PERSPECTIVAS DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

REVISTA DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL (UFMS)

Volume 7, Número Temático –2014 – ISSN 2359-2842

Importance de la notion de situation en Didactique des Mathématiques

Importância da noção de situação em Educação Matemática

Annie Bessot[1]

Résumé

Cet article présente une lecture de la Théorie des Situations Didactiques (TSD), cadre théorique qui permet d'interroger, de problématiser et de comprendre l'existant dans les systèmes didactiques. Les nombres rationnels sont le thème mathématique principal considéré tout au long du texte. Le caractère opératoire de la notion de situation est mis en avant : l'un de ses apports essentiels est de mettre en lumière la différenciation fondamentale entre connaissance et savoir.

Mots-clés: TSD. Savoir.Connaissance.Nombres Rationnels.

Resumo

Este artigo apresenta uma "leitura" da Teoria das Situações Didáticas (TSD), quadro teórico que permite interrogar, problematizar e compreender o que existe nos sistemas didáticos. Os números racionais são o tema matemático principal considerado ao longo do texto. Alegou-se o caráter operatório da noção de situação, cujo aporte essencial é colocar em evidencia a diferenciação fundamental entre conhecimento e saber.

Palavras chave:TSD. Saber. Conhecimento. Números Racionais.

Introduction

Je vais dans cet article faire une lecture tout à fait personnelle du point de vue théorique développé par Guy Brousseau, celui de la *théorie des situations didactiques (TSD)*[2]. La TSD est un cadre théorique qui permet d'interroger, de problématiser et de comprendre l'existant dans les systèmes didactiques.

---

[1] Equipe MeTAH, Laboratoire LIG. Université Joseph Fourier, Grenoble

[2] Pour une introduction à ce cadre théorique lire Bessot (2003).

J'ai choisi tout du long de cet article de considérer un thème mathématique principal, celui des rationnels parce qu'il a fait l'objet de recherches didactiques particulièrement exemplaires.

Quelques principes qui fondent la théorie des situations

> La didactique actuelle est née à la fois des mouvements de réforme en France et de leurs difficultés. Contrairement à l'ancienne didactique basée sur les principes de Comenius et constituées de prescriptions, elle cherche à comprendre l'enseignement sur des bases expérimentales et théoriques, non à donner des conseils et encore moins des normes. (BROUSSEAU, 2000)

La didactique des mathématiques se présente donc comme la science des conditions de la diffusion des connaissances mathématiques utiles aux hommes et à leurs institutions

L'origine du cadre théorique de la TSD se trouve dans le constat de l'existence de différents régimes de fonctionnement des savoirs selon les institutions d'enseignement: l'organisation des savoirs n'y suit pas nécessairement l'organisation logico - mathématiques telles que présente dans le texte du savoir.

L'existence de ces écarts amène à questionner ce que ces écarts posent comme problème et ce que cela permet de résoudre dans le système didactique.

La théorie des situations opère un certain nombre de ruptures par rapport à la méthodologie pédagogique.

Je n'en citerai ici que deux que je considère comme les plus marquants: le premier principe porte sur les rapports aux mathématiques elles-mêmes, le deuxième sur les rapports à d'autres disciplines de sciences humaines "proches":

> La première rupture consiste à se donner le droit d'interroger la discipline [à savoir les mathématiques] de l'intérieur, sans accepter *a priori* comme des nécessités mathématiques des conceptions ou des pratiques improvisées par des mathématiciens. La deuxième rupture procède de la même attitude vis-à-vis des autres domaines. Elle consiste à prétendre soumettre à un réexamen tous les apports des diverses disciplines dès lors que ces apports concernent des comportements et des pratiques relatifs à des connaissances mathématiques, à leur compréhension, leur usage ou à leur acquisition. [Autrement dit, il n'est plus admis que les dispositifs grâce auxquels des résultats de psychologie, de sociologie ou de pédagogie ont été obtenus, soient supposés transparents du point de vue mathématique.] (BROUSSEAU, 2006, p. 04)

Quelle relation entre théorie, observation et pratique?

Dialectique théorie, observation et pratique

Dans la TSD, il n’y a pas de séparation entre théorie, observation et pratique mais au contraire dialectique constante entre elles. Il n’y a pas d’un côté une théorie et de l’autre son application. L’observation des pratiques dans les classes (ordinaire ou issues d’ingénierie didactique) a même la primauté sur la théorie, au sens où certains résultats des observations apparaissent comme des candidats à être des concepts théoriques: ils doivent être investis dans des situations pour être mis à l’épreuve. Ce qui est important ce n’est pas la théorie mais le souci théorique, la démarche théorique.

On peut donc avancer que les concepts théoriques de la théorie des situations sont des émergents de la recherche et de l‘observation: que l’on pense, par exemple, au concept de contrat didactique issu du cas Gaël.

