia ou esquema mental criado na tentativa de provar tal afirmação e que nem sempre condizem com a demonstração. Isso acaba criando um conflito cognitivo com aquilo que se acredita intuitivamente por meio de representações geométricas, ou o apelo aos sentidos e a sua demonstração formal.

O autor comenta sobre as funções contínuas desprovidas de derivada. Pela intuição, toda função contínua tem derivada, pois seu gráfico tem tangente em todos os pontos. No entanto a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} 1, & se\ x < 2 \\ x, & se\ x \geq 2 \end{cases}$ cuja representação gráfica é apresentada a seguir, é um exemplo de que esse tipo de intuição pode levar a falsas conclusões:

Figura 1 - Função contínua sem derivada em um ponto



Fonte: Grande, 2013, p. 89

Essa função é contínua em todos os pontos do seu domínio, entretanto no ponto $x = 2$ não é derivável. A intuição, nesse caso, de uma imagem da função contínua ser derivável em todos os pontos do seu domínio pode levar a erro, como evidencia a visão geométrica, que explicita um 'bico' no ponto do gráfico correspondente a x = 2.

A História da Matemática apresenta inúmeros exemplos da falibilidade da intuição. Na Grécia antiga, a crise dos incomensuráveis fornece outro contundente exemplo: pela intuição poder-se-ia imaginar que duas grandezas sempre seriam comensuráveis. Para ilustrar essa afirmação, consideremos dois segmentos A e B; intuitivamente parece ser possível encontrar sempre um segmento menor σ, tal que $A = \sigma m$ e $B = \sigma n$, pois, se o σ escolhido não satisfizesse a questão, nada impediria ir escolhendo σ cada vez menor até encontrar aquele que satisfizesse a condição acima, garantindo a comensurabilidade de A e B. Entretanto, demonstrou-se que nem sempre isso é possível, pois existem segmentos que não admitem um submúltiplo comum, ou seja, existem grandezas que são incomensuráveis, como é o caso do comprimento do lado e a da diagonal de um quadrado. Este, aliás, parece ser ter sido o caminho da descoberta pelos pitagóricos da existência de grandezas incomensuráveis.

Poincaré (1995) considerava a intuição como papel central na questão da criatividade e da invenção. Para ele, a intuição é uma faculdade do espírito, cuja função é essencialmente heurística e é pela intuição que se descobre e se inventa, mas é pela lógica que se justifica ou que se demonstra.

Além do papel da intuição e do rigor, o autor destaca ainda a importância do estudo do contexto histórico no desenvolvimento dos conceitos matemáticos, procurando compreender suas origens e os obstáculos inerentes à sua compreensão. Para abarcarmos uma teoria, segundo o autor, é preciso observar as razões que levaram os cientistas e pesquisadores a escolher determinados caminhos nas tentativas de resolução de problemas assim como perceber o modo como superaram os obstáculos encontrados, tudo isso associado à questão das origens históricas de determinado conhecimento e sob quais condições os conceitos matemáticos surgiram e se desenvolveram.

Procurando salientar a importância e o papel da intuição e da lógica na construção do TFC e suas possíveis implicações para o ensino e aprendizagem do Cálculo, vamos nos utilizar de alguns episódios ligados ao contexto histórico que resultaram no desenvolvimento do referido teorema.

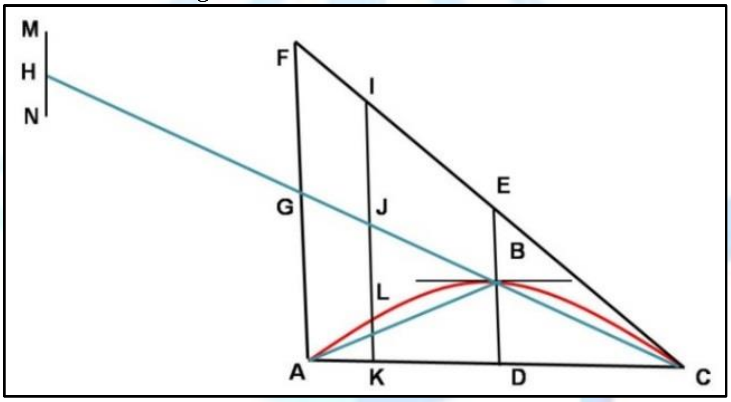
Conceitos Envolvidos no TFC

Descreveremos e analisaremos importantes contribuições de alguns cientistas que desempenharam um papel decisivo para a constituição do teorema e a compreensão da inter-relação existente entre os problemas de quadratura e traçado de tangentes, que culminaram séculos depois com o estabelecimento do TFC.

