REVISTA DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL (UFMS)

Volume 8, Número 17 – 2015 - ISSN 2359-2842

Medidas de Tendência Central e o Ensino Exploratório de Estatística

Measures of Central Tendency and the Inquiry-Based Teaching in Statistics

Everton José Goldoni Estevam[1]

Márcia Cristina de Costa Trindade Cyrino[2]

Hélia Margarida Oliveira[3]

Resumo

O presente artigo tem por objetivo investigar que ideias relacionadas às medidas de tendência central emergem em um conjunto de aulas na perspectiva do Ensino Exploratório. As aulas foram desenvolvidas com uma turma de 32 alunos de um 9º ano do Ensino Fundamental, de uma escola pública do estado do Paraná. Os resultados evidenciam que, na perspectiva do Ensino Exploratório, os alunos podem avaliar contextos nos quais as medidas de tendência central se fazem presentes e adequadas; elaborar justificações para as estratégias empregadas em suas resoluções; reconhecer as características das diferentes medidas de tendência central, suas propriedades e definições; utilizar e relacionar diferentes tipos de registros para exploração e significação das ideias estatísticas; e desenvolver argumentos e justificações para as estratégias de resolução empregadas e para suas compreensões. A emergência de relações entre os diferentes elementos de significação conceitual contribuiu para o estabelecimento da argumentação e do raciocínio estatístico.

Palavras-chave: Educação Estatística. Ensino Exploratório. Medidas de Tendência Central.

Abstract

This paper aims to investigate what ideas about averages emerge from lessons supported on Inquiry-Based Teaching. The lessons were conducted with 32 students of the 9th grade of elementary school in Brazil. The results show that in a lesson supported on Inquiry-Based Teaching students can evaluate contexts in which averages are present and appropriate; build justifications for the strategies employed in their solutions; recognize the characteristics of different averages, their properties and definitions; use and relate different types of

---

[1] Doutorando em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina - UEL. Docente da Universidade Estadual do Paraná - UNESPAR, Campus de União da Vitória. União da Vitória, Paraná, Brasil. evertonjgestevam@gmail.com.

[2] Docente do Departamento de Matemática e do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina - UEL. Londrina, Paraná, Brasil. marciacyrino@uel.br.

[3] Docente do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. Lisboa, Portugal. hmoliveira@ie.ulisboa.pt.

representations for the exploration and meaning making of statistical ideas; and develop arguments and explanations for the employed solving strategies and their understanding. The rise of relations between different conceptual meaning elements has enabled the emergence of statistical reasoning and argumentation.

Keywords: Statistics Education. Inquiry-Based Teaching. Measures of Central Tendency.

Introdução

A Estatística ainda configura grandes desafios para a Educação Básica, tanto no que se refere a seu ensino quanto à formação de professores. Pesquisas evidenciam que muitos professores não se sentem preparados para auxiliar os alunos em sala de aula (ESTEVAM; CYRINO, 2014) e "inconscientemente compartilham uma variedade de dificuldades e equívocos com seus alunos relacionados a ideias estatísticas fundamentais" (BATANERO; BURRIL; READING, 2011, p. 409). Exemplos dessas dificuldades permeiam a (in)compreensão da média e da mediana, a elaboração e interpretação de gráficos, a compreensão da variação e do desvio padrão, entre outros.

Além dos aspectos relacionados às ideias estatísticas em si, Chick e Pierce (2008) constatam que alguns professores têm dificuldades em planejar uma aula, uma vez que não reconhecem os conceitos estatísticos que podem ser desenvolvidos a partir de determinada tarefa ou conjunto de dados e perdem oportunidades ricas para exploração didática das situações em análise.

Tais aspectos evidenciam a necessidade e relevância da proposição, discussão e socialização de situações didático-pedagógicas que ofereçam aos professores que ensinam Matemática oportunidades para vislumbrarem modos de abordagem da Estatística na Educação Básica. O Ensino Exploratório tem ganhado espaço em meio ao cenário da Educação Matemática, exprimindo uma alternativa promissora que coloca os alunos no centro do processo didático, suscitado a partir de tarefas ricas, com potencial para desencadear a emergência de ideias e estratégias matemáticas nos alunos, as quais são sistematizadas por meio de discussões e negociações coletivas (CANAVARRO, 2011; CYRINO, no prelo). Dessa forma, o presente artigo tem como objetivo investigar que ideias relacionadas às medidas de tendência central emergiram em um conjunto de aulas na perspectiva do Ensino Exploratório, desenvolvidas com alunos do 9º ano do Ensino Fundamental.

Para tanto, apresentamos um quadro teórico acerca do Ensino Exploratório e da aprendizagem de medidas de tendência central. Em seguida, caracterizamos o contexto da pesquisa e o encaminhamento metodológico que dão suporte às análises realizadas na seção subsequente. Por fim, tecemos nossas considerações sobre o trabalho realizado.

Ensino Exploratório

O Ensino Exploratório em uma aula de Matemática tem sido apresentado na literatura (CANAVARRO, 2011; CANAVARRO; OLIVEIRA; MENEZES, 2012; OLIVEIRA; MENEZES; CANAVARRO, 2013) como uma alternativa ao ensino tradicional (expositivo) que procura colocar os alunos como protagonistas de suas aprendizagens. De acordo com Oliveira e Cyrino (2014), o Ensino Exploratório pode ser enquadrado em uma perspectiva mais ampla de *inquiry-based teaching*, ou seja, um ensino baseado na inquirição. Seguindo essa perspectiva, os elementos centrais de uma aula com a abordagem do Ensino Exploratório envolvem o trabalho com tarefas desafiadoras, que valorizam a comunicação e a interação social entre professores e alunos e entre alunos.

No Ensino Exploratório, o conhecimento deve ser construído a partir de problemas e questões que sejam significativos para os alunos e que tenham em conta suas experiências anteriores. Desse modo, a escolha das tarefas assume particular relevância. As tarefas devem envolver os alunos em atividades matemáticas que favoreçam o seu raciocínio e a compreensão de conceitos e processos matemáticos. Podem ser problemas, investigações ou explorações (PONTE, 2005) que sejam desafiadores e significativos para os alunos, que supõem uso de estratégias variadas, com diferentes níveis de complexidade matemática, e que tenham forte ligação com o conhecimento dos alunos, com o currículo e com os objetivos de ensino.

A comunicação e a interação social, por meio da linguagem, também têm papel central no Ensino Exploratório, uma vez que são os principais meios dos processos de ensino e de aprendizagem. Elas medeiam o conhecimento e são importantes para o desenvolvimento da autonomia individual, da capacidade de ação, do trabalho colaborativo e da aprendizagem por meio dos processos de negociação de significados. No Ensino Exploratório, o conhecimento é tratado sob uma perspectiva situada e dialógica, que integra a ação em cooperação com outros e a reflexão sobre o que foi aprendido nesse processo. A ênfase deve estar nos alunos e nas condições que lhes favoreçam participar na atividade de inquirição, colaborativa e individualmente.

> Nesta perspetiva *aquilo que aprendemos é o que fazemos*, portanto o que fazemos depende das práticas que estão disponíveis nas comunidades em que participamos. Consequentemente, as aprendizagens matemáticas dos alunos são fortemente

> influenciadas pelas práticas de ensino no contexto das quais ocorrem. (CYRINO, OLIVEIRA, no prelo)

E nesse contexto o professor tem um papel fundamental. Canavarro, Oliveira e Menezes (2012) apresentam um quadro sobre a prática de Ensino Exploratório, com base na literatura e na análise das práticas de professores portugueses, que tem subjacente uma estrutura de aula em quatro fases (introdução da tarefa, realização da tarefa, discussão da tarefa e sistematização das aprendizagens). Nelas identificam-se ações específicas do professor com dois objetivos principais distintos, mas interrelacionados: (i) promover as aprendizagens matemáticas dos alunos; e (ii) gerir os alunos, a turma e o funcionamento da aula. No Brasil, no âmbito do projeto que envolve a construção de um recurso multimídia para a formação de professores que ensinam Matemática (CYRINO, no prelo), foi elaborado um *framework* (Quadro 1) que associa ações do professor em cada etapa (antes da aula e durante a aula) a elementos que compõem essas ações, tendo em conta as discussões do Grupo de Estudos e Pesquisa sobre a Formação de Professores que Ensinam Matemática – Gepefopem, com referência em Stein *et al*. (2008) e Canavarro, Oliveira e Menezes (2012).