Gaël est un enfant intelligent mais en échec électif en mathématiques, c'est-à-dire qui ne réussit pas en mathématiques et qui réussit dans les autres disciplines. Il est l’un des neuf cas étudiés entre 1980 et 1985 (au COREM - Centre d’Observation et de Recherche sur l’Enseignement des Mathématiques - de Bordeaux). En observant Gaël en classe et en lui proposant diverses situations, didactiques ou adidactiques, Guy Brousseau a émis l'hypothèse que Gaël mettait en œuvre une stratégie d'évitement du “conflit de savoir”.

Il est possible de proposer des explications psychologiques à ce comportement, mais ces explications ne donnent pas de moyen de corriger les évitements, et elles centrent l'intérêt des chercheurs sur une caractéristique de l'enfant ou sur ses compétences, au lieu de rester au niveau des conditions qui le provoquent ou qui peuvent le modifier. Ces comportements manifestent le refus, conscient ou non, de la part de l'enfant, d'accepter sa part de responsabilité dans l'acte de décider en situation didactique et donc d'apprendre, face à un adulte. De cette observation a émergé le concept de contrat didactique.

Guy Brousseau définit alorsle contrat didactique comme l'ensemble des “relations [conditions] qui déterminent - explicitement pour une petite part, mais surtout implicitement - ce que chaque partenaire va avoir à charge de gérer et dont il sera, d'une manière ou d'une autre, responsable devant l'autre” (BROUSSEAU, 1981).

La TSD produit donc des outils théoriques spécifiques dialectiquement avec l’observation des pratiques didactiques qui vont mettre à rude épreuve ces outils théoriques et en produire de nouveaux. La théorie est l’instrument de contrôle de la consistance des résultats afin d'éliminer les contradictions, non pas entre théorie et pratique, mais dans l'interprétation de ce qui est observé, entre le nécessaire et le contingent.

La contingence s'oppose à la nécessité:

Contingence: ce qui est, mais qui pourrait ne pas être

Nécessité: “ce qui est, mais qui ne pouvait pas ne pas être, ce qui est conséquence logique, obligé, nécessaire d'un autre fait lui-même supposé réalisé” (BROUSSEAU, 1993, p. 21).

La science didactique, au sens strict, s'occupe des conditions sous lesquelles une institution dite “enseignante” tente (mandatée au besoin par une autre institution) de modifier les connaissances d'une autre dite “enseignée”, c'est-à-dire vise l'apprentissage de ces connaissances.

Qu'est-ce que l'apprentissage en Théorie des Situations Didactiques?

De nombreux travaux ont montré le caractère erroné de considérer l'apprentissage comme un simple enregistrement de ce qui est communiqué par autrui: l'apprentissage n'est pas un processus de simple transfert, ni un processus linéaire et continu. Brousseau s'oppose à ce point de vue sur l'apprentissage mais aussi aux thèses constructivistes radicales en définissant l'apprentissage comme un double processus:

- un processus d'adaptation (assimilation et accommodation) à un milieu qui est producteur de contradictions, de difficultés, de déséquilibres: notion de milieu et de situation adidactique.

- et un processus d'acculturation par l'entrée dans les pratiques d'une institution : notions de contrat didactique et d'institutionnalisation.

Dans un processus d'acculturation, Il ne s'agit pas seulement de la modification d'une culture d'origine pouvant aller jusqu'à sa perte (déculturation) mais surtout de l'appropriation d'une nouvelle culture, celle de l'institution didactique.

Le processus d'adaptation se réfère à:

- la théorie psychogénétique piagétienne pour laquelle les notions de déstabilisation, déséquilibre et rééquilibration sont essentielles (PIAGET, 1975);

- la notion d'obstacle épistémologiques (BACHELARD, 1934): en effet le choix des difficultés à faire rencontrer à l'élève en tant que sujet apprenant est centrale.

L'enseignant doit donc provoquer chez les élèves les adaptations souhaitées par un choix judicieux des situations qu'il lui propose, sans qu'il soit assuré de l'apprentissage de l'élève. *La notion de choix est objectivée dans la TSD par celle de variables, en particulier didactiques*[3].

Dans le choix des déstabilisations, la notion d'obstacle en particulier épistémologique est incontournable comme intrinsèque à l'apprentissage par adaptation et aux limitations du fonctionnement du savoir liés aux choix des situations.

Le schéma général des interactions d'un sujet apprenant avec un milieu est celui d'une situation adidactique (figure 1): cette situation est alors vécue par le sujet comme une situation mathématique « dénué d'intention didactique ». Comment faire entrer l'élève dans ce jeu est l'un des problèmes de l'ingénierie didactique (concept de dévolution). La notion de milieu est ainsi indissociable de la notion de situation: *dès que l'on parle de situation (didactique ou adidactique) en TSD, on sous-entend un milieu organisé par cette situation.*

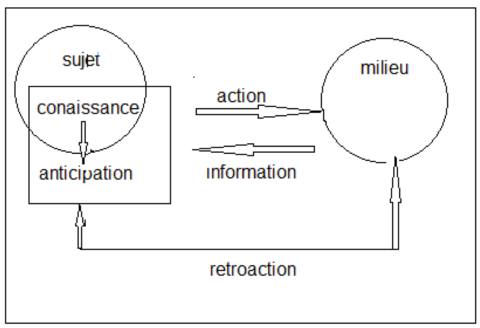

Figure 1. Schéma général d'une situation adidactique

Mais l'adidacticité est insuffisante par rapport à l'intentionnalité didactique.