No cálculo de áreas e volumes destacam-se os trabalhos de Arquimedes, elaborados aproximadamente no século II a. C. em que o mesmo, por meio de uma intuição geométrica aliada à analogia com objetos físicos como alavancas, por exemplo, e posteriormente demonstradas rigorosamente pela dupla redução ao absurdo, resolveu o problema da quadratura da parábola e do volume do cilindro, do cone e da esfera.

Utilizando-se do denominado Método Mecânico, por ele criado, Arquimedes considerou uma figura plana como sendo constituído por infinitos segmentos de retas indivisíveis e um sólido constituído por infinitas camadas ou seções transversais. Imaginou que esses elementos poderiam ser colocados numa das extremidades de uma alavanca e na outra, o objeto cuja área ou volume se desejava calcular, até atingir o equilíbrio; então utilizando-se de algumas propriedades geométricas de figuras como parábola e triângulo bem como de sólidos como cilindro, cone e esfera, conseguiu encontrar uma relação entre a área do segmento de parábola e um triângulo assim como a relação entre o volume do cilindro com o cone e a esfera.

Figura 2 –Método Mecânico – Área



Fonte: Grande, 2013, p.120

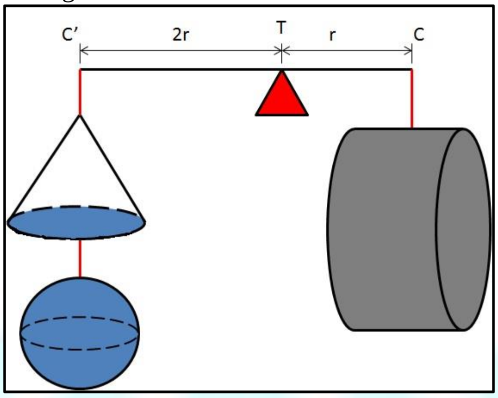
Na figura 2, por meio de propriedades geométricas do segmento parabólico e do triângulo inscrito ABC, Arquimedes utiliza-se da intuição geométrica para concluir o raciocínio de sua descoberta que consiste na seguinte situação: variando o ponto *L* ao longo do arco da parábola *ALBC*, obtém-se o triângulo *AFC* como união de todos os segmentos do tipo *KI* e o segmento de parábola como união de todos os segmentos do tipo *KL*. O triângulo ABC (reunião dos infinitos segmentos KI) se equilibrará onde ele se encontra com o centroide X e o segmento de parábola ABC.

Assim, Arquimedes, partindo do resultado encontrado pelo método mecânico, concluiu que a área do segmento parabólico é igual a quatro terços do triângulo com a mesma base e igual altura.

No caso do volume dos sólidos, novamente, Arquimedes utiliza-se da intuição, considerando o cilindro, o cone e a esfera como união infinita de círculos para deduzir que o cone e a esfera equilibrarão o cilindro.

Com isso, intuiu que o cilindro se equilibrará no ponto T a uma distância igual a CT = r do apoio em T, enquanto o cone e a esfera do outro lado se equilibrarão no ponto C´ a uma distância igual a 2r do fulcro.

Figura 3 –Método Mecânico – Volume



Fonte: Grande, 2013, p.125

Por esse método, concluiu que o volume de qualquer esfera é quatro vezes o do cone com base igual a um grande círculo da esfera e altura igual ao raio da mesma esfera e que o volume do cilindro com base igual a um grande círculo da esfera e altura igual ao diâmetro é $1\frac{1}{2}$ vezes o volume da esfera.

No entanto, o próprio Arquimedes explicita em carta a Eratóstenes que as descobertas feitas por meio do Método Mecânico estavam longe de poderem ser consideradas verdadeiras. Para isso, deveriam ser provadas matematicamente, porém quando uma relação é conhecida antecipadamente, a dupla redução ao absurdo é um instrumento eficaz para a demonstração de sua veracidade.

