



**Um Estudo sobre as Contribuições de Felix Klein para a  
Introdução das Transformações Geométricas nos Currículos  
Prescritos de Matemática do Ensino Fundamental**

*A Study on the Contributions of the Felix Klein for the Introduction of  
Geometric Transformations in Mathematics Prescribed Curriculum of the  
Elementary School*

Júlio César Deckert da Silva<sup>1</sup>

Ruy César Pietropaolo<sup>2</sup>

**Resumo**

O presente trabalho tem por objetivo descrever e analisar os resultados das pesquisas realizadas por Felix Klein durante o século XIX referentes ao estudo das Transformações Geométricas e sua aplicação ao ensino de Geometria, bem como as propostas de Klein para a inserção das transformações nos currículos prescritos de matemática do ensino secundário. Apresenta-se neste estudo a análise dos pressupostos do programa científico de Klein e de seu livro de Geometria, sobretudo em relação às Transformações Geométricas. Além disso, foram verificadas as indicações do IMUK para o ensino das transformações durante os congressos internacionais de matemáticos ocorridos no século XX. Este estudo mostra que o tema Transformações Geométricas é bastante destacado na Reforma Francisco Campos, seguindo as recomendações de Felix Klein.

**Palavras-chave:** Educação Matemática. Reformas Curriculares. Transformações Geométricas. História das Disciplinas.

**Abstract**

The presentwork aims at describing and analyzing research results carried out by Felix Klein during the 19th century referring to study of Geometric Transformations and its application to teaching of Geometry, as well as proposals made by Felix Klein for the insertion of transformations in the mathematics prescribed curriculum of the secondary school. This study presents an analysis some assumptions of the scientific programme elaborated by Klein and some indications from his Geometry book, mainly in relation of Geometric Transformations. In addition, was verified the orientations of the IMUK for the teaching of Geometric Transformations during international congresses of mathematicians occurring on the 20th century. This study shows that the theme

<sup>1</sup>Mestre em Educação Matemática pelo Programa de Pós-Graduação da Universidade Anhanguera de São Paulo/ UNIAN-SP. Professor e pesquisador na Secretaria de Estado da Educação. São Paulo/SP. Brasil E-mail: deckertunibananhanguera@gmail.com

<sup>2</sup>Doutor em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo/PUC-SP. Professor e pesquisador na Universidade Anhanguera de São Paulo/UNIAN-SP. São Paulo/SP. Brasil E-mail: rpietropaolo@gmail.com

Geometric Transformations is emphasized in the Francisco Campos Reform, following the recommendations of the Felix Klein.

**Keywords:** Mathematics Education. Curricular Reforms. Geometric Transformations. History of Subjects.

## Introdução

O presente trabalho foi desenvolvido no âmbito da Linha de Estudos “Formação de Professores que Ensinam Matemática” do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Anhanguera de São Paulo. Sua finalidade foi investigar as indicações de Felix Klein referentes à introdução do estudo das Transformações Geométricas nos currículos prescritos de matemática do Ensino Fundamental, bem como as aplicações do estudo das transformações no ensino da Geometria durante o primeiro movimento de renovação curricular da matemática secundária.

As pesquisas realizadas por Felix Klein impulsionaram o desenvolvimento dos diferentes ramos da matemática no século XX, principalmente no que tange ao ensino de Geometria por meio de transformações, o que dentre outros fatores de âmbito sócio-político, econômico e tecnológico, desencadearam a necessidade de reformulação da disciplina matemática nos programas curriculares das escolas secundárias.

As Transformações Geométricas constituem um conteúdo indispensável para o desenvolvimento do pensamento geométrico dos alunos, pois permite explorar conceitos e propriedades da Geometria, por meio da experimentação e do movimento. No contexto atual podemos observar que as Transformações Geométricas estão presentes nos currículos prescritos do Ensino Fundamental, fato este que nos motiva a pesquisar o desenvolvimento desse conteúdo em tempos passados, procurando identificar os aspectos por meio dos quais o estudo das transformações foi introduzido nos currículos de matemática do século XX, em especial na Reforma Francisco Campos de 1931. Além disso, procuramos analisar e descrever as finalidades com que o estudo das transformações é indicado nessa reforma.

Neste estudo, as discussões referentes às reformas curriculares estão fundamentadas nas pesquisas de Dominique Julia e de Antonio Viñao, mais especificamente no que concerne à relação estabelecida entre os currículos prescritos e a cultura escolar. Para desenvolver esse trabalho foram também considerados essenciais os estudos de André Chervel, que enfatizam os currículos como documentos que expõem a importância dos conteúdos escolares para o desenvolvimento da História das Disciplinas e os estudos de Alain Choppin, concernentes às finalidades dos manuais escolares.

## Fundamentação teórica

A cultura que historicamente emergiu do contexto escolar e que, dentre outras finalidades, contempla as práticas educativas associadas aos processos de ensino e de aprendizagem, tem sido atualmente investigada por historiadores que intentam compreender o desenvolvimento do campo educacional. Hoje, a cultura escolar, em seu contexto histórico, se constitui como um campo de pesquisa importante por possibilitar aos pesquisadores estudar o contexto escolar e suas finalidades educacionais.

Em sua pesquisa, Julia (2001) salienta que essa cultura é constituída pelas relações que são determinadas entre um conjunto de regulamentos pelos quais os conhecimentos pertinentes ao ensino escolar são definidos, bem como as atividades escolares referentes ao desenvolvimento desses conhecimentos e por um conjunto no qual estão imersas as práticas pedagógicas que refinam esses conhecimentos, adaptando-os ao ensino e agregando as atividades escolares ao campo educacional:

[...] Para ser breve, poder-se-ia descrever a cultura como um conjunto de normas que definem conhecimentos a ensinar e condutas a inculcar, e um conjunto de práticas que permitem a transmissão desses conhecimentos e a incorporação desses comportamentos [...] (JULIA, 2001, p. 10).