Etapa	Ação	Elementos que compõem a ação
Antes da aula	**Antecipar**	▪ Estabelecer os objetivos específicos da aula. ▪ Escolher/adaptar/elaborar a(s) tarefa(s), considerando: ✓ os objetivos da aula; ✓ a natureza da tarefa, priorizando aquelas de elevado nível de demanda cognitiva; ✓ os conhecimentos prévios dos alunos; ✓ os recursos disponíveis na escola. ▪ Resolver a(s) tarefa(s). ▪ Prever possíveis resoluções, dúvidas e erros dos alunos. ▪ Pensar em possíveis questionamentos, orientações ou outros recursos que podem ser sugeridos aos alunos, cuidando para manter o nível de demanda cognitiva. ▪ Estabelecer conexões entre: ✓ as resoluções previstas; ✓ as resoluções previstas e os conhecimentos matemáticos a serem desenvolvidos na aula.
Durante a aula	**Propor a tarefa**	▪ Apresentar a tarefa para os alunos. ▪ Explicitar para os alunos a dinâmica para viabilizar a resolução da tarefa: forma de trabalho (grupo ou individual), recursos a serem utilizados, gestão do tempo, organização do ambiente. ▪ Orientar formas de comunicação das resoluções: organização dos registros escritos, seleção e organização de uma resolução a ser socializada. ▪ Distribuir a tarefa para os alunos. ▪ Direcionar a leitura da tarefa que pode ser feita pelo professor, pelo aluno individualmente ou para a sala. ▪ Promover a compreensão do enunciado da tarefa. ▪ Fomentar o engajamento dos alunos na discussão e na resolução da tarefa.
	Monitorar a resolução da tarefa	▪ Questionar, orientar e provocar o aluno quanto à resolução da tarefa. ▪ Promover e mediar a interação entre os alunos. ▪ Manter o desafio cognitivo e a autonomia dos alunos. ▪ Solicitar justificações para as resoluções e representações utilizadas (corretas ou não). ▪ Não validar a correção das respostas dos alunos. ▪ Identificar as diferentes resoluções e representações e possíveis conexões entre elas. ▪ Avaliar o potencial das diferentes resoluções para a discussão e a aprendizagem dos conhecimentos matemáticos envolvidos na tarefa. ▪ Fazer anotações a respeito das resoluções que tem potencial para promover a discussão e a aprendizagem dos conhecimentos matemáticos envolvidos na tarefa.

Etapa	Ação	Elementos que compõem a ação
	Selecionar e Sequenciar as resoluções para discussão	▪ Escolher e propor resoluções e representações que têm potencial para a discussão e a aprendizagem dos conhecimentos matemáticos envolvidos na tarefa. ▪ Escolher e mobilizar os alunos para apresentação das resoluções selecionadas. ▪ Sequenciar as apresentações tendo em conta os objetivos da aula e as características dos alunos. Por exemplo: i) partir de resoluções, corretas ou não, que foram utilizadas pela maioria; ii) partir de uma resolução menos complexa para uma mais complexa. ▪ Organizar a discussão: decidir se a discussão vai ocorrer após a apresentação de cada resolução selecionada ou após a apresentação de um conjunto de resoluções.
	Discutir as resoluções	▪ Convidar os alunos para a discussão e promover uma atitude de respeito e interesse pelas diferentes resoluções apresentadas. ▪ Promover e gerir a participação dos alunos nas discussões. ▪ Incentivar os alunos a questionar e buscar possíveis respostas. ▪ Solicitar justificações para as resoluções e representações apresentadas. ▪ Evidenciar e discutir equívocos comuns. ▪ Salientar para os alunos a existência de diferentes resoluções para a tarefa. ▪ Introduzir uma resolução particularmente importante, que não foi apresentada pelos alunos, caso necessário, para atingir os objetivos da aula. ▪ Confrontar as diferentes resoluções e analisar o potencial matemático de cada uma delas.
	Sistematizar as aprendizagens	▪ Relacionar os conhecimentos matemáticos presentes nas resoluções dos alunos com seus conhecimentos prévios e as representações matemáticas formalizadas, com vistas à sistematização. ▪ Promover o reconhecimento da importância das regras ou generalizações. ▪ Apresentar os conhecimentos matemáticos em uma estrutura organizada. ▪ Incentivar os alunos a registrar os conhecimentos matemáticos sistematizados.

Quadro 1 - O *framework*[4].
Fonte: Cyrino e Teixeira (no prelo).

Não é intenção dos autores desse *framework* que este configure um "manual" a ser seguido pelo professor para organizar e desenvolver uma aula na perspectiva do Ensino Exploratório, mas que possa orientar discussões que avancem em direção à articulação entre aspectos teóricos e a prática de sala de aula. Este *framework* norteou a prática de Ensino Exploratório analisada neste artigo.

Medidas de Tendência Central na Educação Básica

No currículo brasileiro, a abordagem de medidas de tendência central está prevista a partir do sexto ano do Ensino Fundamental, sendo que a ideia de média aritmética já se faz presente no 2º ciclo dos anos iniciais (4º e 5º ano).

Batanero (2000) salienta que não é tarefa fácil auxiliar as crianças e os jovens na compreensão progressiva das ideias estatísticas fundamentais (como é o caso das medidas estatísticas), em virtude da complexidade que envolve a adaptação dessas ideias às capacidades

[4] Uma discussão mais detalhada de cada ação do professor, no processo de organização e gestão de uma aula na perspectiva do Ensino Exploratório, associada a elementos de sua prática que a compõe, pode ser encontrada em Cyrino e Teixeira (no prelo).

cognitivas dos alunos. Semelhante dificuldade configura a estruturação de situações didáticas que visem à aprendizagem com significado[5].

Reconhecendo o caráter complexo que envolve o processo de significação dos entes estatísticos, Batanero (2000) destaca cinco elementos que proporcionam sua compreensão:

i) *Elementos Extensivos*: referem-se ao campo de problemas de onde surge o objeto;

ii) *Elementos de Atuação*: referem-se às práticas empregadas na resolução de problemas;

iii) *Elementos Intensivos*: referem-se às definições e propriedades características e suas relações com outros conceitos;

iv) *Elementos Ostensivos*: referem-se às notações, gráficos, palavras e, em geral, todas as representações do objeto abstrato que podemos usar para nos referirmos ao conceito;

v) *Elementos Validativos*: referem-se às demonstrações que utilizamos para provar as propriedades do conceito e os argumentos que empregamos para mostrar a outras pessoas a solução do problema.

Contudo, pesquisas revelam insuficiências e equívocos relacionados aos conhecimentos desenvolvidos por alunos, no que se refere aos elementos que possibilitam a significação da Estatística.

Quanto aos *elementos extensivos*, Batanero (2000) destaca que de nada adianta conhecer as medidas de tendência central e saber como calculá-las, se não houver o reconhecimento dos problemas ou situações relacionados com estes conceitos. Exemplo de dificuldades decorrentes é a não consideração da média populacional como a maior probabilidade para um elemento dela retirado em uma amostra. Ou ainda, dificuldade em construir uma distribuição de dados (próxima da distribuição normal), conhecido o valor da média.

No que se refere aos *elementos de atuação*, verifica-se que os alunos utilizam a média aritmética em situações que exigem a média ponderada, demonstram dificuldade em calcular a média a partir de tabelas de frequências, com dados agrupados em intervalos, e aplicam o algoritmo para o cálculo de média de forma mecânica e sem significado (BATANERO, 2000). Carvalho (2008) salienta que alunos portugueses tendem a cometer erros semelhantes. Eles

---

[5] Apesar de não ser o foco do presente trabalho, cabe esclarecer que assumimos por significado de um objeto aquilo que efetivamente se diz a respeito de um objeto no interior de uma atividade. Assim, o significado envolve uma enunciação e uma justificação para tal enunciação, a partir de um processo de negociação entre os envolvidos (LINS, 2012).

assumem a maior frequência absoluta como sendo a moda. Com relação à mediana, não ordenam os dados; calculam o valor central das frequências e não da variável; calculam a moda ao invés da mediana; e equivocam-se ao calcular o valor central. Por fim, determinam a média das frequências ao invés da variável e não levam em conta a frequência absoluta de cada valor no cálculo da média. Cabe salientar que o cálculo da mediana é complexo, porque o algoritmo varia quando se tem quantidade de valores pares ou ímpares, assim como quando se tem valores agrupados ou sem agrupar (COBO; BATANERO, 2000).

Em relação aos *elementos intensivos*, Batanero (2000) aponta que os alunos tendem a acreditar que a média tem propriedade associativa, o que os leva a calcular médias parciais em conjuntos com grande quantidade de dados e depois realizar a média dessas médias. Também não levam em conta o zero, quando calculam a média, e pensam que seu valor deve coincidir com algum elemento do conjunto de dados analisado. Elegem a média como medida representativa sem ponderar a simetria da distribuição e compreendem a mediana como o centro de algo, mas não esclarecem este “algo”.