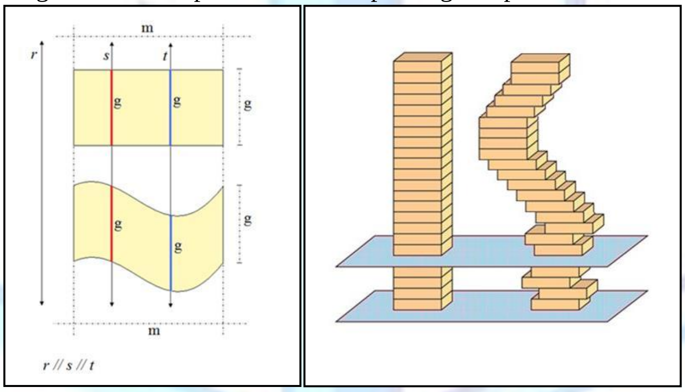
Esses cuidados expressos por Arquimedes revelam dois importantes aspectos: de um lado a questão do rigor dominante no pensamento grego da época e por outro, o feliz casamento da intuição favorecida pelo método mecânico com a lógica, que sempre acompanharam a gênese da Matemática.

No Método Mecânico observa-se fortemente o apelo aos sentidos, à imaginação e a analogia com objetos físicos (alavancas, equilíbrio estático) que segundo Poincaré constitui-se num instrumento valioso no processo de criação do conhecimento matemático. Por meio dele Arquimedes intuía algumas igualdades que mais tarde seriam demonstradas, pela dupla redução ao absurdo. Enquanto que tal método que possibilitava o uso da intuição geométrica, pode ser considerado um instrumento de invenção, a lógica e o rigor empregados na demonstração não permite novas descobertas, pois sua utilização obriga que se conheça previamente o resultado que se deseja demonstrar. Reafirmamos que esse procedimento está de acordo com a afirmação de Poincaré de que intuição se torna um elemento imprescindível no aspecto da invenção matemática enquanto que a lógica está relacionada com o processo de demonstração.

Pode-se considerar, em grande medida, que os resultados obtidos por Arquimedes de maneira intuitiva e posteriormente demonstrados rigorosamente constituem-se nos primeiros resultados significativos na resolução do problema de quadratura.

Séculos mais tarde, tendo acesso aos trabalhos de Arquimedes, Cavalieri, aperfeiçoando e adaptando certas ideias neles contidas, elaborou um método para o cálculo de áreas e volumes, conhecido como Princípio de Cavalieri. Por este princípio uma figura ou porção plana é também formada de uma infinidade de cordas paralelas e que um sólido seria constituído por uma infinidade de secções planas paralelas. Segundo ele, ao se fazer deslizar cada um dos elementos do conjunto de cordas paralelas, de modo que as suas extremidades ainda descrevam um contorno contínuo, a área da nova porção plana é igual à do original, uma vez que ambas são formadas das mesmas cordas. Procedimento análogo pode ser utilizado para um sólido, em que o conjunto de suas secções planas paralelas formará outro sólido e cujo volume poderia ser calculado a partir do volume de um sólido conhecido.

Figura 4 – Princípio de Cavalieri para figuras planas e sólidos



Fonte: Weigel, 2016

Cavalieri adaptou os fundamentos do Método Mecânico, criando uma abordagem predominantemente geométrica e intuitiva, porém não apresentando preocupações rigorosas do pensamento grego como fez Arquimedes, que após descobertas de certas igualdades, exigia a demonstração delas utilizando-se do recurso da dupla redução ao absurdo.

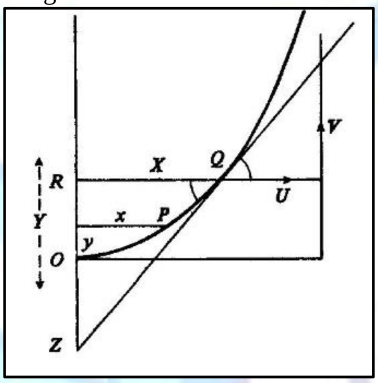
Séculos mais tarde, destacam-se outras importantes contribuições para o encaminhamento da resolução dos problemas de quadratura e traçado de tangentes bem com a descoberta da relação inversa e recíproca entre esses problemas. A maneira como inicialmente

Torricelli, e posteriormente Isaac Barrow e Newton abordaram esses problemas, foi dando-lhes uma interpretação física.