Premièrement, les connaissances peuvent se révéler inadaptées hors des situations particulières où elles ont fonctionné.

[3]Un champ de problèmes peut être engendré à partir d'une situation par la modification des valeurs de certaines variables qui, à leur tour, font changer les caractéristiques des stratégies de solution (cout, validité, complexité...etc.) [...] Seules les modifications qui affectent la hiérarchie des stratégies sont à considérer (variables pertinentes) et parmi les variables pertinentes, celles que peut manipuler un professeur sont particulièrement intéressantes : ce sont les variables didactiques. (BROUSSEAU, 1982)

Deuxièmement et en rapport avec ce qui précède, l'intervention didactique du professeur est nécessaire pour que des connaissances locales puissent être converties en connaissances partagées, réutilisables, légitimées institutionnellement, c'est-à-dire en savoirs.

> Une construction autonome ne peut pas donner aux connaissances développées le statut d'un savoir.Seule l'intervention didactique du professeur permet de repérer ces connaissances canoniques dans ce qui a été conçu par l'élève ou par les élèves dans les situations autonomes. Ce statut de connaissance institutionnalisée ne peut surgir des situations où l'intention didactique est dissimulée à l'élève. (BROUSSEAU, 1997, p. 19)

Le double processus d'apprentissage renvoie donc à la distinction fondamentale entre savoir et connaissance, sur laquelle nous allons nous centrer maintenant.

La distinction savoir – connaissance

> Les savoirs sont des connaissances canoniquement constituées c'est-à-dire intelligibles pour les autres, partagées, conformes à la volonté didactique de la société, et dont l'intérêt est garanti par l'histoire et par la culture et qui seront réutilisées par la suíte. (BROUSSEAU, 1997)

Une fois déterminés institutionnellement les savoirs à enseigner, la réflexion traditionnelle porte sur l'ordre dans lequel ils doivent être enseignés, sur ce que l'élève devrait savoir au vu des enseignements antérieurs qu'il a reçus, et sur ce qu'il devrait pouvoir apprendre de nouveau.

Mais, cette organisation institutionnelle des savoirs à enseigner laisse dans l'ombre une caractéristique fondamentale du contrat didactique, source de problèmes didactiques: l'élève a besoin de connaissances *qui ne lui sont pas enseignées* mais qu'il doit savoir mettre en œuvre, soit pour apprendre, soit pour utiliser ce qu'il a appris (BERTHELOT&SALIN,1992).

Donc, au niveau du sujet, connaissances et savoir vont s'opposer très fortement dans la relation avec l'enseignant et avec les autres.

> Admettre que les connaissances et les savoirs traités dans les situations didactiques par les professeurs comme par les élèves sont légitimement différents, volontairement ou involontairement transposés des connaissances 'savantes', est le premier 'axiome' de la théorie des situations (BROUSSEAU, 2000, p. 28-29)

L'identification de ces deux types de connaissances doit être faite si on veut remettre en cause la ligne de partage entre savoir et connaissance instaurée par la transposition didactique, et si on pose qu'elle peut être source de difficultés. Mais cette ligne de partage est inéluctable.

Les connaissances sont intimement liées à l'histoire du sujet. Elles vont apparaître comme l'effet de la rencontre d'un sujet avec des *situations* relatives à un savoir à enseigner. Des événements, des conditions vont créer chez le sujet des habitudes de réponse, des connaissances, etc. comme effets de ces *causes* d'apprentissage.

Un principe méthodologique fondamental de la théorie des situations va consister à définir les connaissances par une situation.

Les connaissances se manifestent essentiellement comme des instruments de contrôle de situations, comme permettant des prises de décisions, une nouvelle connaissance se caractérisant par un changement de stratégie dans une situation.

Des savoirs sont donc enseignés, mais *les fonctionnalités d'un savoir dans une situation résultent de la coprésence implicite, c'est-à-dire non visible, de connaissances de nature différente.*

Pour illustrer cette dernière affirmation, Brousseau donne l'exemple suivant:

> Par exemple, je connais un parcours pour me rendre à un certain endroit, je sais l'utiliser sans erreur. Mais je suis incapable de le décrire avec précision et certitude car j'utilise des informations que je ne reconnais que lorsque je les rencontre dans la situation, sans qu'il me soit nécessaire de les avoir identifiées. J'utilise un schéma simplifié (un plan de la ville par exemple) qui est beaucoup plus économique pour me souvenir du trajet. Les informations du schéma global, identifiables, sûres et articulées sont des savoirs, elles ne sont suffisantes que grâce aux connaissances complémentaires. (BROUSSEAU, 2008,p. 05)

Un savoir ne peut donc pas fonctionner dans une situation sans connaissances.