Por fim, quanto aos *elementos ostensivos e validativos*, as pesquisas apontam que muitas vezes os alunos não utilizam a média para comparar dois conjuntos de dados (bem distribuídos), mas recorrem a valores isolados (como os máximos e mínimos) ou inspeções apenas visuais do conjunto de dados. Elas referenciam ainda diversos significados incorretos atribuídos à palavra “média”, tais como: valor mais frequente (confusão com o significado da moda); valor justo (significado coloquial); ponto médio (confusão com o significado da mediana) e algoritmo (significado restrito) (WATSON; MORITZ, 1999).

Embora os apontamentos acima estejam relacionados a conhecimentos dos alunos, constata-se, tanto no Brasil (ESTEVAM; CYRINO, 2014) quanto em âmbito internacional (JACOBBE; CARVALHO, 2011), que os professores que ensinam Matemática compartilham diversas dessas lacunas relacionadas à compreensão dos elementos apontados por Batanero (2000), no contexto das medidas de tendência central, seja em virtude de formação insuficiente ou de equívocos na construção de seu conhecimento profissional.

Contexto da pesquisa

As aulas[6] analisadas no presente artigo foram desenvolvidas com uma turma de 9º ano do Ensino Fundamental, composta por 32 alunos com idades entre 13 e 17 anos, de uma escola pública do estado do Paraná. Para o desenvolvimento das quatro fases da aula (da proposição da tarefa à sistematização das aprendizagens) foram utilizadas três aulas de cinquenta minutos. De acordo com os relatos da professora responsável pela classe e dos próprios alunos, estes nunca haviam trabalhado com as medidas de tendência central, constituindo estas aulas, portanto, a sua primeira experiência com essas ideias no processo de escolarização formal.

Quanto ao professor responsável pelas aulas analisadas neste artigo (primeiro autor deste trabalho), ele atuou por dois anos na Educação Básica, mas, nos últimos quatro anos, trabalha exclusivamente na formação de professores que ensinam Matemática, desenvolvendo atividades nos cursos de Licenciatura em Matemática e Pedagogia, em uma universidade estadual do Paraná.

As aulas foram videogravadas e para as análises são utilizadas as transcrições dessas videogravações, assim como as produções escritas dos alunos decorrentes das resoluções da tarefa proposta. A organização das análises está alicerçada nas ações do professor, apresentadas no Quadro 1, em uma aula pautada no Ensino Exploratório, associadas à aprendizagem dos alunos. Como forma de preservar a identidade dos alunos, são utilizados pseudônimos para referenciá-los.

Antecipação

A tarefa escolhida para essas aulas (Figura 1) constituiu um problema, no qual o aluno tinha liberdade de escolher o método de resolução, os resultados e as (possíveis) generalizações.

[6] As aulas foram realizadas visando à constituição de um caso multimídia para o Recurso Multimídia que vem sendo construído pelo Gepefopem, em meio ao projeto de pesquisa Recursos Multimídia na Formação de Professores de Matemática (financiado pelo CNPq e pela Fundação Araucária), cujo objetivo envolve a elaboração de casos multimídia e a investigação quanto às contribuições da utilização desse recurso multimídia na formação (inicial e continuada) de professores que ensinam Matemática, com vistas à construção de conhecimentos profissionais desses professores. Este projeto foi aprovado pelo Comitê de Ética em Pesquisa da Universidade Estadual de Londrina - UEL.

TAREFA: Pacote de Balas

Em uma determinada empresa que fabrica e embala balas em pacotes, o setor de controle de qualidade supervisiona a linha produção com o intuito de prezar pela padronização das embalagens. Contudo, algumas variações nos conteúdos das embalagens de 700 gramas são identificadas diariamente em amostras coletadas. Em uma amostra de doze pacotes, que foram coletados aleatoriamente, foram registradas as seguintes quantidades de balas.

Quantidade de Balas por pacote					
98	100	101	98	99	100
102	100	101	101	100	98

Considerando esses valores, resolva as seguintes questões:

a) Observando a quantidade de balas por pacote na tabela acima, quantas balas podemos considerar/esperar que haja em um pacote qualquer desse mesmo tipo? Explique seu raciocínio.

b) Observando a quantidade de balas por pacote na tabela acima e sabendo que o peso do pacote é 700 gramas, qual o peso médio de cada bala?

c) Construa um gráfico para representar os dados da tabela acima e represente a média da quantidade de balas por pacote nesse mesmo gráfico.

Figura 1 - Tarefa proposta aos alunos.
Fonte: Os autores.

A elaboração da tarefa consistiu em um momento de reflexão e aprendizagem para o professor, já que envolveu pensar as características de uma tarefa que colaborariam para os objetivos da aula, os quais envolviam discutir/compreender aspectos relacionados às medidas de tendência central. A complexidade da escolha (elaboração, adaptação ou seleção) da tarefa reside no reconhecimento de que a aprendizagem depende, em grande parte, da atividade que os alunos realizam em sala de aula desencadeada por essa tarefa (PONTE, 2011).

Proposição da tarefa

Ao propor a tarefa, o professor solicitou sua leitura e os alunos foram inquiridos quanto à compreensão de seu enunciado. Especificamente, buscou-se verificar a compreensão dos alunos quanto ao que deveriam realizar em cada item tarefa e aos termos que a compunham. Emergiram questionamentos quanto ao significado das palavras “amostra” e “aleatoriamente”.

O professor esclareceu que geralmente é muito difícil trabalhar com todos os elementos ou indivíduos dos quais se pretende obter informações (conjunto denominado na Estatística de “população”), seja em virtude da limitação de tempo ou de recursos. Assim, é comum, ao visar à obtenção de informações sobre uma determinada população, estudar um pequeno grupo de elementos ou indivíduos extraídos dela, o qual é chamado de amostra.

Para selecionar quais elementos ou indivíduos devem compor a amostra, é fundamental considerar que este subconjunto carece ser representativo da população, ou seja, ele representa da maneira mais fidedigna possível as características da população. Uma das maneiras de se determinar esses elementos ou indivíduos é a amostragem aleatória, que consiste basicamente na retirada de elementos da população totalmente ao acaso, sem que possa prever antecipadamente qual deles será selecionado. Os alunos relacionaram as informações do professor com as pesquisas eleitorais (já que, no momento, vivenciávamos o período eleitoral no Brasil) para compreensão dos termos.

As dúvidas suscitadas pelos alunos tornam patente a necessidade de um debate cuidadoso acerca dos termos estatísticos, muitas vezes assumidos como triviais na escola básica, bem como uma abordagem consistente que possibilite sua significação.

Esclarecidas as dúvidas, o professor informou que o trabalho deveria ser realizado em pequenos grupos (com três ou quatro alunos), cuja organização foi determinada pelos próprios alunos. Salientou ainda que se deveriam auxiliar mutuamente no grupo e, em caso de ideias divergentes, teriam de negociar entre eles e eleger a resolução do grupo. Por fim, salientou a importância dos registros, tendo em conta que alguns seriam escolhidos para discussão com a turma. Para tanto, eles seriam fotografados e projetados à turma.

Monitoramento da resolução da tarefa

Nesta fase da aula, o professor basicamente acompanhou e apoiou os alunos no seu trabalho autônomo, tomando cuidado para que seus comentários, provocações e orientações não reduzissem o nível de demanda cognitiva da tarefa (STEIN; SMITH, 1998) e não uniformizassem as estratégias de resolução dos diversos grupos.

Alguns grupos demonstraram dificuldade para lidar com as características da tarefa, alegando insuficiência de elementos ou dificuldade para estabelecer uma estratégia de resolução. Nesses momentos, as ações instrucionais do professor, particularmente aquelas de apoio e ampliação (CENGIZ; KLINE; GRANT, 2011), foram fundamentais para que os alunos não desistissem de tentar resolver a tarefa, bem como pudessem encontrar uma direção a seguir.

Professor: *E no item b, pergunta-se o quê?*
Júlia: *Qual é o peso de cada bala?*
Professor: *Como a gente faz para determinar o peso dessa bala?*
Júlia: *Não sei...*
Professor: *Não sabe? Quantas balas têm num pacote, que você me falou?*
Júlia: *Em média, 100.*
Professor: *E quanto pesa um pacote, inteiro?*
Júlia: *700* (gramas).

Professor: *Então, dá para determinar o peso de cada bala desse pacote?*
Júlia: *Dá, mas eu não sei. Eu já fiz várias contas aqui, mas...*
Professor: *Como você fez as contas?*
Júlia: *Eu fiz 100 divido por 700, 700 dividido por 100...*
Professor: *E não chegou em nada?... Pense: se nós temos 100 balas no pacote e o pacote pesa 700 gramas, como é que se determina o peso de cada bala?*
Júlia: *Fazendo a divisão...*
Professor: *Divisão de quê?...*
Júlia: *De 100* (hesita)*... de 700 divido por 100.*
Professor: *Então vão adiante. Ajudem a Júlia* (fala para os demais membros do grupo).