Torricelli aliou a intuição geométrica aos conceitos da Física, considerando uma curva como a trajetória do movimento contínuo de um móvel, e a partir daí passou a calcular a sua velocidade comparando-a com a inclinação da reta tangente num determinado ponto da trajetória e o espaço total percorrido correspondendo à área "varrida" pela trajetória desse ponto no intervalo considerado.

Utilizando a representação dada a seguir ilustramos o procedimento. O autor considerou um ponto movendo-se ao longo de uma curva OPQ com duas componentes de velocidade: uma horizontal e uma vertical e supôs que a velocidade horizontal fosse uniforme de tal modo que a distância horizontal pudesse ser considerada "como uma medida de tempo", isto é, x = t, u = 1(onde x é a distância horizontal percorrida no tempo *t*, e *u* a velocidade uniforme horizontal) e que a velocidade vertical no tempo *t*, denotada por *v*, onde $v = kt^n = kx^n$.

Figura 5 – Método de Torricelli



Fonte: Baron e Bos, 1985

Se depois de um tempo T o ponto alcance $Q(X,Y)$ com velocidade horizontal e vertical U *e* V, respectivamente. Como *U=u=1*, $V = kt^n$, a construção da tangente será feita por $V/U = V = kT^n = ZR/X$. Mas *X=T*, $Y = \sum kt^n = VT/(n+1) = \frac{kT^{n+1}}{n+1}$, logo $Y = \frac{kx^{n+1}}{n+1}$.

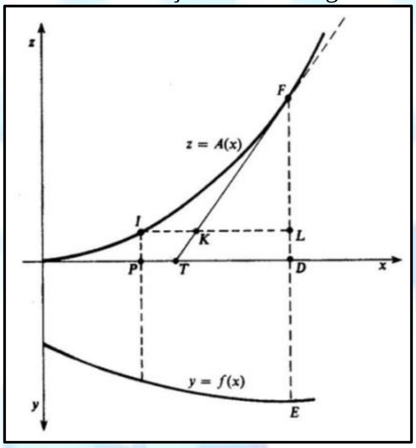
Torricelli com isso conseguiu, a partir do traçado da tangente, encontrar um resultado para a quadratura da curva, pois, ao descobrir o modo de obter a velocidade do ponto movendo-se ao longo da curva citada, ele achou a distância total percorrida. Esse caminho utilizado por ele, com analogias e uso da intuição por meio do mundo físico, constitui-se um ponto destacado por Poincaré no processo de invenção e descoberta matemática.

O matemático inglês Isaac Barrow, de maneira semelhante àquela empregada por Torricelli, utilizou-se da intuição geométrica e mostrou a relação existente entre os problemas de quadratura e traçado de tangentes. Tomando como referência a figura dada a seguir, considerou inicialmente um sistema de coordenadas cartesianas *Oxy*, e, a partir daí adicionou um terceiro eixo *Oz,* oposto ao eixo *Oy* e então construiu uma curva VZDE, sendo DE a ordenada do ponto D sobre a curva em questão.

Em seguida traçou a curva VZE tal que a ordenada FE de um ponto F dessa curva seja igual à área limitada VZDE e o eixo x.

Barrow mostrou que se a curva VZE é obtida nessas condições, então a inclinação da reta tangente traçada pelo ponto F nessa curva corresponde ao valor da ordenada ED da curva VZDE, o que mostra a relação mútua entre os problemas de quadratura e o traçado de tangentes.

Figura 6 – Demonstração do TFC segundo Barrow



Fonte: Baron e Bos, 1985

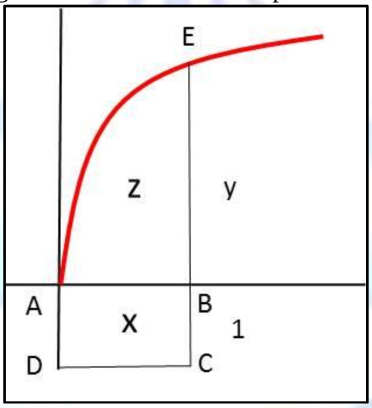
Fazendo uma analogia, Barrow associou a inclinação da reta tangente com a velocidade do móvel, bem como a distância por ele percorrida com a área da região limitada pela curva em um intervalo e o eixo coordenado. Essa associação de ideias como também havia feito Galileu e Torricelli, dentre outros, no estudo do movimento, lhe permitiu compreender a relação inversa entre os processos de derivação e integração.