En effet, un savoir est présent dans l'institution didactique pour des *raisons* logico - mathématiques et non pas pour des *causes liées au sujet et à son histoire,* ou aux raisons qu'il a eu d'apprendre.

Il y a peu de chances en général que les causes d'apprentissage d'une connaissance correspondent à des raisons de savoir cette connaissance.

Ce sont des processus différents et la conversion de l'un à l'autre est le but principal de l'enseignement.

En résumé, un savoir pour la TSD est à la fois:

- un moyen de reconnaître des connaissances et de les faire reconnaître
- et un générateur de connaissances, au travers des situations relevant de ce savoir.

“Les connaissances humaines ne sont pas contenues dans les savoirs qui les résument” (BROUSSEAU, 2000).

La notion de conception pour modéliser les connaissances via les situations

Une connaissance n’est jamais isolée: définir des connaissances atomiques ne peut être qu’une simplification didactique abusive.

L’étude des dépendances entre connaissances est donc centrale. La grande question sur ces dépendances est la suivante: les liaisons logiques sont-elles les seules? Si la réponse était positive, cela ne servirait à rien de considérer les situations, il n’y aurait qu’à suivre l’organisation logico - mathématiques des connaissances et faire les exercices qui vont avec.

En fait l’apprentissage utilise d’autres liaisons, des liaisons de nature sémantique - liées à l’activité des hommes, à la culture, aux institutions - et donc fréquemment mises en œuvre.

Une conception va désigner en TSD un agrégat de connaissances: elle caractérise chez un individu (qui peut être un élève ou un enseignant par exemple) une certaine manière de comprendre et d’utiliser une notion mathématique dans un certain champ de situations. *Une conception est donc toujours relative à une famille de situations.*

De nombreuses recherches en didactique des mathématiques ont étudié ces relations de dépendances entre connaissances à propos de différents savoirs.

Ci-après l’exemple des deux conceptions d’un rationnel, fractionnement de l’unité et commensuration (RATSIMBA – RAJHON 1982).

1. *Conception "Fractionnement de l’unité”*: *1/n* résulte du partage d’une unité en *n* parties égales et le rationnel *m/n* peut être interprété comme m morceaux de l’unité (conception majoritaire dans l’enseignement des fractions au primaire en France).

Par exemple: “Prendre les 3/4 d’un gâteau, c’est partager le gâteau en 4 et en prendre 3”

2. *Conception “Commensuration”*: le rationnel m/n peut être interprété comme le rapport de deux grandeurs tel que *n* fois la première donne *m* fois la deuxième.

Par exemple: Mesure de l’épaisseur d’une feuille de papieravec un double-décimètre:

“3/20 est l’épaisseur d’une feuille telle que l’épaisseur de 20 feuilles mesurent 3 millimètres” (lire en annexe une brève description de cette situation).

On retrouve chez d'autres chercheurs la notion de conception pour parler de connaissances, toujours en relation avec la notion de situation, comme par exemple chez Gérard Vergnaud et Nicolas Balacheff.

Vergnaud (2005) se place d'un point de vue psychologique pour parler de concept.

> Qu'est-ce qu'un champ conceptuel? Et d'abord qu'est-ce un concept?Un concept est à la fois *un ensemble de situations*[4] (qui donnent du sens au concept), un ensemble d'invariants opératoires, c'est-à-dire de concepts en acte et de théorèmes-en-acte qui organisent les schèmes de traitement de ces situations, et un ensemble de représentations symboliques et langagières qui permettent d'exprimer les objets et les relations présents dans les situations concernés, éventuellement les rapports qu'ils entretiennent avec les caractéristiques des schèmes.[…] Un champ conceptuel est donc à la fois un ensemble de situations (plus précisément de classes de situations) et un ensemble de concepts, dont toutes les propriétés ne se développent pas en même temps au cours de l'expérience et de l'apprentissage (VERGNAUD, 2003,p. 132)

Une conception sera l'analogue du concept pour un sujet donné, à un moment donné et toujours relativement à une famille de situations.

Balacheff se place lui dans le cadre de la TSD pour rendre "calculable" la notion de conception: calculable pour permettre la conception et l'analyse d'Environnements Informatiques pour l'Apprentissage Humain (EIAH).

Comme chez Brousseau, chaque connaissance est caractérisée par les situationsqui lui sont spécifiques.

> La conception est l'état d'équilibre d'un système, et plus précisément l'état d'équilibre d'une boucle action/rétroaction du système [sujet<>milieu] sous des contraintes proscriptives de viabilité […] Nous appelons *problèmes* les perturbations du système. Le domaine de validité de la conception, ou sphère de pratique, est constitué de l'ensemble des problèmes que la conception permet de résoudre et qui ne conduisent pas à une rupture de l'équilibre du [sujet<>milieu].Nous appelons *opérateur* ce qui permet la transformation des problèmes ; ces opérateurs sont attestés par des productions et des comportements.Un*système de représentation* (langagier ou non) permet l'expression des problèmes et des opérateurs.Enfin, une *structure de contrôle* assure la non contradiction de la conception et contient au moins sous la forme d'oracle les outils de décision sur la légitimité de l'emploi d'un opérateur ou sur l'état (résolu ou non) d'un problème. (BALACHEFF et MARGOLINAS, 2003, p. 80)

Obstacles épistémologiques

[4] C'est moi qui souligne par l'usage de l'italique.