O professor, ao realizar os questionamentos e retomar o que era solicitado na tarefa e os dados disponíveis (oriundos do próprio enunciado da tarefa ou determinados na resolução de itens anteriores), apoia e valoriza o trabalho da aluna. Ele fomenta sua percepção da situação (elementos extensivos) e o vislumbre de possibilidades de resolução (elementos de atuação), prezando pela continuidade do engajamento da aluna na resolução. Além disso, o professor faz questão de incitar a colaboração dos demais membros do grupo.

Outra função interessante das ações de ampliação do professor refere-se ao esclarecimento sobre os conceitos e ideias subjacentes aos registros inicias dos alunos.

Professor: *O que vocês responderam?*
José: (No item a) *A gente colocou 100 balas, porque é a quantidade que mais se repete dentro dos pacotes.*
Professor: *Ah, tá. Dentro daquela amostra de pacotes é a quantidade que mais aparece.*
Grupo: *Isso...*
José: *Aí, quanto a cada bala, a gente colocou 7 gramas* (como) *mais ou menos o valor* (do peso) *das balas. Porque 700 gramas é o peso de cada pacote e são 100 balas por pacote, em média. Então se a gente pensar, 7 vezes 100, que é a quantidade de gramas que a gente estipulou, são 700 gramas em cada pacote.*
Professor: *Então vocês estão falando aqui 100 balas por pacote, em média. Então esse 100 que vocês determinaram é a média?*
Grupo: *Isso.*
Professor: *Então escrevam isso.*

O grupo havia apenas indicado que a quantidade esperada de balas para um pacote retirado ao acaso seria 100, em virtude de ser a maior frequência. Isso remete à ideia de moda, o que seria uma possível resposta coerente à questão. Contudo, ao esclarecer o processo de resolução do item (b), o aluno revela que, apesar do argumento utilizado referir-se à moda, o grupo acreditava que o valor de 100 balas consistia na quantidade média de balas por pacote, denunciando um equívoco conceitual comumente identificado nas pesquisas (WATSON; MORITZ, 1999).

Cabe salientar que as funções das ações instrucionais parecem não ser dicotômicas e, pelo contrário, muitas vezes congregam-se entre si. Muitas ações, inicialmente pensadas como apoio, constituem-se em ampliações de ideias e, ainda, acabam por funcionar como provocações quando, ao serem lançadas com o intuito de esclarecer determinadas questões, revelam equívocos dos alunos, os quais têm a oportunidade de reconsiderar a adequabilidade dos procedimentos e estratégias empregados, conforme episódio que segue.

Lais: *Professor, a gente não sabe como fazer o gráfico. Pensamos em fazer um gráfico de pizza, sabe?*
Lia: *O que é* (significa)*: represente a média da quantidade de balas por pacote nesse mesmo gráfico?Aqui já não vai ter as quantidades?*
Professor: *A quantidade de pacotes e a quantidade de balas em cada pacote. Aí é pedido um gráfico para representar esses dados, ou seja, que alguém olhando para ele consiga identificar esses dados* (aponta para a tabela).
Lia: *Sim.*
Professor: *E, além disso, que neste mesmo gráfico, esteja representada a média... De quê?*
Lia: *A média da quantidade de balas por pacote. Mas aqui já não é a média?* (aponta para a tabela)
Professor: *Essa é a média?*
Lais: *Então não dá para fazer esse gráfico...*
Lia: *A gente faz o gráfico de barras e aí coloca qual é a média?*
Professor: *É uma possibilidade...*

Percebe-se que nesta fase da aula são reveladas diversas (in)compreensões dos alunos quanto às ideias e conceitos matemáticos envolvidos na resolução da tarefa e negociados no grupo, o que necessariamente envolve a elaboração de argumentos consistentes para justificar sua opinião (elementos validativos). As ações de apoio do professor tanto podem favorecer a construção e o esclarecimento desses argumentos quanto possibilitar a percepção de elementos descuidados inicialmente e que favorecem a manutenção do engajamento dos alunos no processo de resolução da tarefa.

No entanto, talvez pela própria cultura da sala de aula, a qual, em geral, não atenta para as inter-relações entre os processos comunicativos e o ensino e a aprendizagem de Matemática, não identificamos uma pré-disposição dos alunos para esclarecer e registrar seus raciocínios, culminando por vezes com registros apenas numéricos (elementos ostensivos), cujo significado não era acessível. Isso nos faz inferir que a simples análise da produção escrita dos alunos parece não ser suficiente para esclarecer (sobretudo ao professor) os elementos que sustentam as estratégias e procedimentos empregados. Do mesmo modo, confere extrema relevância às ações instrucionais do professor no sentido de ampliar e esclarecer raciocínios promissores, possivelmente não constituídos ou clarificados devidamente nos registros iniciais dos alunos, bem como, provocá-los no sentido de (re)pensar suas estratégias (elementos de atuação) e, se for o caso, reconsiderar a adequação de seu emprego.

Especificamente, no que se refere aos conceitos e ideias estatísticas, os episódios relatados apontam que, apesar dos equívocos, os alunos apresentaram ideias promissoras para os objetivos de ensino, as quais possibilitaram discussões interessantes na fase seguinte da aula.

Seleção e sequência de apresentação das resoluções para discussão

Ao monitorar a resolução da tarefa, o professor também selecionou e sequenciou as resoluções que seriam socializadas pelos grupos com a sala toda, na fase da discussão.

Foram selecionados quatro grupos para a apresentação, tendo como critério de escolha resoluções com características distintas e que, de algum modo, guardavam relações com as definições e propriedades das medidas de tendência central. Para o sequenciamento, o professor optou por iniciar por aquelas resoluções menos aritméticas e que continham mais equívocos, caminhando para resoluções mais consistentes matematicamente.

Discussão da tarefa

De acordo com Oliveira, Menezes e Canavarro (2013, p. 32), a fase de discussão consiste em um momento "particularmente exigente para o professor, especialmente a gestão da discussão coletiva". A partir de planejamento inicial, e das resoluções selecionadas e sequenciadas na fase anterior, o professor buscou gerir as interações entre os alunos e orquestrar a discussão. Neste processo, ele levou em conta a promoção da qualidade matemática das explicações e argumentações apresentadas, a partir da comparação entre as distintas resoluções, e buscou relacioná-las com os objetivos da aula.

Para o item (a) da tarefa, os Grupo 1, 2 e 3 apresentaram as resoluções presentes na Figura 2.

Grupo 1	A) 100. a Media e aproximadamente 100, ou tem chuaso mais ou a menos, acredita-se que seja erro maquinario.
Grupo 2	a- 100, por ter mais quantidade de pacotes com 100 e ser a média dos números. Ex: 98, 99, 100, 101, 102
Grupo 3	a) O nosso raciocinio foi ver quais pacotes tinham o mesmo numero de balas e a maioria foi 100 balas por pacotes. Também vimos que o menor numero de balas por pacote foi 98 e o maior 102, tem também o 99, 100 e 101. Então sendo todos fica 98, 99, 100, 101 e 102 e a média entre esses numeros o numero que fica na média é o 100

Figura 2 - Produção escrita dos Grupos 1, 2 e 3 para o item (a) da tarefa.
Fonte: Os autores.

Na discussão, o Grupo 1 esclareceu que o 100 consistia em uma “média aproximada”. Já o Grupo 2 alegou que a média de pacotes é 100 por haver um maior número de pacotes com essa quantidade. Além disso, os alunos referem que 100 é o valor situado no meio da distribuição, entre o 98 (mínimo) e o 102 (máximo), argumentos semelhantes aos do Grupo 3. Contudo, diferente do Grupo 2, tanto nas discussões intragrupo durante o desenvolvimento da tarefa como nessa fase de discussão coletiva, este último grupo deixou claro a ideia de incerteza, a qual permeia uma investigação estatística, conforme episódio a seguir evidencia.

Paulo (Grupo 3): *Como o número 100 está no meio e como é o que tem mais* [pacotes], *é **bem mais provável** que ele seja a quantidade de balas de um pacote qualquer.*

Por fim, o Grupo 4 esclareceu que, para determinar a média de balas por pacote, eles somaram todas as quantidades de balas e dividiram por 12, que era a quantidade de pacotes, resultando em 99, 83. A partir desse valor, arredondaram a média para 100, porque disseram que só haveria possibilidade de uma quantidade inteira de balas (Figura 3).