O campo disciplinar, em seu contexto histórico, explicita a flexibilidade autônoma dos docentes para desenvolver o ensino escolar de maneira coerente aos fundamentos do campo educacional. As disciplinas não devem ser investigadas somente em seu ensino atual, mas também no percurso histórico de seus ensinamentos em tempos passados, para que possam ser estudadas e compreendidas as suas relações. Essas disciplinas explicitam em seu desenvolvimento os fundamentos que alicerçam a cultura escolar, os quais predominam nas práticas educativas e nos processos de ensino.

As reformas curriculares determinam novas funções educativas para o contexto escolar, as quais se configuram tanto implícita como explicitamente. No estudo dos currículos os historiadores devem observar as finalidades que são explicitadas nesses documentos para o ensino e aquelas que implicitamente são almejadas, bem como as distinções entre elas.

Para Viñao (2007), o desenvolvimento dos sistemas educacionais está efetivamente relacionado a uma integração entre as reformas curriculares e as diversas culturas dos educadores. Por meio dessa integração o contexto escolar define, com autoridades reformadoras e com a classe docente, suas acepções educativas. Portanto, toda alteração que se instaura em um determinado sistema educacional desprende mudanças nas instituições que orienta.

Segundo Viñao (2007), o fracasso das reformas escolares ocorre porque os currículos são concebidos como instrumentos que não promovem interação entre o contexto escolar e os ensinamentos provindos das experiências dos professores. Assim, os currículos são elaborados para seguir os objetivos dos legisladores e não respaldam o trabalho docente.

A implementação das macrorreformas modifica efetivamente a cultura escolar. Os docentes, em virtude do desconhecimento dos pressupostos reformadores, procuram não agregar as orientações dos currículos quando lecionam. Dessa maneira, as propostas dessas reformas são ignoradas e sua implantação se reduz a uma exposição teórica malsucedida:

As macrorreformas estruturais e curriculares elaboradas desde a consolidação do campo político administrativo modificam, pois, a cultura das instituições escolares. Em plena supremacia, no geral elas se opõem – por sua característica e natureza omnicomprensiva –, esta última, assim como, de modo particular, a cultura acadêmica docente, todo o conjunto de crenças, mentalidades, práticas de interação e de trabalho adquiridas no decurso do tempo, enraizadas e transmitidas, mas não imutáveis, que passam de uma geração para outra, contra as ações dos professores diante de suas tarefas cotidianas, em suas aulas ou fora delas no modo de conceber e aplicar no seu trabalho as prescrições e orientações administrativas. É daí que surgem os atrasos na aplicação das reformas, a desvalorização dos seus objetivos iniciais, sua substituição por procedimentos formais burocráticos e por último o evidente fracasso de todas elas (VIÑAO, 2007, p. 11).

Nos últimos anos, o ensino escolar vem se transformando em objeto de muitas pesquisas científicas. Segundo Chervel (1988), o processo complexo de desenvolvimento dos sistemas educacionais, aqueles que determinam às instituições escolares suas acepções, suas disciplinas e as legalizam para o usufruto de um determinado público, tem sido discutido entre os educadores. Muitas vezes, ao tentar compreender os sistemas educacionais, educadores decidem pesquisar o desenvolvimento e a inserção de disciplinas em programas curriculares ou em livros didáticos.

Para Chervel (1988), os conteúdos escolares, em seu desenvolvimento didático, constituem uma grande incógnita na história do contexto educacional. No momento em que o pesquisador se dedica intensamente a uma investigação mais abrangente sobre os conteúdos do contexto escolar, buscando a compreensão do percurso histórico que envolve as modificações do seu ensino, é que se pode observar o primoroso significado desses conteúdos. Estes se transformam em meio a consultas indispensáveis à reflexão do pesquisador acerca das acepções disciplinares delegadas pelos sistemas educacionais nas problemáticas relacionadas ao seu desenvolvimento histórico nos programas curriculares.

O estudo das finalidades, segundo Chervel (1988), se inicia com a análise de programas curriculares, os quais apresentam prescrições específicas relacionadas aos conteúdos e também aos procedimentos que contemplam adequadamente seu ensino.

Agregados ao estudo dos currículos, outros documentos que também permitam identificar procedimentos e processos de ensino se transformam em meios de consulta imprescindíveis para se realizar um trabalho mais aprofundado acerca das finalidades do ensino:

Neste estágio, uma primeira documentação abre-se imediatamente diante do historiador, a série de textos oficiais programáticos, discursos ministeriais, leis, ordens, decretos, acordos, instruções, circulares, fixando os planos de estudos, os programas, os métodos, os exercícios etc. O estudo das finalidades começa evidentemente pela exploração deste corpus. Aí juntam-se ou preferencialmente os precedem os planos de estudos, os tratados de estudos, os “ratio”, os regulamentos diversos que, sob o Antigo Regime, expõem os objetivos que perseguem os colégios das universidades ou das congregações, ou as escolas [...] (CHERVEL, 1988, p. 76).

Os manuais didáticos explicitam para os docentes as prescrições curriculares para o ensino dos conteúdos, adaptando-os às finalidades do contexto escolar. Em sua pesquisa, Choppin (2001) enfatiza que o estudo das coleções de livros didáticos constitui um campo de pesquisa de grande importância para os pesquisadores que procuram compreender a complexidade de desenvolvimento dos sistemas educacionais no momento em que se atém a investigar os problemas concernentes à história da Educação.