Um dos mais notáveis alunos de Barrow, Isaac Newton, aliou as ideias apresentadas por Torricelli e por seu professor para resolver os problemas de quadratura e traçado de tangentes sob o ponto de vista cinemático.

Newton pela primeira vez reconheceu a natureza precisa da relação inversa entre os problemas de tangente e de área, e o fato de ambos os problemas se tratar de um único ente matemático, hoje conhecido como o Teorema Fundamental do Cálculo. O autor introduziu uma técnica diferente de seus predecessores. Primeiro ele determinou a taxa de variação da área solicitada (em relação a x), e então calculou-a pelo processo inverso da derivação.

Para uma melhor compreensão do raciocínio de Newton, de acordo com a figura 7, o autor considerou a região limitada *ABE* como gerada pelo movimento de x e y, e consequentemente que a área *ABE* era originada pelo deslocamento do movimento da ordenada BE, que se move com velocidade unitária $\dot{x} = 1.$ O autor considerava que a razão dos fluxos (taxa de variação ou fluxo de uma grandeza) das áreas da região ABE e do retângulo ABCD estava para razão entre as ordenadas BE e BC.

Figura 7– Método utilizado por Newton



Fonte: Grande, 2013, p. 157

Além de Newton, Leibniz ao resolver um problema proposto pelo matemático inglês Huygens de soma dos termos de uma série infinita particular e posteriormente utilizando também esse raciocínio para deduzir alguns resultados com o chamado triângulo harmônico, apresentou uma analogia interessante na resolução dos problemas de quadratura e traçado de tangentes. Sua ideia residia no fato que dada uma sequência pode-se definir outra dada pela diferença de dois termos consecutivos da anterior. Ele percebeu que a soma finita dos termos da sequência de diferenças pode ser obtida por um resultado dado também por uma diferença, e esse resultado só depende dos valores dos termos final e inicial da sequência destacada.

Em outras palavras, dada uma sequência $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ define-se outra sequência $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$ em que $b_1 = a_2 - a_1$, $b_2 = a_3 - a_2, b_n = a_{n+1} - a_n$, e assim por diante. Leibniz observou que:

$$b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n = (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_{n+1} - a_n) = a_{n+1} - a_1$$

Esse resultado permitiu à Leibniz conjecturar que assim como somar os termos da sequência e tomar as suas sequências de diferenças são operações mutuamente inversas num certo sentido. Estendendo essa ideia ligada ao domínio aritmético para o campo geométrico, Leibniz deu um passo significativo para o desenvolvimento do TFC. O autor relacionou suas conclusões sobre séries com os problemas de quadratura, assim como Cavalieri e outros matemáticos o fizeram, em que a área da região sob uma curva pode ser dada pela soma de uma sequência de ordenadas equidistantes.

Leibniz fez uma analogia dos resultados aritméticos e geométricos da seguinte maneira: a adição dos termos das sequências corresponderia à quadratura de curvas, ou seja, calcular áreas, enquanto efetuar as diferenças corresponderia à determinação das tangentes. Com isso, o autor chegou à conclusão de que a determinação de áreas e de tangentes também são operações inversas entre si. Essas relações podem ser utilizadas criando-se um método na resolução de problemas sobre quadraturas de curvas em geral.

Tanto Newton quanto Leibniz têm mérito de reconhecerem a relação inversa existente os problemas de quadratura e traçado de tangentes às curvas em um ponto, estabelecendo o princípio que a diferenciação e a integração de função são operações inversas uma da outra, que é uma das ideias centrais do TFC.

Com a preocupação de fundamentar o Cálculo por meio do rigor, abandonando conceitos considerados vagos e imprecisos como indivisíveis, infinitamente pequenos, entre outros, e fundamentados na intuição geométrica, no século XIX, o corpo da Análise Matemática passou a sedimentar-se com o estabelecimento do conceito de limite.