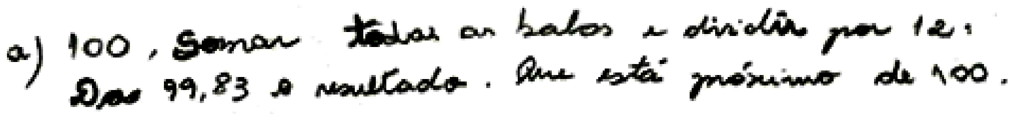

Figura 3 - Resolução do Grupo 4 para o item (a) da tarefa.
Fonte: Os autores.

A comparação das diferentes estratégias (elementos de atuação) empregadas na resolução do item (a) da tarefa possibilitou o desenvolvimento de uma trajetória de construção do conceito de média. Esta foi iniciada pela ideia da média como uma medida que se aproxima de todos os dados (elemento intensivo), perpassando pelos equívocos conceituais que implicam confusão da média com a moda e a mediana, incidindo no significado procedimental da média e na propriedade de que ela pode não coincidir com algum valor da distribuição ou seu valor pode não ter significado no conjunto analisado (elementos intensivos). Cabe salientar que a mobilização de registros aritméticos, linguagem escrita e linguagem oral evidenciou como a recorrência a diferentes elementos ostensivos pode contribuir para compreensão dos conceitos estatísticos em discussão.

Quanto ao item (b) da tarefa, os Grupos 1, 2 e 3 tiveram registros escritos bastante parecidos (Figura 4).

Grupo 1	·B) 7g porque 700|100 7 gramas aproximadamente.
Grupo 2	b- 7 gm por bala, porque dividimos 700 por 100.

Grupo 3	R: 7 gramas por balo. / Dividimos 700 por 100

Figura 4 - Produção escrita dos Grupos 1, 2 e 3 para o item (b) da tarefa.
Fonte: Os autores.

Os três grupos esclareceram que utilizaram o “valor aproximado” da média determinado no item (a) e realizaram a divisão de 700 por 100, considerando que havia aproximadamente 100 balas em cada pacote, os quais pesavam 700 gramas. Assim, ao realizarem a divisão, concluíram que cada bala pesava 7 gramas.

Já o Grupo 4 apresentou um raciocínio um pouco diferente, correspondente ao que aplicaram no item (a) da tarefa. Eles multiplicaram 700 (que é o peso de cada pacote de balas) pela quantidade de pacotes, isto é, 12 (resultando em 8400 gramas). Depois somaram todas as balas do pacote, cujo total resultou em 1198. Por fim fizeram o quociente entre o peso total dos pacotes e quantidade de balas, resultando em 7,01 gramas para cada bala (Figura 5).

b) 7,01 gramas. Pois multiplicando 700 pelo número de
pacote vai ser igual 8400. Somou todo balos e
deu 1198. dividindo o valor por cada bala igual 7,01.

Figura 5 - Produção escrita do Grupo 4 para o item (b) da tarefa.
Fonte: os autores.

Ao questionar a turma sobre a compreensão da estratégia utilizada por este grupo, o professor percebeu dificuldade na compreensão do raciocínio explorado e o grupo reapresentou sua estratégia. Com isso, surgiu um questionamento de um aluno de outro grupo:

José: *Eles fizeram vários cálculos, mas, por exemplo, eles disseram que cada bala vai pesar 7,01 gramas. Mas, de onde que vai sair esse "*(vírgula) *zero um" grama? Vai ser um pouquinho a mais ou maior? Não entendi.*
José (Grupo 4): *É que a gente foi somando tudo, cada uma das balas. Aí deu esses valores quebrados.*
Ana: *Ficou mais exato o deles?*
Felipe: *É, ficou mais exato.*
Professor: *O que acontece é que as resoluções anteriores utilizaram os pacotes para fazer os cálculos. E eles* (grupo 4) *fizeram pelos totais* (de balas e peso).
Lia: *Porque assim, diz que cada pacote tem 700 gramas. Se eu dividir 700 por 100 não dá 7, 01.*
Paulo: *E se multiplicar 7,01 por 100 não dá os 700 gramas que têm em cada pacote.*
Professor: *Por que será que ocorre essa diferença? Qual o caminho dos grupos anteriores?*
Turma: *Pela média.*
Professor: *E essa média era exata ou tinha alguma variação?*
Felipe e Ana: *Não, tinha variação.*
Professor: *Quando os meninos* (grupo 4) *calcularam deu exatamente 100?*
Turma: *Não.*
Professor: *Como a estimativa que vocês fizeram tinha uma variação, por isso a diferença para o cálculo dos meninos. Essa é a característica da Estatística. Nós trabalhamos com medidas que variam. Não existe certeza. Trata-se de uma maneira de prever, mas não exata.*
Felipe: *É por isso que naquelas pesquisas de opinião do Ibope tem uma margem de erro. Dizem que pode variar dois pontos* (percentuais) *para mais ou para menos.*
Professor: *Então retomando a situação, do porquê o 7,01. Esse é o peso real de cada bala?*
Júlia: *Depende do pacote.*

Rui: *Eu entendi. É porque na conta deles não deu exatamente 100 na média. Deu 99,83. Aí 99 vírgula alguma coisa vezes sete não dá 700. Por isso, 7,01.*

O professor finalizou a discussão ratificando que a média é uma medida de tendência central, o que não quer dizer que todos os elementos do grupo atendam àquele valor. Percebe-se que, embora os primeiros grupos (1, 2 e 3) tenham realizado apenas a divisão para determinar a média (remetendo ao algoritmo da média aritmética), a estratégia utilizada pelo Grupo 4 proporcionou uma densa discussão sobre o significado da média enquanto medida estatística que pressupõe variabilidade e incerteza (elementos intensivos). Os esclarecimentos permearam aspectos relacionados à compreensão do contexto da situação, do significado da média nesse contexto (elementos de extensivos) e a reflexão quanto à adequabilidade das estratégias utilizadas (elementos de atuação).

Quanto aos gráficos referentes ao item (c) da tarefa, o Grupo 1 elaborou um gráfico que não responde corretamente ao que foi solicitado (Figura 6).

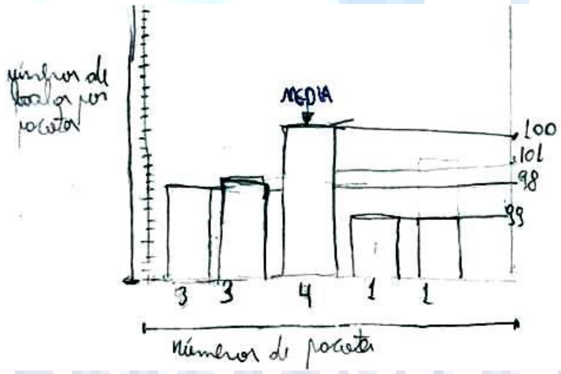

Figura 6 - Produção escrita do Grupo 1 para o item (c) da tarefa.
Fonte: Os autores.

Ao explicar porque a média era 100, no gráfico, o grupo argumentou que se tratava do valor mais próximo de todos os dados. Quando o professor colocou em discussão a resolução do grupo para toda a turma, foi apontada a ausência da representação do pacote com 102 balas. Além disso, questionou-se a adequabilidade e clareza do gráfico.

Lia: *Ali* (no gráfico) *está o número 100. Mas o 101 está abaixo e depois vem o 98.*
Igor (Grupo 1): *É, foi o que eu falei.*
Paulo (Grupo 1): *Mas é que a gente não fez um gráfico em escala. A gente fez um gráfico mesmo pelos dados... O importante não é a escala, mas as informações...*
Lia: *Mas então, os dados não estão trocados?*
Grupo 1: (hesita)
Professor: *Vamos lá, pessoal. Parece que o que a Lia está falando remete ao seguinte: Vocês estão identificando no eixo vertical a quantidade de balas por pacote. Mas nesse eixo está posto o 101 abaixo do 100 e o 98 acima do 99. E isso não parece estranho?*
Turma: *Sim...*
Paulo (Grupo 1): *Ah, em meu trabalho eu faço o gráfico assim e eles dizem que está certo.*

Professor: *Bem, mas o que a altura daquelas colunas está representando?*
Paulo (Grupo 1): *É o número* (quantidade) *de balas no pacote.*
Professor: *É o número de balas.*
Igor (Grupo 1): *Não, é a quantidade de pacotes, porque o que tem mais pacotes é a maior* (coluna).
Professor: *Então estão certas as informações apresentadas nos eixos do gráfico de vocês?*
Lia: *Está identificado balas quando deveria ser pacote. Está invertido.*
Ana: *Está confuso, não dá pra tirar conclusões pelo gráfico.*
Paulo (Grupo 1): *É, está errado mesmo.*

Com as provocações do professor, a turma começa a apontar problemas na representação dos alunos do Grupo 1, os quais ainda insistem em argumentar sobre sua adequabilidade. Contudo, com os questionamentos feitos pelo professor e apontamentos da turma, o grupo acaba concluindo que o gráfico não representava os dados da tabela. Ao final das discussões, a turma sugeriu que, para sua correção, as informações dos eixos do gráfico deveriam ser invertidas, isto é, na horizontal constar a quantidade de balas e, na vertical, a quantidade de pacotes.