Os livros cuja especificidade é sua efetiva utilização no meio escolar possibilitam aos historiadores caracterizar as articulações promovidas entre as orientações curriculares e sua adequação aos objetivos docentes. Para compreender as funções desses livros, bem como as finalidades da sua utilização, é importante para o pesquisador refletir sobre as prescrições curriculares impostas ao seu desenvolvimento e, dessa maneira, o conhecimento das orientações curriculares precede qualquer pesquisa mais profunda acerca dos livros escolares:

Mas se os manuais constituem, para o historiador, uma fonte privilegiada, não é somente pela riqueza e pela multiplicidade de olhares que ele pode impelir sobre eles.

Em primeiro lugar, o livro de classe situa-se na articulação entre as prescrições impostas, abstratas e gerais dos programas oficiais – quando existem e o discurso singular e concreto, mas por natureza efêmera, de cada professor na sua classe. O manual constitui um testemunho escrito, portanto permanente, infinitamente mais elaborado, mais detalhado, mais rico que as instruções que supõe preparar.

Seja qual for a importância que concedermos aos manuais, eles não constituem uma fonte isolada: os regulamentos escolares, os programas e instruções, os debates divulgados na imprensa de opinião ou nas revistas profissionais, os outros instrumentos (cadernos, cartas murais, ...), mas também as outras produções contemporâneas destinadas à juventude fora do âmbito propriamente escolar, constituem, do mesmo modo, meios de desvelar os contextos institucionais, políticos, científicos, culturais, religiosos, pedagógicos etc. de sua concepção, sua produção e seus usos. Nota-se, aliás, que, antes de se interessar pelo recenseamento dos manuais escolares, os historiadores geralmente se preocupam em inventariar os programas de ensino (CHOPPIN, 2001, p. 14-15).

Os pesquisadores, ao realizarem investigações referentes aos manuais utilizados no contexto escolar devem conceber esses documentos como instrumentos de ensino, utilizados

constantemente por professores na estruturação dos cursos que ministram e na preparação sequencial de suas aulas, e não como simples objetos de leitura. Trata-se de fontes cuja análise se demonstra complexa, pois os manuais se relacionam diretamente com os indivíduos que os utilizam e com as finalidades didáticas que adquirem em contextos educacionais.

### Procedimentos metodológicos

Nossos procedimentos de pesquisa nos levam a identificar os fatores que possibilitaram o desenvolvimento das Transformações Geométricas no século XIX, as relações estabelecidas entre o estudo das transformações e o ensino de Geometria, as indicações de Felix Klein para a inserção das transformações nos programas curriculares de matemática do ensino secundário durante o século XX e também os pressupostos da reforma Francisco Campos (1931) para o ensino desse conteúdo. A análise da Reforma Francisco Campos, além de abordagens e de metodologias indicadas para o ensino das transformações, nos remete a identificar as influências do ideário de Felix Klein nessa reforma para o estudo de Geometria nos anos finais do Ensino Fundamental.

Para atingir nossos pressupostos investigativos optamos por analisar os documentos de Felix Klein, tais como o Programa de Erlangen (1872) e o seu livro de Geometria intitulado *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte Aus. Teil II: Geometrie*, publicado em Leipzig, no ano de 1909. Consideramos o livro de Felix Klein como uma fonte de investigação imprescindível à nossa pesquisa por se tratar de um manual didático produzido a partir de palestras e de notas de aula de Klein, utilizado em cursos de formação de professores de matemática. Procuramos analisar também as propostas feitas por Felix Klein aos educadores durante os congressos internacionais de matemática que foram organizados pelo IMUK no século XX.

Depois disso, fazemos uma análise e descrição dos pressupostos da Reforma Francisco Campos para o ensino das Transformações Geométricas, procurando descrever os seguintes fatores:

- Procedimentos didáticos para o ensino desse conteúdo, em sua exposição e abordagem;
- Abordagens conceituais do conteúdo;
- Sugestões de ensino;



- Objetivos curriculares associados à aprendizagem dos estudantes no ensino das Transformações Geométricas.

### **Felix Klein e o estudo das transformações**

Felix Christian Klein nasceu na Alemanha no ano de 1849. Em seu ingresso na Universidade de Bonn em 1865 Klein decide concentrar seus estudos em duas áreas: Matemática e Física. Em 1868 ele obtém o título de doutor ao concluir sua tese relacionada ao campo da Geometria.

Em seus estudos, Yaglom (1988) enfatiza que, no ano de 1870, Felix Klein, com o professor Sophus Lie<sup>3</sup>, se reuniu em Paris com o matemático Camille Jordan<sup>4</sup>, um pesquisador dedicado a difundir os estudos de Galois<sup>5</sup> para estudar os recentes avanços obtidos no estudo das Simetrias.

Segundo Yaglom (1988), Jordan explicita que as isometrias estavam organizadas em dois grupos: discretos e contínuos. Os grupos discretos eram grupos formados por isometrias de cristais e os grupos contínuos eram constituídos por isometrias que notoriamente se modificavam, passando de um conjunto de Transformações Geométricas aplicado a pontos ou figuras no plano para outro conjunto de transformações quando se modificavam os coeficientes das equações que caracterizavam a isometria. Dessa maneira, uma rotação aplicada a um ponto do plano poderia facilmente ser transformada em reflexão ou translação aplicada no mesmo ponto, modificando os coeficientes da equação de rotação.

Yaglom (1988) ressalta que, em seu trabalho, Klein conclui que as propriedades dos entes geométricos permanecem invariantes, independentemente do conjunto de transformações aplicado sobre ele. Jordan acreditava que esse grupo contínuo de transformações constituía a Geometria Euclidiana e a Geometria afim, e que a teoria dos grupos seria utilizada no futuro para reestruturar as diferentes Geometrias.

Depois de estudar com Jordan as pesquisas de Galois referentes a esse tema, Felix Klein e Sophus Lie decidem se dedicar integralmente a formalizar uma teoria para o estudo dos grupos contínuos. Em 1870, Sophus Lie fundamenta sua teoria para os conjuntos de transformações relacionando-os aos sistemas algébricos. Depois de estudar as diversas

<sup>3</sup>Marius Sophus Lie (1842-1899), matemático norueguês que, com Felix Klein, formulou a teoria dos grupos contínuos de Transformações Geométricas (YAGLOM, 1988, p. 2).