Em 1821, Cauchy mostrou um novo enfoque para o Cálculo, percebendo a necessidade de uma fundamentação universal e rigorosa, passando a construir os principais conceitos do CDI por meio da noção de limite de uma função, ao invés dos infinitamente pequenos utilizados até então por Leibniz e os fluxões por Newton. Cauchy apresentou o conceito de integração não mais como o inverso da operação de derivação, mas sendo a Integral um conceito independente, como um determinado somatório, tendendo a um limite e consequentemente a relação entre as operações de integração e derivação, que constitui a essência do TFC, passa a ser desconsiderada.

Posteriormente, Weierstrass contribuiu para a fundamentação do Cálculo com uma definição “topológica” para o conceito de limite, sem usar a geometria como fio condutor, mas sim os números. Esse período de fundamentação da Análise por meio do sistema dos números reais foi denominado *Aritmetização da Análise*, e o século XIX passou a ser conhecido como o século do rigor.

Nesse processo do Cálculo, Dedekind, teve papel decisivo. Ao tentar fundamentar a demonstração do teorema: “Toda sequência monótona limitada tem limite”, para seus alunos, não se satisfez com as possibilidades oferecidas pelo modelo geométrico. Procurou encontrar um modelo numérico que fosse eficaz para fundamentar a Análise. Inicialmente, ele percebeu que, mesmo apresentando a propriedade da densidade, o conjunto dos números racionais não formava um *continuum* tal como apresentava o modelo geométrico. Efetuando um procedimento hoje conhecido como *cortes de Dedekind*, estabeleceu o completamento do conjunto dos racionais construindo o corpo dos números reais, que possui todas as características do modelo geométrico.

A partir dessa criação de Dedekind a Análise passou a se fundamentar no modelo numérico o que fez com que o conceito de rigor mudasse com o tempo e com a Aritmetização da Análise atingiu um novo patamar com o refinamento de vários conceitos concebidos até então com a influência da intuição geométrica.

O Ensino do Teorema Fundamental do Cálculo

Alguns resultados obtidos em nossa tese sobre o ensino do TFC que julgamos serem pertinentes para relacionar as ideias expostas anteriormente sobre o desenvolvimento histórico com o ensino do referido teorema podem ser destacados.

Buscamos elencar elementos considerados essenciais que interferem e podem auxiliar na compreensão do teorema, evidenciados, sobretudo, em pesquisas da área de Educação Matemática sobre o ensino e a aprendizagem do Cálculo.

O conceito de integral, por exemplo, traz no seu bojo a noção de acumulação ou de somar quantidades infinitamente pequenas, como se pode perceber nos trabalhos de Arquimedes e Cavalieri, assim como o conceito de derivada está relacionado com o cálculo de variações dessas quantidades conforme se observou nos estudos de Newton e Leibniz.

Sobre a noção de acumular quantidades, Arquimedes intuiu que a área de uma região poderia ser obtida pela soma de segmentos de reta ou tiras infinitamente pequenas, sempre a comparando com a área de uma figura já conhecida. Por seu lado, Newton considerou além da questão da acumulação a ideia de se calcular a variação dessas quantidades, que ele denominou de fluxões. Ao 'estabelecer' a relação que hoje chamamos de TFC, ele primeiro determinou a média da taxa de variação em uma área e estabeleceu que a área total poderia ser obtida pela multiplicação da taxa de variação pela acumulação da variável independente.

A analogia feita por Leibniz relativa à ideia de acumulação e variação, a partir da resolução de um problema de soma dos termos de uma série infinita particular, em que a adição dos termos das sequências corresponderia à quadratura das curvas, ou seja, calcular áreas, enquanto efetuar as diferenças corresponderia à determinação das tangentes a uma curva, concluindo que as determinações de áreas e de o traçado de tangentes num ponto de uma curva são operações inversas entre si, constituindo-se num elemento que pode ser explorado no ensino do TFC.