Os Grupo 2 e 3 apresentaram gráficos muito semelhantes (Figura 7), cuja estrutura era exatamente a que foi sugerida pela turma para correção do gráfico apresentado pelo Grupo 1.

Grupo 1 | Grupo 2

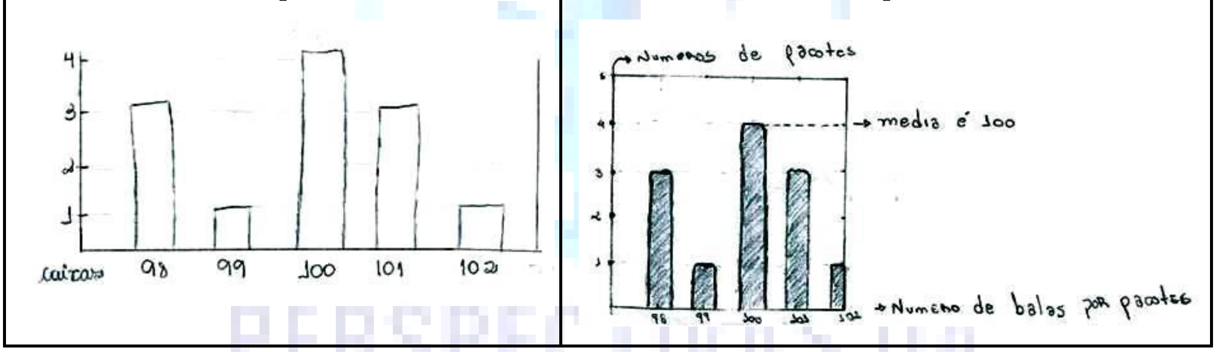

Figura 7 - Produção escrita dos Grupos 2 e 3 para o item (c) da tarefa.
Fonte: Os autores.

Basicamente, a única diferença entre os gráficos apresentados pelos dois grupos reside no fato de que o Grupo 2, diferente do Grupo 3, não identificou o que estava representado no eixo horizontal, tampouco a média. Assim, a turma sugeriu ao Grupo 2 que acrescentasse essa informação ao registro.

O último grupo apresentou um gráfico interessante para discussão e compreensão do princípio de média como medida que transforma a distribuição em equitativa (Figura 8).

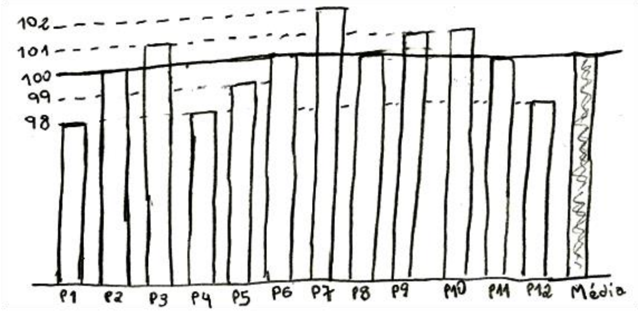

Figura 8 - Produção escrita do Grupo 4 para o item (c) da tarefa.
Fonte: os autores.

Ao representar as quantidades dos 12 pacotes de bala por 12 colunas, cujas alturas referem-se à quantidade de balas presente em cada um dos pacotes, é possível perceber a média como a medida que torna a distribuição equitativa ou uniforme, a partir da visualização de que as quantidades superiores ao valor médio (acima da linha da média) compensam aquelas inferiores a este mesmo valor. Essa percepção foi incitada pelas ações instrucionais do professor, tanto no decorrer do desenvolvimento da tarefa quanto nesta fase de discussão coletiva.

Em síntese, partindo de uma representação equivocada do Grupo 1, os alunos percebem a função de um gráfico estatístico, isto é, representar de maneira fidedigna o conjunto de dados no qual este teve origem. Do mesmo modo, as identificações da média no gráfico apresentado pelos Grupos 2 e 3, não permitem compreensão do significado dessa medida a partir de uma representação gráfica, corroborando os equívocos conceituais que confundem média, mediana e moda. Contudo, essa percepção se torna evidente com o gráfico do Grupo 4, o qual possibilita a compreensão quanto à distribuição dos dados e de um dos significados da média aritmética (elemento intensivo), a partir de sua representação gráfica (elemento ostensivo).

Sistematização das aprendizagens

A sistematização das aprendizagens consiste na fase da aula em que os alunos reconhecem os conceitos e procedimentos matemáticos envolvidos no trabalho com a tarefa, estabelecem conexões com aprendizagens anteriores (OLIVEIRA; MENEZES; CANAVARRO, 2013), exprimindo um momento privilegiado em que a comunidade (alunos e professor) sistematiza e institucionaliza as aprendizagens matemáticas (CANAVARRO, 2011), a partir das resoluções discutidas na fase anterior.

Em virtude do tempo, esta fase ocorreu em uma aula realizada dois dias após o desenvolvimento das fases anteriores. Embora considerando que isso poderia comprometer o estabelecimento de relações entre as discussões realizadas na sistematização com aquelas ocorridas nas fases de desenvolvimento e de discussão da tarefa, as aprendizagens dos alunos ficariam incompletas sem esta fase e, por isso, a sistematização foi mesmo assim realizada.

Essa fase da aula foi iniciada com a retomada das resoluções discutidas anteriormente e das ideias nelas presentes. O professor realizou a sistematização no quadro de giz e solicitou aos alunos que, de modo semelhante, fizessem o registro em seus respectivos cadernos.

Reavendo o item (a) da tarefa, foram recordados os argumentos utilizados pelos diferentes grupos para justificar o 100 como o valor da média de balas em cada pacote. O professor esclareceu que nem todos os argumentos apresentados sustentam a ideia de média. Por exemplo, o argumento que remetia ao "elemento que mais aparece" refere-se à outra medida de tendência central, denominada moda. Assim, o argumento apresentado pelos alunos para justificar o 100 como a quantidade mais provável de balas em um pacote retirado ao acaso era consistente, frente à questão. O equívoco estava em denominar essa medida de média, quando ela era a moda (Figura 9).

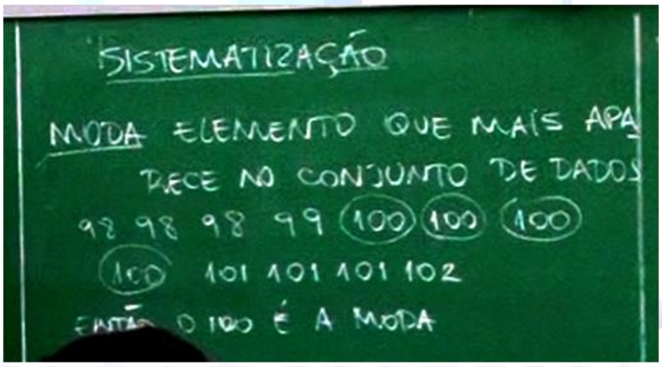

Figura 9 - Sistematização da definição de moda.
Fonte: Os autores.

Em seguida, a definição de moda foi associada ao gráfico elaborado no item (c) da tarefa. De modo geral, todos os grupos haviam construído um gráfico de colunas que foi reproduzido pelo professor no quadro de giz (Figura 10).

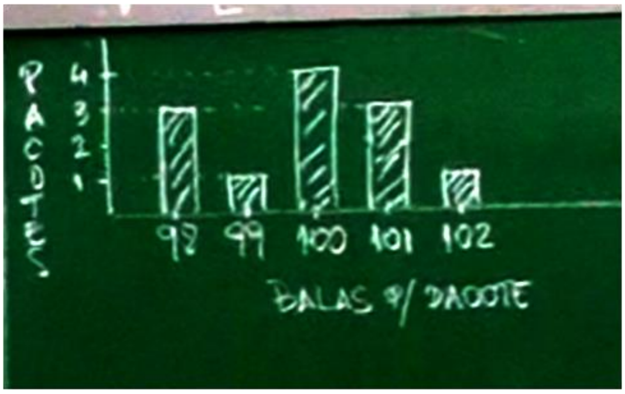

Figura 10 - Representação da moda em um gráfico de colunas.
Fonte: Os autores.

A partir dessa representação, foi possível discutir a representação gráfica da moda, conforme episódio que segue.