<sup>4</sup>Marie Camille Jordan (1838-1922) foi um matemático francês notável por divulgar em suas obras os estudos de Galois referentes ao desenvolvimento da teoria dos grupos (YAGLOM, 1988, p. 3).

<sup>5</sup>Évariste Galois (1811-1832) matemático francês que, dentre seus muitos estudos em álgebra, formulou a base para o estudo dos grupos (YAGLOM, 1988, p. 5).

propriedades de curvas tangentes no plano, Lie define as estruturas dos conjuntos de transformações. A teoria de Lie permitiu caracterizar as propriedades dos grupos e subgrupos de Transformações Geométricas.

Em 1871, Felix Klein retorna de Paris para a Alemanha dedicando-se a lecionar Matemática na universidade de Göttingen e, em 1872, Klein torna-se professor da Universidade de Erlangen. No mesmo ano, ele apresenta à universidade um programa expondo uma nova estruturação para a Geometria fundamentada nas teorias de Lie para os grupos contínuos de transformações. Esse programa, originalmente intitulado “Considerações Comparativas referentes a Recentes Investigações Geométricas”, passou a ser denominado pela comunidade acadêmica como “Programa de Erlangen”. Nesse programa, Klein utiliza as Transformações Geométricas para relacionar as Geometrias. (YAGLOM, 1988).

Dessa maneira, as Geometrias são estudadas com ênfase nas suas transformações, sendo caracterizadas por funções. Para Klein, a Geometria é o campo da Matemática que estuda as propriedades das figuras que permanecem invariantes diante da aplicação de um determinado conjunto de transformações.

A principal discussão proposta por Felix Klein no seu programa está relacionada à aplicação das Transformações Geométricas em pontos do espaço, objetivando facilitar o estudo das propriedades de diversos entes geométricos. Nesse contexto, o programa define determinados conjuntos de transformações que verificam a propriedade de composição como grupos:

A principal ideia que norteia nossas discussões se refere ao grupo das transformações do espaço. A composição de certos números de transformações do espaço é sempre equivalente a uma de suas transformações. Agora, se um determinado conjunto de transformações tem a propriedade de, a partir da composição de alguns de seus elementos, produzir outras transformações nele contidas, então esse conjunto será denominado grupo de transformações (KLEIN, 1872, p. 5).

Por meio dessa definição são discutidas teorias associadas à conservação das formas geométricas e das suas propriedades. Essas teorias permitem definir, a partir de grupos distintos de transformações, o grupo principal e suas aplicações no estudo da invariância geométrica:

Agora vejamos que são as transformações do espaço que preservam as propriedades geométricas das configurações que permanecem inalteradas. Essas propriedades são preservadas, independentemente da posição ocupada no espaço pela configuração em questão, da sua grandeza absoluta e finalmente da ordem em que os elementos dessa configuração se ajustam. As propriedades de uma configuração permanecem inalteradas sob a ação de determinados movimentos do espaço representados por meio da transformação dessa configuração em configurações similares, da sua transformação em configurações simétricas contidas num plano (simetria de



reflexão), bem como na composição dessas transformações. A totalidade dessas transformações nós definimos como o grupo principal das transformações do espaço; as propriedades geométricas não são modificadas pelas transformações do grupo principal. E consequentemente as propriedades geométricas são caracterizadas por permanecerem invariantes sob a aplicação das transformações do grupo principal. No entanto, se nós considerarmos o espaço imóvel, caracterizado por movimentos rígidos, os quais preservam todos os seus elementos, então poderemos observar que toda figura possui uma característica que a distingue das demais; assim todas as propriedades dessa figura, caracterizada por sua unicidade, somente serão preservadas sob a ação do grupo principal. Essa teoria, até agora formulada de maneira informal, será abordada com maior ênfase no decurso de nossas discussões (KLEIN, 1872, p. 6-7).

Depois de serem discutidas as características do conjunto das Transformações Geométricas no espaço, as propriedades desse conjunto são estendidas a todos os grupos distintos de transformações, definidos para quaisquer dimensões. Partindo dessa teorização, o programa propõe o desenvolvimento da Geometria por meio do estudo da invariância geométrica das figuras gerada por um determinado conjunto de transformações:

Deixe-nos agora discutir a concepção concreta do espaço, a qual não é suficiente para os matemáticos, pois se restringe ao estudo dos elementos em três dimensões. Podemos perceber que as Transformações Geométricas do espaço que tanto enfatizamos formam grupos. Mas todos os grupos de transformações que não possuem relações com o espaço tridimensional, também devem ser concebidos com igual importância. Dessa maneira, a generalização da Geometria se constitui das investigações relacionadas ao seguinte problema:

Dada uma dimensão e um grupo de transformações contido nessa dimensão; investigar as características das configurações geradas por esse grupo nessa dimensão para identificar as suas propriedades invariantes (KLEIN, 1872, p. 7).

A Geometria é definida, segundo Klein (1872), em uma determinada dimensão por um certo grupo de transformações que interagem nessa dimensão. Modificando as estruturas desses grupos, criam-se outros grupos, e dessa maneira outras Geometrias. Os grupos de transformações afins são criados por alterações estruturais do grupo das isometrias, os quais constituem a Geometria Euclidiana. O mesmo ocorre com as transformações projetivas concebidas a partir de alterações do grupo afim. Partindo-se do grupo projetivo de transformações, são criadas as Geometrias não Euclidianas.