Les situations rencontrées par l'élève produisent des conceptions adaptées à un milieu limité. Ces conceptions peuvent alors se révéler inadaptés, approximatives ou même fausses dans d'autres situations.

Certaines de ces conceptions premières peuvent se constituer en obstacle au sens de Bachelard. “Il ne s'agit pas de difficultés mais bien de connaissances, d'abord nécessaires, mais qui perturbent durablement les apprentissages ultérieurs et qui persistent, même après l'acquisition des savoirs corrects”(BROUSSEAU, 2000, p. 17)

Ce qui vient d'être présenté à propos de la limitation apportée par les situations dans lesquelles l'élève va rencontrer un savoir atteste de l'importance du choix de ces situations que ce soit dans les pratiques didactiques “ordinaire” et pour leur analyse que dans le travail de conception d'une ingénierie didactique.

L'exemple des deux premières phases de l'ingénierie “Rationnels et décimaux”[5](BROUSSEAU et BROUSSEAU, 1987)

Pour me faire comprendre, je vais m'appuyer sur l'exemple de l'ingénierie didactique emblématique de Brousseau, ayant pour objectif l'introduction des rationnels et en particulier de la multiplication dans ce nouvel ensemble de nombres.

En France, on enseigne les entiers naturels et leur multiplication au début de l'école primaire puis les rationnels et leur multiplication dans les deux dernières années de l'école primaire. L'enseignement des rationnels se prolonge au début du collège.Les décimaux sont présentés comme des rationnels particuliers.

Dans la première partie de l'ingénierie de Brousseau, les rationnels sont introduits par une famille de situations relevant de la mesure des grandeurs. Cette famille se caractérise par deux choix : celui de la longueur comme grandeur et celui de l'épaisseur d'une feuille de papier comme longueur (voir plus loin dans le paragraphe 3.2.2. les raisons de ces choix et dans l'annexe une brève description de la situation initiale de cette partie).

Ces choix permettent de définir la multiplication d'un rationnel par un entier seulement comme une addition réitérée (de façon analogue à la multiplication dans N): par exemple, $\frac{5}{7}\times 3$ signifie. $\frac{5}{7}+\frac{5}{7}+\frac{5}{7}$

[5] On trouvera dans Brousseau (1981) et Brousseau (1982) une description et une analyse approfondie de cette ingénierie didactique.

La multiplication de deux rationnels non entiers n'a donc pas de sens dans cette famille de situations.

Cela n'aurait pas été le cas si on avait choisi une situation de mesure des aires de rectangles pour introduire la multiplication dans une telle situation, $\frac{5}{7} \times 3$ signifie l'aire d'un rectangle de côtés $\frac{5}{7}$ et 3. De même $\frac{5}{7} \times \frac{1}{3}$ est l'aire d'un rectangle de côtés $\frac{5}{7}$ et. $\frac{1}{3}$

Dans la famille de situations "épaisseur d'une feuille de papier", la multiplication par un entier d'un rationnel a donc une signification limitée et en filiation avec la multiplication des entiers (addition réitérée).

Dans une seconde partie, l'ingénierie didactique propose aux élèves une deuxième famille de situations (et donc un autre milieu), celle des situations d'agrandissement et de réduction de figures géométriques pour organiser une rupture de signification entre la multiplication des entiers et la multiplication des rationnels.

Cette partie a la volonté de faire rencontrer aux élèves l'obstacle épistémologique des entiers N à la constitution des rationnels Q dans l'objectif de modifier la conception construite dans la première partie.

Pour illustrer notre propos, examinons la situation initiale de la seconde partie de l'ingénierie de Brousseau, la situation du Puzzle.

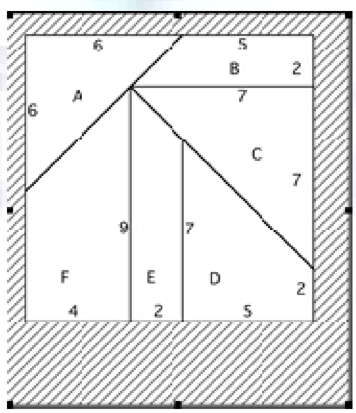

Figure 2. Le puzzle affiché

On affiche au tableau une représentation agrandie du puzzle complet (voir figure 2).

On distribue un puzzle par équipe.