Professor: *O que a gente consegue perceber lá no gráfico que pode ser associado a essa ideia de moda que eu falei para vocês?*
Júlia: *Que o 100 é a moda.*
Professor: *Por quê?*
Paulo: *Porque tem mais pacotes.*
Professor: *E o que acontece no gráfico?*
Elis: *A coluna do 100 é maior.*
Professor: *Então quando nós temos apenas os dados, identificamos a moda contando a quantidade de cada um deles e verificamos qual tem a maior quantidade. E quando temos apenas o gráfico, é possível identificar a moda?*
Lia: *Sim. Basta verificar qual é a coluna maior.*

De modo semelhante, foi discutida a ideia de o elemento central do conjunto de dados (ou valor situado no meio da distribuição) também não se referir à media, mas à mediana. O professor esclareceu que, diferente da moda, cuja ordem dos dados não faz diferença, a ordenação dos dados é fundamental para determinação da mediana, tendo em vista se tratar de uma medida de posição que indica o centro da distribuição dos dados.

Professor: *Para determinar a mediana, eu posso distribuir os dados de qualquer maneira?*
Felipe: *Não. Porque precisa fazer a mediana... Eu acho...* (hesita)
Professor: *Se eu tenho que determinar o meio, como se determina o meio?*
José: *Colocando em ordem...*
Felipe: *Colocando a moda no meio, o que mais aparece no meio. Ou não?*
Professor: *Não, porque são conceitos diferentes, Felipe. A moda é uma coisa e a mediana é outra. Conforme iremos discutir mais adiante, embora nessa situação a média, a moda e a mediana tenham sido coincidentes, isso nem sempre acontece. Às vezes elas variam. Então, José, o que você falou que nós não escutamos?*
José: *Organizar em ordem numérica.*
Professor: *Organizar em ordem, seja ela* (a ordem) *crescente ou decrescente, porque para determinarmos o meio tanto faz analisarmos do maior para o menor, quanto do menor para o maior. Só que eu percebi nas resoluções que vocês que vocês apenas identificaram os valores: 98, 99, 100, 101 e 102. Mas nós temos a mesma quantidade de cada um desses valores?*
Júlia: *Não, está aí* (referindo-se ao registro na lousa).
Professor: *Então, se colocarmos apenas os valores, estamos assumindo que há a mesma quantidade de pacotes de bala, em nosso caso, com as diferentes quantidades de balas. O que não é verdade.*

Então é preciso considerar todos os valores, mesmo os que se repetem. E aí contamos os valores, no caso 12, e determinamos o meio. Onde vai estar.

Paulo: *Na* (posição) *6,5.*

Com base no indicativo do Paulo, foi discutido o processo de determinação da mediana para conjuntos de dados com quantidade par de elementos, o qual consiste na média entre os dois elementos centrais da distribuição. Para esclarecer as possíveis dúvidas que surgiram, o professor simulou considerar o 6º elemento da distribuição, quando a turma percebeu que o conjunto de elementos dos dois conjuntos (abaixo do 6º e acima do 6º) continha quantidades diferentes.

Discutidas as ideias relacionadas à moda e à mediana, o professor passou a discussão acerca da média. Antes, porém, chamou atenção para as notações que normalmente são utilizadas para cada uma das medidas de tendência central (Figura 11).

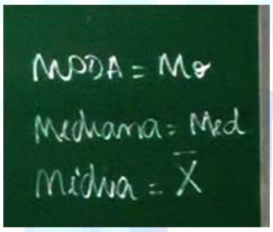

Figura 11 - Sistematização das formas de representação das medidas de tendência central.
Fonte: Os autores.

O professor recorreu à média anual das notas dos alunos, determinada a partir das médias das notas nos bimestres, para ilustrar a ideia de média aritmética. Os próprios alunos indicaram o significado procedimental (algoritmo), o qual foi sistematizado no quadro de giz (Figura 12).

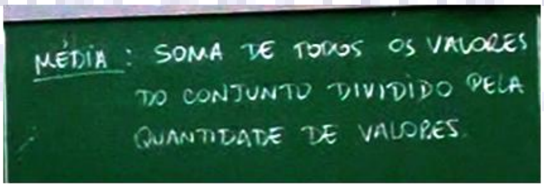

Figura 12 - Sistematização do significado procedimental da média aritmética.
Fonte: Os autores.

Recordando as discussões realizadas a partir do gráfico apresentado pelo Grupo 4, o professor sistematizou a ideia da média aritmética como o valor que torna a distribuição equilibrada. Um dos alunos questionou se a média seria o valor mais exato. O professor explicou que, compreendendo esse "exato" como o valor mais aproximado, isso ocorreria quando houvesse distribuições com pequenas variações. Para exemplificar, o professor tomou a idade de quatro alunos da turma (14, 15, 15 e 16 anos) e determinou as três medidas de tendência central: $Mo = 15$; $Med = 15$ e $\bar{X} = 15$. Com o objetivo de comparar, o professor criou um novo conjunto de dados, no qual acrescentou sua própria idade (30 anos) às idades dos alunos e refez os cálculos, resultando em: $Mo = 15$; $Med = 15$ e $\bar{X} = 18$. Esse exemplo serviu para ilustrar que a mediana e a moda não são afetadas por valores extremos, enquanto a média sofre influência de todos os valores da distribuição (elementos intensivos). Assim, em situações com muita variação, a média costuma não ser o valor mais adequado para representar o conjunto de dados.

Como forma de verificar a compreensão dos alunos, o professor lançou outro exemplo, a partir da quantidade de irmãos de cinco alunos da turma, o que originou o conjunto de dados: 3, 1, 1, 1, 0. Solicitou então que determinassem as três medidas de tendência central. Os alunos apontaram como resultados: $Mo = 1$; $Med = 1$ e $\bar{X} = 1{,}2$.

Concluídos os cálculos, uma aluna levantou um questionamento que desencadeou a discussão sobre uma das propriedades da média aritmética.

Bia: *Não tem como dar* (resultar) *a média essa quantidade de irmãos, porque ninguém tem um irmão e meio...*

Professor *Bem pessoal, a Bia está dizendo que não há como ter um irmão e meio ou um vírgula dois irmãos. Mas o Paulo falou alguma coisa...*

Paulo: *Por causa dos meses. Não tem um ano completo. A idade deles* (dos irmãos).

Professor: *Então esse 0,2 estaria remetendo às idades dos irmãos?*

Paulo: (hesita)

Professor: *Mas de onde nós tiramos os dados? Foi das idades dos irmãos?*

José: *Foi da quantidade de irmãos.*

Professor: *Então não faz muito sentido pensar na idade deles. É independente, não é mesmo? Então para podermos esclarecer a dúvida da Bia é preciso pensar em duas coisas: o que é a média e qual o seu significado no conjunto de dados analisados.*

Para esclarecer, o professor retomou o significado da média como valor que torna a distribuição equitativa, isto é, se considerássemos um equilíbrio na quantidade de irmãos entre os alunos da amostra, cada um teria 1,2 irmãos. Para auxiliar na compreensão, ele representou a distribuição de irmãos em um gráfico na lousa (Figura 13) e, a partir da conclusão, sistematizou outra propriedade da média: o valor da média pode não coincidir com nenhum dado do conjunto.

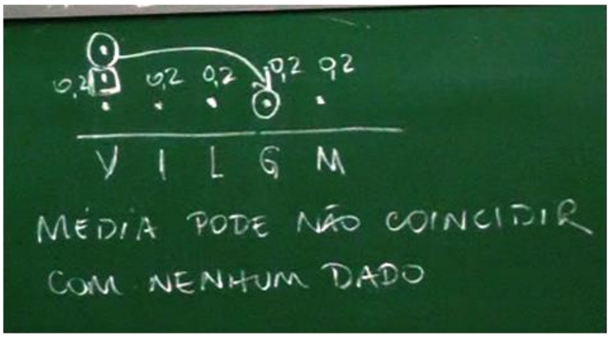

Figura 13 - Representação da média como valor que torna a distribuição equitativa (irmãos).
Fonte: Os autores.

O gráfico representa que, ao realizar a redistribuição da quantidade de irmãos visando ao equilíbrio, cada colega ficaria com um irmão e "sobraria" um. Assim, o 0,2 que compunha o valor da média nada mais era que a fração desse "um inteiro" em cinco partes.

Considerações Finais

Assumimos por objetivo investigar as ideias relacionadas às medidas de tendência central emergentes em um conjunto de aulas de Estatística na perspectiva do Ensino Exploratório. Os dados apresentados sugerem que a prática de Ensino Exploratório possibilita aprendizagem mútua, em que o aluno ensina quando aprende e o professor aprende quando ensina, nas sábias palavras de Paulo Freire.