A história da Matemática mostra como surgiu essa relação, conforme destacamos na seção anterior, entretanto no âmbito da Educação Matemática constatou-se segundo pesquisas sobre o ensino TFC que essa relação nem sempre é evidenciada de maneira explícita nos cursos de CDI. Esse fato pode ser encontrado na pesquisa realizada por Picone (2007), que constatou que grande parte dos professores de Cálculo entrevistados por ela não exploram a relação entre a derivada e a integral, e consequentemente contribuindo para que seus alunos em grande medida fiquem restritos apenas a manipulações algébricas.

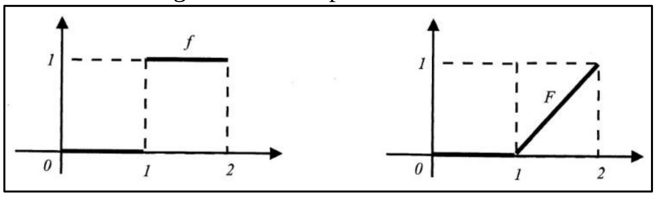
Por outro lado, Campos (2007) pesquisou a maneira como quatro livros didáticos de CDI tratam do TFC. O autor afirma que os livros analisados não discutem explicitamente a questão referente à inter-relação entre derivada e integral.

Inferimos, com isso, que os professores pesquisados por Picone ao abordarem o TFC parece repetir algo que nos livros didáticos é exatamente exposto e que o mesmo se resume a um instrumento para se calcular integrais definidas por meio de um procedimento que é consequência de um estudo do teorema.

Ressaltamos que no ensino do TFC seria plausível destacar quais são as condições que devem ser satisfeitas para que seja estabelecida pelo teorema a relação em que se $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$,então $F'(x) = f(x)$. Para que isso aconteça função f deve ser contínua e limitada (portanto integrável) num intervalo *[a, b];* essa condição e primordial para a existência de uma função primitiva F definida no mesmo intervalo e dada pela expressão $F(x) = \int_a^x f(t) dt$, com $x \in [a, b]$, tal que $F'(x) = f(x)$ e, consequentemente a diferenciabilidade da função F.

Eis um exemplo bastante pertinente do estudo do TFC. Nesse sentido, Lima (2013) explora detalhadamente esse aspecto apresentando um exemplo de uma função descontínua $f: [0,2] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(t) = 0$ se $0 \leq t < 1$ e $f(t) = 1$ se $1 \leq t \leq 2$ cuja integral $F: [0,2] \rightarrow \mathbb{R},\ F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ não é derivável no ponto em $t = 1$ em que a primeira era descontínua, conforme a figura a seguir.

Figura 8 – Exemplo sobre o TFC



Fonte: Lima, 2013, p. 322

Com esse exemplo o autor mostra que não basta que a função f seja integrável, mas necessita que ela seja contínua no intervalo.

A seguir, apresenta sob forma de teorema a seguinte proposição:

> **Teorema 8**. *Seja* $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ *integrável. Seja f contínua no ponto* $c \in [a, b]$, *então* $F: [a, b] \to \mathbb{R}$, *definida por* $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$, *é derivável no ponto c e se tem* $F'(c) = f(c)$. (LIMA, 2013, p. 322).

A partir dessa proposição, determina o resultado $\int_b^a f(t)dt = F(b) - F(b)$, em que $F'(x) = f(x)$ com $x \in [a, b]$ para se calcular a integral definida da função f no intervalo [a,b]. Esse resultado quase sempre é mencionado e explorado como sendo ele o TFC.

Todos esses elementos envolvidos no TFC poderiam ser explorados, utilizando-se de algumas ideias identificadas na gênese e no desenvolvimento do teorema, privilegiando-se uma abordagem inicialmente intuitiva para que posteriormente pudessem ser formalizados, que em grande medida mostrou-se eficiente no aspecto da invenção e construção do conhecimento matemático e que apareceu conforme descrito no contexto histórico.

Considerações Finais

O levantamento das principais ideias e conceitos sobre a gênese e o desenvolvimento do TFC nos permite inferir alguns resultados destacando a importância e o papel da intuição e do rigor na construção do conhecimento matemático bem como suas implicações para o ensino e aprendizagem do teorema.

A intuição geométrica e a analogia com o mundo físico no aspecto da criação matemática foi um elemento que emergiu desde os trabalhos de Arquimedes, utilizando-se de alavancas para "equilibrar" figuras planas e sólidos para o cálculo de áreas e volumes, bem como a interpretação de uma curva como sendo a trajetória de um ponto num movimento contínuo em um plano, conforme Torricelli e Newton, tornaram-se elementos decisivos na resolução dos problemas de quadratura e traçado de tangentes e a relação inversa e recíproca entre esses problemas.