Consigne: “Voici des puzzles. Vous allez en fabriquer de semblables, plus grands que les modèles en respectant la règle suivante: le segment qui mesure 4 cm sur le modèle devra mesurer 7 cm sur votre reproduction. Je donne un puzzle par équipe. Chaque élève devra faire une ou deux pièces. Lorsque vous aurez fini, vous devrez pouvoir reconstituer les mêmes figures qu'avec lemodèle”.

Chaque équipe de 4 ou 5 élèves se concerte brièvement.

Les élèves se séparent pour réaliser individuellement leur(s) pièce(s).

Puis les élèves se retrouvent au sein de leur équipe.

Laprocédure initiale de la plupart des élèves est d’ajouter 3 aux mesures des côtés des angles droits. Ceci résulte de la conception première sur les entiers: pour agrandir on ajoute ou on multiplie par un entier. De ce point de vue 7 cm peut être interprété comme 4cm + 3cm.

La figure 3 illustre le résultat de cette procédure sur les pièces « agrandies » C, D, et E du puzzle. Il y a alors rétroaction du milieu matériel: les morceaux ne se raccordent pas de façon incontestable. Cette rétroaction conduit au rejet du modèle additif lié à N.

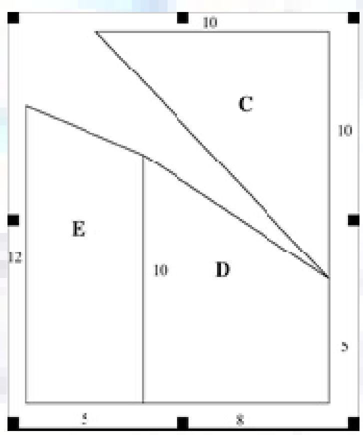

Figure 3. Agrandissement des pièces C, D, E du puzzle par la procédure additive

L’enjeu de cette situation est que les élèves rejettent explicitement les procédures faisant intervenir les entiers et construisent implicitement une règle que l’on peut formuler ainsi: “si a+b=c dans le puzzle initial, alors f(a+b)=f(a)+f(b) dans le puzzle agrandi” (sinon les morceaux ne s’agencent pas : voir figure 3).

Le rejet de ce modèle additif devient alors constitutif de la signification de la multiplication par un nombre rationnel. L'application linéaire, solution de ce problème, sera désignée par $\frac{7}{4}$ c'est-à-dire un rationnel - application: dans cette famille de situation, la multiplication $\frac{3}{7} \times \frac{7}{4}$ signifie l'agrandissement d'un segment de mesure $\frac{3}{7}$ par cette application linéaire.

Point de vue épistémologique : notion de situation fondamentale

La réflexion épistémologique s'incarne dans la TSD dans la notion de situation fondamentale (contre celle de savoirs fondamentaux).

Chercher une situation fondamentale revient alors à chercher les conditions d'existence d'un savoir, conditions modélisées par la notion de situation qui embarque avec elle les connaissances nécessaires au fonctionnement du savoir.

Deux exemples de situations fondamentales sont

- situation fondamentale de mesure de grandeurs pour le rationnel - mesure,
- situation fondamentale d'agrandissement pour le rationnel – application linéaire.

Tout d'abord, il ne s'agit pas de chercher une situation mais *un ensemble de situations* spécifique d'un savoir mathématique, dont une "situation fondamentale" serait un paradigme, c'est à dire une manière de voir le savoir.

Ce paradigme se fonde non seulement sur les problèmes qu'un champ de savoir (par exemple celui des nombres rationnels) tend à résoudre mais aussi sur les activités mathématiques spécifiques de la communauté savante du domaine.

Ce qui est fondamental ce n'est donc pas une situation, mais un ensemble de situations et leur articulation, situations générées par les valeurs données à une (des) variable(s) d'une situation fondamentale.

Par exemple, des valeurs peuvent être données à la variable "grandeur" de la situation fondamentale de mesure de grandeurs: longueur, surface, etc. - chacune de ces valeurs objectivant des choix de situations.

Nous allons ici nous contenter de donner des éléments de réponse aux questions suivantes.

- Pourquoi chercher une situation fondamentale?

- Comment chercher des candidats à être une situation fondamentale?

Pourquoi chercher une situation fondamentale

Une première raison de rechercher un tel paradigme est que cette recherche de situations permet d'envisager et de séparer différentes significations possibles pour un savoir à enseigner (rationnel - mesure et rationnel - application linéaire par exemple): elle permet par exemple de prendre du recul par rapport aux limitations d'un système existant - ces limitations pouvant être source de difficultés pour les acteurs de ce système.

Une seconde raison est de répondre à la question: le savoir à enseigner ou enseigné est-il cohérent du point de vue épistémologique? Cette question est d'autant plus pertinente qu'un même savoir enseigné se trouve souvent parcelliser par la multiplication des situations didactiques hors du contrôle épistémologique qu'assure la recherche d'une situation fondamentale.

Comment chercher une situation fondamentale?