### **Uma análise das indicações do livro *Elementarmathematik vom höheren Standpunkten Aus. Teil II: Geometrie para o estudo das transformações geométricas***

O livro *Elementarmathematik vom höheren Standpunkten Aus. Teil II: Geometrie*, publicado em 1909, é o resultado das teorias do Programa de Erlangen e das diversas discussões de Felix Klein em palestras, congressos e nos cursos de formação ministrados por ele em Göttingen no ano de 1908 referentes à necessidade de reformulação curricular da

Matemática secundária e à formação dos futuros professores secundários. A obra de Klein está estruturada em três blocos. No primeiro bloco o autor se dedica a descrever os entes geométricos e suas propriedades em uma determinada dimensão. No segundo bloco, Klein (1909) enfatiza o estudo das Transformações Geométricas. No último bloco são discutidos tópicos concernentes à estruturação axiomática da Geometria e à aplicação das transformações no seu ensino.

Na proposição do ensino das transformações, Klein (1909) inicia sua discussão ressaltando a importância do emprego das Transformações Geométricas no desenvolvimento científico da Geometria. Para ele, o estudo das Transformações Geométricas nas escolas expõe para os professores a proposta do 1.º movimento de modernização da Matemática secundária de estruturar o ensino da Matemática por meio do conceito de função:

O que vamos fazer agora é iniciar um dos capítulos mais importantes da Geometria científica. As discussões que fazemos aqui constituem um ensaio fundamental para o ensino escolar. As Transformações Geométricas não são nada mais do que uma generalização da simples noção de função, da qual em nossas concepções reformadoras nos empenhamos em fazer dela o ponto central da instrução Matemática (KLEIN, 1909, p. 139-140).

No referido livro, as Transformações Geométricas são estudadas de maneira analítica por meio da inserção do sistema de coordenadas e do conceito de vetor. As funções aplicadas aos pontos desse sistema são concebidas como transformações que geram os movimentos dos pontos no plano segundo uma direção vetorial. Para determinar uma translação a um ponto  $(x, y)$  do plano é utilizada a função  $P(x, y) = (x + a, y + b)$  representando o movimento dos pontos na direção do vetor  $(a, b)$ . O autor utiliza essa transformação para transportar uma figura em outra congruente a inicial, preservando as distâncias entre os elementos das duas figuras e as medidas dos seus ângulos.

A simetria axial em relação ao eixo horizontal é definida pela função  $P(x, y) = (x, -y)$ . Por meio dessa transformação são obtidas figuras congruentes. Nessas figuras as distâncias entre os seus pontos, seus segmentos e as medidas dos seus ângulos permanecem invariantes. A simetria de rotação é definida pela função  $P(x, y) = (x \cos(a) - y \sin(a), x \sin(a) + y \cos(a))$ . Essa transformação é também utilizada no estudo da congruência de duas representações geométricas apresentando a mesma invariância dos elementos que as transformações anteriores.

Essas três Transformações Geométricas e as suas combinações constituem um conjunto de isometrias. O autor utiliza a função  $P(x, y) = (kx, ky)$  para definir a homotetia como um subgrupo da semelhança e aplica essa transformação a uma figura para transportá-la para figuras semelhantes de diferentes dimensões, invariando as razões entre os segmentos

correspondentes e os ângulos das figuras homotéticas em relação a figura original. A homotetia também se caracteriza por manter o paralelismo dos segmentos correspondentes e nela a correspondência dos pontos da figura homotética com os da figura original é estabelecida em função do centro da homotetia.

No seu livro, Klein (1909) propõe o estudo da semelhança definindo uma função com a finalidade de transportar uma figura em outra semelhante, preservando as suas propriedades. Essa função é também um conjunto que contém as translações, a simetria axial, a homotetia, a rotação e suas possíveis composições.

As Transformações Geométricas relacionadas à Geometria projetiva e à Geometria afim são definidas de maneira análoga, por funções. As transformações afins aplicadas a uma figura conservam o paralelismo dos segmentos, a razão entre os pares de segmentos dispostos na mesma reta, o ponto médio desses segmentos, o baricentro dos triângulos e a razão obtida pelas áreas da figura transformada e da figura original. As transformações projetivas conservam a posição dos pontos contidos em uma curva, a colinearidade dos pontos das figuras e as suas intersecções.

Klein (1909) não enfatiza os aspectos geométricos das figuras recorrendo à sua imediata visualização. Esse autor prioriza a caracterização algébrica das representações geométricas. Para ele, o conjunto de transformações de cada Geometria forma um grupo, mantendo sua estrutura algébrica. São as Transformações Geométricas que permitem a transição de uma figura para outra, na qual são transferidas as propriedades da figura inicial para a figura obtida por transformação.

Dessa maneira, as Transformações Geométricas são empregadas no estudo de figuras complexas com a finalidade de transformar essas figuras em representações geométricas mais simples de serem estudadas. Por meio desse desenvolvimento, o autor propõe que o estudo das diferentes Geometrias seja desenvolvido mediante a caracterização dos invariantes das figuras que estão sob a aplicação dos respectivos grupos de transformações de cada Geometria.

Assim, Klein define a Geometria Euclidiana como o estudo das propriedades das representações geométricas que são preservadas sob a aplicação das transformações do conjunto semelhança. A Geometria afim e a Geometria projetiva também são definidas relativamente aos invariantes que resultam da aplicação de seus respectivos conjuntos de transformações. Por meio das transformações, Klein (1909) demonstra que as estruturas que constituem as Geometrias projetiva e afim emergem da Geometria Euclidiana, e que todos os teoremas verificados nessas duas Geometrias o são também na Geometria Euclidiana.

As proposições de Klein (1909) para o ensino das Transformações Geométricas se encerram com suas discussões referentes ao estudo dos objetos suscetíveis a deformações no espaço, os quais procuravam caracterizar os invariantes desses objetos prenunciando assim o desenvolvimento da topologia. Ao final do seu livro, o autor propõe a substituição dos axiomas da Geometria Euclidiana pela aplicação do seu grupo de transformações num determinado plano, procurando contemplar o estudo da Geometria por meio do movimento, alegando que a Matemática havia atingido um patamar de evolução que não permitia aos matemáticos estruturar a Geometria por meio de um logicismo axiomático.