No que se refere às aprendizagens dos alunos, ao trabalharem com a tarefa, ficou evidente a mobilização de raciocínio estatístico no decorrer do desenvolvimento das estratégias de resolução. Assim, todas as fases da aula na perspectiva do Ensino Exploratório contribuíram significativamente para a aprendizagem dos alunos, cujo conjunto aponta um encaminhamento promissor para as aulas de Matemática e, no caso particular, de Estatística. Exemplos disso foram as dúvidas quanto à terminologia estatística; os esclarecimentos e questionamentos presentes no desenvolvimento intragrupo da tarefa (muitas vezes decorrentes de ações instrucionais do professor); os argumentos apresentados nas discussões e as interações ocorridas; bem como as ideias que surgiram e se elucidaram na fase de sistematização.

Apesar dos equívocos conceituais apresentados em suas resoluções, as interações com os colegas de grupo, entre os grupos e com o professor suscitaram o "pensar estatisticamente", a partir da mobilização dos cinco elementos que constituem o processo de significação dos entes estatísticos, nomeadamente:

- *elementos extensivos*: ao discutir a adequabilidade das medidas para as situações presentes na tarefa, os alunos foram incitados a pensar contextos nos quais as medidas de tendência central se fazem presentes e adequadas;
- *elementos de atuação*: ao elaborarem cálculos e justificações para as estratégias empregadas em suas resoluções;
- *elementos intensivos*: as características das diferentes medidas de tendência central, suas propriedades e definições;
- *elementos ostensivos*: os registros aritméticos, gráficos, linguagem escrita e explicações orais utilizados para exploração e significação das ideias estatísticas;
- *elementos validativos*: argumentos e justificações para as estratégias de resolução empregadas e para a suas compreensões.

Dessa forma, a perspectiva do Ensino Exploratório parece favorecer sobremaneira a mobilização dos elementos apontados por Batanero (2000), como proporcionadores da compreensão estatística, de modo a superar as dificuldades e equívocos evidenciados pelas pesquisas (BATANERO, 2000; CARVALHO, 2008; WATSON; MORITZ, 1999).

Com relação às aprendizagens do professor, fica evidente a necessidade de ele, além de preparar sua aula, estar preparado para ela, à medida que a perspectiva de Ensino Exploratório possibilita uma infinidade de caminhos e raciocínios, os quais demandam conhecimento estatístico e pedagógico de estatística para sua compreensão e encaminhamento, conforme evidenciado nas análises. Caso o professor não esteja preparado, ele pode perder oportunidades promissoras, das quais deve tirar vantagem de acordo com os objetivos da aula.

Contudo, por melhor que tenha sido seu planejamento, a criatividade dos raciocínios dos alunos parecem-nos ser capaz de surpreender sempre. Não consideramos este aspecto algo que desabone a perspectiva de Ensino Exploratório, muito pelo contrário. Esta característica é uma mais valia ao processo didático, à medida que traz o aluno para o centro da atividade didática, cuja aprendizagem se dá de forma autônoma, crítica, social e colaborativa.

Assim, acreditamos que uma aula de Estatística na perspectiva do Ensino Exploratório pode contribuir em grande medida para o enfrentamento das dificuldades relacionadas ao ensino de Estatística na Educação Básica, ampliando ideias e possibilitando a mobilização de raciocínio e da argumentação estatística.

Referências

BATANERO, C. Significado y comprensión de las medidas de posición central. **UNO**, n. 25, p. 41-58, 2000.

BATANERO, C.; BURRILL, G.; READING, C. Overview: challenges for teaching statistics in school mathematics and preparing mathematics teachers. In: BATANERO, C.; BURRILL, G.; READING, C. (Eds.) **Teaching Statistics in School Mathematics - Challenges for Teaching and Teacher Education**: A Joint ICMI/IASE Study. London: Springer, 2011. p. 407- 418.

CANAVARRO, A. P. Ensino exploratório-investigativo da Matemática: práticas e desafios. **Educação e Matemática**, n. 115, p.11-17, nov./dez., 2011.

CANAVARRO, A.; OLIVEIRA, H.; MENEZES, L. Práticas de ensino exploratório da matemática: o caso de Célia. *In:* Encontro de Investigação em Educação Matemática 2012: Práticas de ensino da Matemática. Castelo de Vide. **Actas...** Portalegre: SPIEM, 2012. p. 255–266.

CARVALHO, C. Desafios para o trabalho colaborativo nas aulas de estatística. In: MACHIN, M. C.; MARTÍNEZ, P. F.; CATALÁN, M. P. B. (Eds.) **Anais del XI Simposio de la SEIEM**. Laguna: SEIEM, 2008. p. 141-156

CENGIZ, N.; KLINE, K.; GRANT, T. J. Extending students' mathematical thinking during whole-group discussions. **Journal of Mathematics Teacher Education**, v. 14, n. 5, p. 355-374, 2011.

CHICK, H. L.; PIERCE, R. U. Teaching statistics at the primary school level: beliefs, affordances, and pedagogical content knowledge. In: BATANERO, C.; BURRILL, G.; READING, C.; ROSSMAN, A. (Eds.) **Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education**. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference. Monterrey: ICMI & IASE, 2008.

COBO, B.; BATANERO, C. La mediana en la educación secundaria obligatoria: ¿un concepto sencillo?. **UNO**, n. 23, p. 1-6, 2000.

CYRINO, M. C. C. T. (Ed.) **Recurso Multimídia para a Formação de Professores que Ensinam Matemática:** elaboração e perspectivas. Londrina: EDUEL, 2015, no prelo.

CYRINO, M. C. C. T.; OLIVEIRA, H. Casos Multimídia sobre o Ensino Exploratório na Formação de Professores que Ensinam Matemática. In: CYRINO, M. C. C. T. (Ed.) **Recurso Multimídia para a Formação de Professores que Ensinam Matemática:** elaboração e perspectivas. Londrina: EDUEL, 2015, no prelo.

CYRINO, M. C. C. T.; TEIXEIRA, B. R. O Ensino Exploratório e a Elaboração de um *framework* para os Casos Multimedia. In: CYRINO, M. C. C. T. (Ed.) **Recurso Multimídia para a Formação de Professores que Ensinam Matemática:** elaboração e perspectivas. Londrina: EDUEL, 2015, no prelo.

ESTEVAM, E. J. G.; CYRINO, M. C. C. T. Educação Estatística e a Formação de Professores de Matemática: cenário de pesquisas brasileiras. **Zetetiké**. Campinas, v. 22, p. 123-149, 2014.

JACOBBE, T.; CARVALHO, C. Teachers' Understanding of Averages. In: BATANERO, C.; BURRILL, G.; READING, C. (Eds.) **Teaching Statistics in School Mathematics - Challenges for Teaching and Teacher Education:** A Joint ICMI/IASE Study. London: Springer, 2011. p. 199-210.

LINS, R. C. O Modelo dos Campos Semânticos: estabelecimentos e notas de teorizações. In: ANGELO, C. L. et al. (Orgs.). **Modelos dos Campos Semânticos e Educação Matemática:** 20 anos de historia. São Paulo: Midiograf, 2012. p. 11-30.

OLIVEIRA, H.; CYRINO, M. Developing knowledge of inquiry-based teaching by analysing a multimedia case: One study with prospective mathematics teachers. **SISYPHUS**, v. 1, n. 3, p. 214-245, 2013.

OLIVEIRA, H.; MENEZES, L.; CANAVARRO, A. P. Conceptualizando o ensino exploratório da Matemática: Contributos da prática de uma professora do 3.º ciclo para a elaboração de um quadro de referência. **Quadrante**, v. 22, n. 2, p. 29-53, 2013.

PONTE, J. P. Gestão Curricular em matemática. In: GTI (Ed.). **O professor e o desenvolvimento curricular**. Lisboa: Associação de Professores de Matemática, 2005. p. 11-34.

PONTE, J. P. Preparing Teachers to Meet the Challenges of Statistics Education. In: BATANERO, C.; BURRILL, G.; READING, C. (Eds.) **Teaching Statistics in School Mathematics - Challenges for Teaching and Teacher Education**: A Joint ICMI/IASE Study. London: Springer, 2011. p. 299-310.

STEIN, M. K.; SMITH, M. S. Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. **Mathematics Teaching in the Middle School**, v. 3, n. 4, p. 268-275, 1998.

STEIN, M. K.; ENGLE, R. A.; SMITH, M. S.; HUGHES, E. K. Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. **Mathematical Thinking and Learning**, v. 10, n. 4, p. 313-340, 2008.

WATSON, J. M.; MORITZ, J. B. The developments of concepts of average. **Focus on Learning Problems in Mathematics,** v. 21, n.4, p. 15–39, 1999.

Submetido em maio de 2015

Aprovado em setembro de 2015