Cette partie est particulièrement délicate à traiter car Guy Brousseau n'a jamais vraiment explicité comment il procédait pour la bonne raison que ses nombreuses lectures, références, observations de pratiques d'enseignement, en particulier dans le cadre du COREM, les interactions nombreuses avec les enseignants et d'autres chercheurs lui fournissent un vivier de situations dans lequel il peut puiser. Voilà ce qu'il écrivait en 1980 à propos de l'ingénierie "Rationnels et décimaux" dans lequel il parle d' "après coup".

"C'est pourquoi il n'y a pas encore de méthodes naturelles de recherche. C'est seulement après coup qu'on peut mettre à l'épreuve le choix des variables pertinentes et acquérir la conviction qu'il est bon" (BROUSSEAU, 1980, p. 52)

Je vais tenter de donner ma propre vision de cette recherche en m'appuyant sur Bessot (2011). Trois types d'études au moins *pour chercher* des situations candidates à être une situation fondamentale :

- Etude mathématique et épistémologique de la constitution d'un savoir
- Etude de l'utilité sociale et des causes de l'émergence d'un savoir
- Etude des obstacles épistémologiques à un savoir

Etude mathématique et épistémologique de la constitution d’un savoir

On peut conduire une étude des œuvres mathématiques, de manuels anciens et actuels, pour dégager différentes manières mathématiques de constituer des notions et de les organiser. Mais l’organisation des énoncés mathématiques présents dans des documents *écrits* ont une finalité didactique qui est de communiquer un savoir à autrui, même si elle ne cherche pas explicitement à l’enseigner De ce fait, les problèmes mathématiques auxquels le savoir est une réponse sont effacés (phénomène de transposition didactique, Chevallard 1985). Il faut donc aussi conduire une étude non mathématique de ce qui, dans ces organisations, les différencie, rechercher les raisons des choix, en particulier les problèmes dont le savoir est une réponse, ce qui est admis ou non, etc..

Par exemple, Lê Thai Bao Thien Trung (2012) dans la recherche d’une situation fondamentale pour concevoir une ingénierie sur la notion de limite de fonctions réelles en classe 11 (élèves de 16-17 ans) a étudié les relations mathématiques possibles entre nombres réels et notion de limite. Il a analysé les principales constructions (historiques et didactiques) des réels, la place et le rôle du sous-ensemble des nombres décimaux *D* dans ces constructions. Le Thai Bao à la suite de ce travail mathématique conclue :

> Une construction cohérente de la notion de limite ne peut pas éviter une (re)construction des nombres réels, en particulier ne peut pas éviter le problème de la décimalisation des nombres réels, outillée par les concepts de l’analyse et mettant au centre de cette reprise les écritures décimales illimitées. (LE THAI BAO, 2012,p. 35)

Etude de l’utilité sociale ainsi que des causes de l’émergence historique d’un savoir

Une deuxième étude pour un savoir donné est celle de son utilité sociale liée le plus souvent aux causes de son émergence historique. L’agrégation des situations renvoie à un enjeu d’utilité du savoir et non à un enjeu de vérité comme c’est le cas pour la logique du savoir.

Le modèle issu de cette agrégation de situations est un paradigme fondamental s'il peut générer un champ de problèmes et de pratiques spécifiques du savoir visé, par un jeu sur des variables.

Deux ensembles de situations générés par différentes valeurs de variables d'une même situation fondamentale d'un savoir, vont différer par des conceptions associées et donner à ce savoir des significations différentes.

Pour l'exemple des fractions (rationnels), on peut modéliser l'usage social des nombres en particulier des rationnels ainsi que leurs conditions historiques d'émergence par *une situation fondamentale de mesure des grandeurs*.

Une situation de mesure des *longueurs* va générer selon des valeurs de la variable "grandeurs des objets" deux ensembles de situations de mesure de longueurs, associés à deux conceptions différentes d'un nombre rationnel, celle de "commensuration" et celle"fractionnement de l'unité".

> Nous avons choisi pour la variable didactique « grandeur des objets », un domaine mettant en défaut le modèle implicite naturel [celui du fractionnement de l'unité] sans toutefois exclure des manipulations. […] le nombre qui mesure l'épaisseur devient alors le seul moyen - le seul « concret » d'appréhender cette épaisseur, de construire les expériences de comparaison, de prévoir la somme etc… La représentation mathématique a été réintégrée dans son rôle fondamental de théorie en construction, dans son rapport dialectique avec le constructeur et avec la situation. (BROUSSEAU, 1981, p. 104-105)

Etude des obstacles épistémologiques à un savoir

Mais le pouvoir générateur d'une situation peut être celui de générer des questions qui deviennent l'objet d'étude des situations suivantes. J'identifie cette troisième étude à celle de la recherche des conditions de rencontre avec un obstacle épistémologique. Il n'y a pas alors construction d'une réponse à un problème mais formulation d'une (ou des) question(s) fondamentale(s).