### **Transformações geométricas: novos conteúdos**

Durante o V Congresso Internacional de Matemática, realizado em Cambridge no ano de 1912, a principal questão colocada em discussão pelo IMUK (Comissão Internacional de Instrução Matemática) estava relacionada à inserção do conteúdo funções no ensino de Geometria. Felix Klein, com a sua comissão, defendia que o estudo dedutivo da Geometria Euclidiana nas escolas secundárias deveria ser precedido por métodos que enfatizassem a experimentação e a intuição:

A maior de todas as questões que dizem respeito à educação está relacionada ao modelo de Geometria a ser ensinado e ao tratamento do conceito de função. A partir dessa problemática acreditamos que muitas outras questões possam surgir nas discussões entre os matemáticos. Começamos refletindo sobre uma indagação recente: Será que a Geometria das escolas secundárias se desenvolve por meio de uma relação estabelecida entre intuição e dedução? Poucos matemáticos estão dispostos a responder essa pergunta, pois a maioria prefere começar ensinando a Geometria de Euclides ou de Legendre. Entretanto, concebemos que deve haver um curso preparatório, e esse curso deve ser caracterizado pela intuição e pela experimentação. Mas quanto tempo deve ser atribuído a esse curso? E exatamente que lacunas da Geometria devem ser cobertas? E, o mais importante, até que ponto esse curso pode substituir, por meio da intuição, a Geometria dedutiva de Euclides? Devemos realizar esse novo curso para reforçar a Geometria dedutiva ou para excluí-la de vez dos currículos? Como a Geometria rigorosa deve ser ensinada para os alunos que não possuem aptidões para a Matemática? Newton estava certo quando ele manifestou sua opinião de que todo o seu trabalho é bastante intuitivo, mas não possui nenhuma relação com a Geometria? Devemos elevar ao topo a Geometria do passado como fizemos com a lógica medieval ou pretendemos aprimorar seu ensino propondo um trabalho propedêutico? Será esse o valor do modelo euclidiano que salvaremos da depreciação ou estamos tentando fazer comparações equivocadas? Seria a prepotência dos matemáticos ou a pressão da industrialização moderna a verdadeira causa da predominância dos métodos de experimentação e de intuição no ensino de Geometria? Mas então o que será do ensino de Matemática no futuro e quais serão as novas demandas sociais atribuídas à educação? Apesar de serem essas as indagações que nós já ouvimos de muitos matemáticos a respeito de nossas propostas modernas para o ensino de Geometria no secundário, nós ainda não estamos aptos cientificamente para respondê-las e

felizmente elas não estão à margem dos interesses desta comissão (SMITH<sup>6</sup>, 1912, p. 72-73).

Nesse Congresso são discutidos temas como a inserção do sistema de coordenadas e a representação gráfica das funções, e a comissão propôs aos educadores das escolas secundárias introduzirem esses temas no ensino, procurando relacioná-los ao tratamento dado à Geometria. Objetivando cumprir seus pressupostos, Felix Klein e os demais líderes da comissão de instrução sugeriram que o ensino das Transformações Geométricas deveria ser inserido de maneira cautelosa no currículo do secundário, procurando não descaracterizá-lo. Ainda por meio desse conteúdo, a Geometria seria ensinada nas escolas secundárias utilizando processos mais intuitivos de ensino, antecedendo a inserção gradativa dos métodos dedutivos. Por meio do estudo das transformações eles procuravam propor também que o ensino da Geometria seguisse as orientações didáticas da reforma moderna referentes à utilização do conteúdo escolar “funções” para unificar as diferentes áreas do ensino de Matemática (SMITH, 1912).

Assim, a comissão propunha que o ensino da Geometria no secundário se iniciasse por meio do estudo intuitivo das figuras geométricas, procurando familiarizar os estudantes com as formas e as dimensões dessas figuras, explorando suas propriedades com ênfase no movimento gerado por Transformações Geométricas. Durante esse processo de ensino, a Geometria Euclidiana seria caracterizada por seu conjunto de transformações:

Na parte relativa à Geometria, percebe-se uma clara preocupação em introduzir os raciocínios lógicos apenas após um trabalho inicial que familiarize o aluno com as noções básicas presentes nas figuras geométricas, não apenas em sua posição fixa, mas, também, através de seus movimentos. Em relação a esse último aspecto, é enfatizada a importância de serem trabalhadas as noções de simetria axial e central, de rotação e de translação (MIORIM, 1995, p. 190).

Os relatórios produzidos pelo IMUK referentes ao Congresso de Paris, em 1914, indicaram que o ensino de Geometria estática estava desaparecendo dos currículos de Matemática da maior parte dos países, sendo substituído pelas Transformações Geométricas. A introdução do conteúdo Transformações representou uma inovação no ensino da

---

<sup>6</sup>David Eugene Smith (1860-1944) foi um matemático e educador norte-americano, autor de diversos manuais didáticos de Matemática para as escolas de seu país e também de diversas obras relacionadas ao ensino das Matemáticas. Em 1920 Smith se tornou presidente da Associação Americana de Matemáticos. Durante a emergência do primeiro Movimento de modernização do ensino de Matemática, Smith atuou intensamente escrevendo artigos e editando boletins para os jornais que eram produzidos e disseminados pelo IMUK, além de traduzir algumas obras notáveis de Felix Klein, tornando-as mais acessíveis para matemáticos e pesquisadores de vários países (SOUZA, 2010, p. 57).