A elaboração de conjecturas e a formulação de hipóteses por meio da intuição geométrica também foram identificadas nos estudos de Arquimedes, Cavalieri e Leibniz ao tratarem a área de uma figura plana como formada por linhas e os sólidos geométricos compostos por uma infinidade de camadas finas.

Os resultados obtidos por esses grandes estudiosos posteriormente receberam relacionadas com a questão do rigor, mas convém ressaltar que assim como defendia Poincaré, a intuição é um importante instrumento no processo de construção do conhecimento matemático.

Destacamos que tanto a intuição geométrica quanto a intuição ao número puro estiveram presentes em todos os períodos da gênese e do desenvolvimento do teorema e que o raciocínio intuitivo aliado ao uso de analogias na elaboração de conjecturas e hipóteses tornou-se um elemento fundamental e imprescindível para a compreensão da relação existente entre as operações de integração e derivação, e consequentemente o estabelecimento do TFC.

Além disso, no ensino e aprendizagem do TFC que a essência do teorema se encontra não somente na inter-relação entre integração e derivação como operações inversas uma da outra, mas também nas condições para que o teorema se estabeleça, como a questão da função derivada ser integrável e contínua, e consequentemente a função primitiva ser derivável. Esse fato, conforme revelaram pesquisas em Educação Matemática, passam despercebidas ou nem sempre são exploradas.

Os conceitos, ideias e fatos descritos nesse trabalho sobre o contexto histórico podem não ser reproduzidos de maneira análoga no ensino do TFC, mas a exposição e discussão das ideias aqui expostas pode se tornar uma interessante experiência para o ensino e aprendizagem do Cálculo.

Referências

ÁVILA, G. S. S. **Introdução à Análise Matemática**. 2ª. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1999.

BARON, M. E. V. e BOS, H. J. M. **Curso de história da matemática: origens e desenvolvimento do cálculo**. Tradução de José Raimundo Braga Coelho, Rudolf Mayer e Maria José M. M. Mendes. Brasília: Editora da Universidade de Brasília, 1985, 5 v.

CAMPOS, R. P. **A abordagem do teorema fundamental do cálculo em livros didáticos e os registros de representação semiótica**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo: 2007.

GRANDE, A. L. **Um estudo epistemológico do Teorema Fundamental do Cálculo voltado ao seu ensino.** Tese (Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2013.

KATZ, V. J. **A History of Mathematics: an Introduction.** Reading: Addison-Wesley, 1998.

LIMA, E.L. **Curso de Análise Real vol.1.** 14.ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2013.

PICONE, D**.** F**.** B. **Os registros de representação semiótica mobilizados por professores no ensino do teorema fundamental do Cálculo**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo: 2007.

POINCARÉ, H. **O valor da ciência**. Tradução de Maria Helena Franco Martins. Rio de Janeiro: Contraponto, 1995.

______. **Science and Method**. Translated by Francis Maitland. New York: Barnes & Noble Books, 2004.

______. **A Ciência e a Hipótese**. Tradução Maria Auxiliadora Kneipp. Brasília: Editora UNB, 1984.

SEGADAS VIANNA, C. C. **Student´s Understanding of the Fundamental Theorem of Calculus: an Exploration of Definitions, Theorems and Visual Imagery.** Tese de Doutorado. Institute of Education Universitiy of London, 1998.

SILVA, B. A. **Diferentes dimensões do ensino e da aprendizagem do Cálculo**. Educação Matemática Pesquisa. V.13, nº 3. São Paulo, 2011.

______. **Componentes do processo de ensino e aprendizagem do Cálculo: Saber, Aluno e Professor**. In: Anais do IV SIPEM. Brasília: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2009.

WEIGEL, M. **Bonaventura Cavalieri**. Portal da matemática, 2010. Disponível em: <http://mauroweigel.blogspot.com.br/2010/08/bonaventura-cavalieri.html> Acesso em: 20/04/2016.

Submetido em Maio de 2019

Aprovado em Dezembro de 2019