Par exemple, dans la seconde phase de l'ingénierie "rationnels et décimaux" de Brousseau (1987), les situations d'agrandissement et de réduction sont articulées pour répondre aux questions de nature épistémologique posées dans la situation initiale du puzzle : quelle propriété doivent vérifier les agrandissements pour être sûr que les morceaux du puzzle de s'agencer exactement (linéarité)? Quelles significations prend la multiplication de 2 rationnels?

En conclusion

Dans cet article, nous avons mis en avant le caractère opératoire de la notion de situation, pour:

- Modéliser les connaissances en les attachant à des situations spécifiques à un savoir ;

- Discriminer des significations possibles d'un savoir en discriminant des familles de situations comme domaine de validité de différentes conceptions attachées à un même savoir ;

- Comprendre les significations (présentes et/ou absentes) du savoir enseigné résultant des situations existantes dans un système d'enseignement ;

- Comprendre l'origine de certaines difficultés d'enseignement comme conséquences de limitations du milieu mis en place dans une situation.

En bref, un apport essentiel de la notion de situation est de mettre en lumière la différenciation fondamentale entre connaissances et savoir.

"Cette différence, qui émerge des rapports de l'individu aux institutions, est à l'origine de l'impossibilité de la transmission 'directe' du savoir à laquelle répond la nécessaire transposition didactique" (BALACHEFF et MARGOLINAS,2003, p 75)

Références bibliographiques

BACHELARD G. **La formation du nouvel esprit scientifique**.Vrin : Paris, 1934.

BALACHEFF N. etMARGOLINAS C. cKc Modèle de connaissances pour le calcul de situations didactiques. In MERCIER A. et MARGOLINAS C. (ed) **Balises en didactiques des mathématiques**. Cours de la XII[e] école d'été de didactique des mathématiques. Grenoble : La Pensée Sauvage. 75-106, 2003.

BERTHELOT R., SALIN M-H. **L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans l'enseignement obligatoire**. Thèse. Université de Bordeaux I, 1992.

BESSOT A. **Une introduction à la théorie des situations didactiques**.Cahier Leibniz, n° 91. Disponible en ligne :https://hal.inria.fr/file/index/docid/78794/filename/CLLeib91.pdf, 2003.

_________, A. L'ingénierie didactique au cœur de la théorie des situations. In C. MARGOLINAS et al. (Coordonné par) **En amont et en aval des ingénieries didactiques.**XV[e] école d'été de didactique des mathématiques. Grenoble : La Pensée Sauvage. 29-56, 2011.

BROUSSEAU G. Problèmes de l'enseignement des décimaux. **Recherches en Didactique des Mathématiques**. Vol. 1/1. Grenoble : La Pensée Sauvage. 11-59, 1980.

_________, G. Problèmes de didactique des décimaux. **Recherches en Didactique des Mathématiques.** Vol. 2/1. Grenoble : La Pensée Sauvage. 37-127, 1981.

_________, G Les objets de la didactique des mathématiques, in Actes de la Troisième école d'été de didactique des mathématiques, Olivet, 1982.

_________, G. et N. **Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire**. Publication de l'I.R.E.M. de Bordeaux, 1987.

_________,G. **Stratégies de l'analyse statistique.** Laboratoire Aquitaine de Didactique des Sciences et des Techniques, Université de Bordeaux 1, 1993.

_________, G. La théorie des situations didactiques. (Cours donné lors de l'attribution du titre de Docteur Honoris Causa de l'Université de Montréal). **Interactions didactiques**. Genève, 1997.

_________, G. Education et Didactique des mathématiques. **Educacion mathematica**. Vol 12 n°1, Mexico. 5-39, 2000.

_________,G. et N.L'ingénierie didactique en mathématiques. Conférences 16, 23, 30 janvier et 6 février 2006. DAEST, Université de Bordeaux 2, 2006.

_________, G. Notes sur l'observation des pratiques de classe. **Actes d'ICME 11**. Monterrey, 2008.

CHEVALLARD Y **La transposition didactique**. Grenoble : La Pensée Sauvage, 1985.

LÊ THAI BAO T. T. Notion de limite et décimalisation des nombres réels. Le cas de l'enseignement secondaire au Viêt Nam. **Petit x**, n° 89. IREM de Grenoble. 35-50, 2012

PIAGET J. **L'équilibration des structures cognitives, problème central du développement.** Presses Universitaires de France : Paris, 1975.

RATSIMBA-RAJOHN, H. Eléments d'étude de deux méthodes de mesures rationnelles. **Recherches en didactique des mathématiques.** Vol. 3/1. Grenoble : La Pensée Sauvage. 65-113, 1982.

VERGNAUD G. La théorie des champs conceptuels. Recherche en didactique des mathématiques, Vol. 10/2.3. Grenoble : La Pensée Sauvage. 133-169, 1991.

_________, G. Repères pour une théorie psychologique de la connaissance. In Mercier A. et Margolinas C. (ed) **Balises en didactiques des mathématiques**. Cours de la XII[e] école d'été de didactique des mathématiques. Grenoble : La Pensée Sauvage. 123-136, 2003.

Submetido em setembro de 2014

Aprovado em setembro de 2014