Geometria, rompendo com a clássica didática euclidiana da qual se originaram as sistematizações produzidas por processos dedutivos. Com o emprego desse conteúdo, as proposições geométricas seriam desenvolvidas por meio do transporte de figuras no plano realizado por transformações. Essa nova concepção de ensino para a Geometria Euclidiana modificava não somente a estruturação da Geometria, mas também o trabalho dos professores de Matemática que teriam que aprender novas técnicas didáticas para lecionar.

### **Transformações geométricas na Reforma Francisco Campos**

Segundo Marques (2005), as orientações metodológicas da reforma Campos constituem a principal modificação dos currículos de Matemática em relação aos programas anteriores. Por meio dessas orientações, os reformadores procuravam aprimorar as capacidades dos alunos na utilização do raciocínio matemático. Representam dessa maneira indicações que seguem os princípios modernos de Klein, dos quais Roxo procurou se apropriar para elaborar as suas reformas, propondo novos objetivos formativos para o secundário em relação aos valores culturais, a integração das três áreas da Matemática para constituir uma disciplina, o emprego do conteúdo funções para unificar a Matemática, utilização de recursos heurísticos e intuitivos nas aprendizagens, entre outros aspectos:

Uma nova disposição curricular e instruções pedagógicas para o ensino dos conteúdos integravam a proposta de criação da Matemática e as finalidades de seu ensino. Inculcadas no texto das diretrizes pedagógicas, as inovações propostas por Euclides Roxo tratavam, além da criação da nova disciplina, da implementação dos seguintes itens: a ênfase nas conexões entre os pontos de vista aritmético, algébrico e geométrico no tratamento dos conteúdos; o desenvolvimento do pensamento funcional, que garantiria à noção de função o status de eixo integrador do ensino dos conceitos matemáticos; o estudo da Geometria Intuitiva nas séries iniciais (primeira e segunda); a aplicação do método de ensino conhecido como método heurístico, que visava, sobretudo, tornar o aluno um agente ativo no processo de aprendizagem ao privilegiar a resolução de problemas pelo próprio aprendiz; e a integração e aplicação dos conhecimentos matemáticos no conjunto das demais disciplinas e em problemas do cotidiano (MARQUES, 2005, p. 32-33).

O desenvolvimento das noções de função é o tema central das orientações metodológicas, as quais concebem esse conteúdo como elemento central da estruturação da Matemática secundária. Dessa maneira, é sugerido ao professor iniciar o estudo de função por meio da introdução de noções mais intuitivas, desenvolvendo-as com efetivo rigor, enfatizando situações em que há dependência de grandezas, para em outro momento poder explorar os seus aspectos abstratos ao final do Fundamental. As funções devem ser utilizadas no esboço de gráficos ou de representações geométricas no plano, com o objetivo de explorar



as propriedades das funções e das representações relacionando os diferentes campos matemáticos:

A noção de função constituirá a ideia coordenadora do ensino. Introduzida, a princípio, intuitivamente, será depois desenvolvida sob feição mais rigorosa, até ser estudada, na última série, sob o ponto de vista geral e abstrato. Antes mesmo de formular qualquer definição e de usar a noção especial, o professor não deixará, nas múltiplas ocasiões que se apresentarem, tanto em Álgebra como em Geometria, de chamar a atenção para a dependência de uma grandeza em relação de outra ou como é determinada uma quantidade por uma ou por várias outras.

A representação gráfica e a discussão numérica devem acompanhar, constantemente, o estudo das funções a permitir, assim, uma estreita conexão entre os diversos ramos das Matemáticas elementares.

Além disso, isolado ou unido à fórmula, o gráfico ainda desempenha papel notável como instrumento de análise e de generalização, tal a vivacidade e o poder expressivo deste meio de representação, sobretudo no estudo das propriedades das funções empíricas. Não há perder de vista, porém, em todo o curso que a representação gráfica não é, por si mesma, o objetivo, procurado, mas apenas um meio de dominar visualmente a variação das funções (BRASIL, 1931, p. 4).

Por meio dessa reforma, o trabalho com a Geometria se desenvolve com um curso precedente à Geometria dedutiva por meio do qual são introduzidos aspectos intuitivos relacionados à exploração experimental das construções geométricas, com a finalidade de promover o estudo das suas dimensões e das suas propriedades. Durante esse curso, o professor deve procurar desenvolver nos alunos capacidades relacionadas às experimentações inicialmente propostas:

O ensino da Geometria começará por um curso propedêutico de Geometria intuitiva e experimental em que se procurará familiarizar o aluno com as ideias fundamentais relativas às figuras geométricas, no plano e no espaço, sob o ponto de vista da forma, da extensão e da posição. Esse estudo inicial subordina-se aos seguintes objetivos: a) exercitar a percepção e a imaginação especiais: b) desenvolver a faculdade de abstração: c) despertar o interesse pela estimativa e a medição, bem como pelo uso da régua, do compasso, dos esquadros, do transferidor e pela construção de modelos (BRASIL, 1931, p. 5).

Ao final do curso introdutório, os alunos iniciam o estudo da Geometria dedutiva. Nesse estágio são estudadas as proposições formais, pelas quais os alunos devem relacionar o estudo intuitivo realizado na etapa anterior com os fundamentos estruturais da Geometria. Esse trabalho visava desenvolver nos alunos, por meio do estudo das demonstrações e das suas aplicações geométricas, as aptidões lógico-dedutivas.

Na Reforma Campos, o estudo das transformações no secundário é introduzido na 3.<sup>a</sup> série do primeiro ciclo (atual 8.<sup>o</sup> ano Fundamental), durante o curso inicial de Geometria intuitiva, no momento em que os alunos se deparam com atividades de construção de figuras bidimensionais e tridimensionais, pelas quais eles devem identificar gradativamente as etapas de transformação dessas figuras geradas por movimentos, também concebidos como

variações destas. As orientações metodológicas da Reforma enfatizam a utilização de funções no estudo dessas transformações, para que os alunos possam relacionar os movimentos das figuras às variações das funções:

Nesta fase deve-se recorrer largamente à mobilidade das figuras do plano e do espaço, quando se tiver de verificar ou provar a influência que exerce a alteração de um elemento sobre a grandeza de outro elemento da mesma figura. Conduzindo-se o estudante a imaginar a variação pela qual a figura, através de estágios intermediários, passa de um estado particular para outro, acentuar-se-á o caráter funcional de tais variações.

Também, desde o começo, salientar-se-á a importância da simetria axial e central, da rotação e da translação (BRASIL, 1931, p. 5).

Portanto, no programa dessa Reforma para a 3.<sup>a</sup> série, as simetrias, a rotação e a translação são usadas para estudar os movimentos descritos por figuras planas representadas no sistema ortogonal por meio da utilização de funções. Depois que os alunos estudam as propriedades dos triângulos e a proporcionalidade dos seus lados, a transformação homotetia é introduzida com a finalidade de analisar particularmente a semelhança das figuras.

Segundo Pietropaolo (1999), é difícil precisar o quanto das “Instruções Pedagógicas” da Reforma Francisco Campos repercutiu em sala de aula. Os livros didáticos da época, por exemplo, programaram os três temas – Aritmética, Álgebra e Geometria – em cada série, mas parecia não haver uma preocupação explícita em trabalhá-los integradamente.

### Considerações finais

Por meio desse estudo podemos notar que, através do Programa de Erlangen, Felix Klein propõe para os educadores desenvolverem o ensino de Geometria através das Transformações Geométricas. Esse programa constitui uma grande contribuição para o estudo das transformações, bem como para a introdução desse conteúdo nos programas escolares do secundário. As recomendações desse documento fizeram com que os educadores pudessem refletir sobre novas alternativas para o ensino de Geometria, tradicionalmente desenvolvido de maneira estática com a utilização de teoremas.

No livro *Elementarmathematik vom höheren Standpunkten Aus. Teil II: Geometrie* Felix Klein oficializa sua proposta de modificar o ensino de Geometria por meio do estudo das Transformações Geométricas com ênfase no conceito de função, visando reformular os programas curriculares do Ensino Fundamental, unificando os três ramos da matemática. Nesse livro as transformações são utilizadas para movimentar pontos, retas, segmentos e

figuras geométricas no plano cartesiano. As simetrias de reflexão e de rotação, a translação, a homotetia e a semelhança de figuras são representadas por meio de seu aspecto funcional.

As propostas de Felix Klein para a reformulação dos currículos de Matemática são contempladas na Reforma Francisco Campos, em sua elaboração, pois o Professor Euclides Roxo, o qual foi responsável pela elaboração dessa Reforma, adere aos preceitos de Klein relacionados à modernização dos currículos de Matemática. Por conseguinte, por meio dessa reforma, há indicações efetivas para as mudanças no ensino da Geometria, pela adoção do ideário de Klein e das recomendações de demais lideranças do IMUK que discutiam a introdução, nas séries do secundário, de um curso de Geometria intuitiva precedente ao estudo da Geometria dedutiva.

A finalidade era fazer com que os alunos pudessem desenvolver os conceitos geométricos de maneira intuitiva e também por meio da experimentação antes de estudarem as axiomatizações e as demonstrações de conceitos e noções. A criação desse curso está presente na Reforma Campos que prescreve a inserção do ensino das Transformações Geométricas, com o objetivo de romper com o estudo essencialmente estático da Geometria Euclidiana. Nesse curso, as Transformações Geométricas são estudadas por meio de funções, sendo caracterizadas como isometrias.

## Referências

- BRASIL. *Reforma Francisco Campos*. Decreto-lei 19.890 de 18 de abril de 1931. (Manuais de Legislação Brasileira.)
- CHERVEL, A. L'histoire des disciplines scolaires. Réflexions sur domaine de recherche. *Histoire de L'Education*, Paris, v. 38, n. 38, p. 59-119, maio 1988.
- CHOPPIN, A. O historiador e o livro escolar. Tradução de Maria Helena Camara Bastos. *História da Educação*, Pelotas, p. 5-24, abr. 2001.
- JULIA, D. A cultura escolar como objeto histórico. Tradução: Gizele de Souza. *História da Educação*, São Paulo, n. 1, p. 10-47, jan.-jun. 2001.
- KLEIN, F. Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen. *Programm zum Eintritt in die philosophische*. Erlangen: Universität zu Erlangen, 1872.
- . *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. Teil II: Geometrie*. Leipzig, 1909, 522p.
- MARQUES, A. *Tempos pré-modernos: a matemática escolar dos anos 1950*. 2005. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo.
- MIORIM, M. A. *O ensino de matemática: evolução e modernização*. 1995. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

PIETROPAOLO, R. C. *Parâmetros curriculares nacionais*: uma análise dos pareceres. 1999.

Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo.

SMITH, D. E. Intuition and experiment in mathematical teaching in the secondary schools. In:

FEHR, H. L. *L'Enseignement mathématique*. Comptendu du Congrès de Cambridge. Commission internationale de l'Enseignement mathématique. Genève, Suisse, p. 2-61, août. 1912.

SOUZA, G. M. *Felix Klein e Euclides Roxo*: debates sobre o ensino da Matemática no começo do século XX. 2010. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

VIÑAO FRAGO. Culturas escolares y reformas (sobre la naturaleza histórica de los sistemas e instituciones educativas). *Historia de la educación y historia cultural*, Murcia, v. 9, n. 13, p. 1-25, set. 2007.

YAGLOM, I. M. *Felix Klein and Sophus Lie*: Evolution of the idea of Symmetry in the nineteen Century. Tradução de Sergei Sossinsky. Birkhäuser Boston, Estados Unidos, 1988. 237 p.

**Submetido em abril de 2014**

**Aprovado em dezembro de 2014**

PERSPECTIVAS DA  
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA