REVISTA DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL (UFMS)

Volume 7, Número Temático – 2014 – ISSN 2359-2842

A Racionalização de Frações Irracionais: ideias implícitas e adjacentes

The Rationalization of Irrational Fractions: implied and adjacent ideas

Antonio Sales[1]

José Felice[2]

Resumo

O presente trabalho consiste numa discussão sobre o processo de racionalização das frações irracionais. Sendo resultado de uma discussão entre colegas sobre o assunto apresenta resumidamente o significado da racionalização, as diversas ideias que conduzem a uma divisão e como essas ideias influenciam no entendimento de fração irracional. Analisa a valência instrumental didática da forma racionalizada na perspectiva da Teoria Antropológica do Didático e as dificuldades para o entendimento desse tipo de fração. Descortina a matemática que se oculta no processo de racionalização e conclui que a ideia de divisão como medida interna é a que melhor explica a fração irracional.

Palavras-chave: Valência Instrumental. Divisão como Medida. Objetos Matemáticos.

Abstract

This paper is a discussion about the process of rationalizing the irrational fractions. As a result of a discussion between colleagues on the subject presents we discuss the meaning of rationalization, the different ideas that lead to a division and how these ideas influence the understanding of irrational fraction. We analyze the instrumental didactic valence in a rationalized way. For this, we use the Anthropological Theory of the Didactic and the difficulties of understanding this type of fraction. The study reveals the math that is hidden in the rationalization process and concludes that the idea of division as internal measure is the one that best explains the irrational fraction.

Keywords: Valencia Instrumental. Division as Measure. MathematicalObjects.

Introdução

[1] Licenciado em Matemática pela UCDB, Mestre e Doutor em Educação pela UFMS, Professor na Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul (UEMS), Unidade de Nova Andradina-profesales@hotmail.com

[2]Doutor em Educação pela Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS) e professor de Matemática na Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul (UEMS), Unidade de Nova Andradina - jfelice2@hotmail.com.

Na condução de um processo de estudo da Matemática com estudantes do ensino fundamental, alguns fatores inerentes ao conhecimento matemático podem causar dificuldades no relacionamento do estudante com esse conhecimento conforme salientou Gastón Bachelard (1884-1962), pensador que se ocupou das relações do homem com o próprio saber.

Essa constatação de que há dificuldades presentes no estudo da Matemática e que são próprias desse campo do saber recebeu de Bachelard (1996) atenção especial ao proceder a uma psicanálise do conhecimento. Para esse teórico a abstração é o pontoculminante do espírito cientifico, mas admite que o percurso inclui três estágios a começar pela observação de imagens e o encantamento ingênuo por fatores opostos entre si.

Em um segundo estágio persiste o paradoxo de buscar na intuição, no sensível, a confirmação da abstração. Nesse estado o sujeito busca certezas tem "*alma professoral*, ciosa de seu dogmatismo, imóvel na sua primeira abstração, fixada para sempre nos êxitos escolares da juventude, repetindo ano após ano o seu saber, impondo suas demonstrações, voltada para o interesse dedutivo, sustentáculo tão cômodo da autoridade" (BACHELARD, 1996, p. 12 grifos do autor).

O questionamento da experiência imediata e até o desligamento em relação a ela marca o estágio final do processo. Esse terceiro estágio corresponde ao também terceiro estado de alma, isto é, de interesses onde ocorrem as perturbações provocadas "pelas objeções da razão" (BACHELARD, 1996, p. 13). O estado da abstração é o estado das incertezas.

Os três estados de alma são caracterizados pelos interesses: a) ingenuidade que não busca contradições, mas o deleite na harmonia das coisas e se demora na contemplação do visível, nos aspectos físicos; b) que vive da certeza obtida pela tradição[3], pela repetição do vivido e pelo comodismo da autoridade que a tradição lhe confere; c) a busca dolorosa da essência, o enfrentamento dos conflitos entre a aceitação pura e simples do sensível com suas imperfeições e o "arriscado jogo do pensamento sem suporte experimental estável" (BACHELARD, 1996, p. 13).

Ainda, para esse pensador da epistemologia, "o ato de conhecer se dá contra um conhecimento anterior, destruindo conhecimentos mal estabelecidos", mas "é impossível

[3] Tradição neste texto tem o sentido de um procedimento muitas vezes repetido e sem reflexão ou um conhecimento adquirido ou transmitido cujo significado se desconhece e apenas se repete tal como foi posto da primeira vez, mas que se faz com destreza.

anular, de um só golpe, todos os conhecimentos habituais" (BACHELARD, 1996, p. 17-18) e o conhecimento não questionado é suporte para obstáculos epistemológicos. Esses obstáculos não são coisas do passado do sujeito, são fatores sempre presentes porque mesmo "na mente lúcida há zonas obscuras"(Ibid.,p.10).

Nessa perspectiva não se pode fugir de questionamentos se queremos adentrar no mundo metafórico do "espírito científico". De igual modo, se o objetivo da escola for produzir "crescimento espiritual" nos estudantes deve sair do lugar comum de evitarpropor desafios que os faça sair "da ideia que costuma utilizar com frequência" (BACHELARD, 1996, p.19).

As proposições acima fundamentam a nossa proposta de que o estudo das frações irracionais, no ensino fundamental, deve sair da prática da racionalização sem uma discussão sobre o que essa técnica significa. Deve abandonar a racionalização espontânea sem explicitar porque se deve recorrer a ela, isto é, sem analisar os objetivos dessa prática e sem discutir as ideias presentes no estudo das frações e qual dessas ideias melhor expressa a fração irracional.

Veremos que a racionalização sem uma discussão se reduz a uma técnica que pode permanecer como uma nebulosa sobre a sua necessidade e seu significado.

Este texto, produzido a partir da questão levantada por um colega de trabalho, Mestre em Matemática Aplicada, que em determinado dia afirmou não saber o sentido de se ensinar racionalização de frações na educação básica uma vez que no ensino superior isso não é relevante. Segundo ele, quando levantou a questão em sala de aula, na licenciatura, recebeu do professor um gesto de que não tinha importância. Assim, no que segue abordamosas frações irracionais, isto é, aquelas frações em que pelo menos um dos termos (numerador ou denominador) seja um número irracional. Não obstante, como no ensino fundamental, conforme veremos as frações irracionais não são discutidas, recorreremos inicialmente ao conceito de frações ordinárias como fator desencadeante da discussão.

Trajano (1880?) na definição de número 135 de seu livro "Arithmetica Progressiva" afirma que: "Fracção é uma ou mais partes iguaes de uma unidade. A palavra fracção vem do latim *frango*, que quer dizer: *Eu quebro*. Uma fracção é, portanto, uma ou mais partes iguaes de um todo que na numeração tem o nome de unidade ou 1" TRAJANO, 1880?[4], p.67 grifos

[4]O excerto foi extraído da 57ª edição. Segundo notas do próprio livro, a primeira edição data de 1880. A 119ª edição data de 1945, mas não dispomos do texto completo.

do autor). Nas definições seguintes o autor afirma que “há duas espécies de fracções, uma que se denomina frações ordinárias, e outra frações decimais” (Ibid. p. 68).

Por outro lado, Silveira (2011) escreveu que “fração ordinária é o tipo particular de fração em que o todo a ser particionado em alíquotas é um número inteiro” e esclarece que enquanto, em séculos anteriores, os matemáticos e astrônomos precisavam trabalharcom somas de frações sexagesimais porque tabelas de $y = senx$ eram construídas com y e x em ternos de graus, portanto, sexagesimais (DAVIS, 1992), o povo precisava apenas de frações com números inteiros, vindo daí o nome de frações ordinárias que significa *vulgar* ou *comum.* Boyer (1996, p.113) as denomina de frações “comuns” em oposição “às expressões ‘frações de astrônomos’ e ‘frações de físicos’”.

Objetos matemáticos e valência instrumental

A Teoria Antropológica do Didático (TAD) que tem como foco o processo de estudo, considera a didática da matemática como a ciência do estudo e que fazer matemática consiste em construir um modelo da realidade que se quer estudar. Essa realidade pode ser interna ou externa à própria Matemática, pode consistir na criação de uma matemática nova ou na utilização da matemática conhecida para resolver problemas rotineiros ou não. Os pontos são levantados pelo sujeito em uma pesquisa ou propostos por outros que necessitem da ajuda de quem estuda Matemática. Mas, essa realidade pode ser ainda uma questão típica de ensino em que o sujeito procura formas de ajudar os seus alunos, ou profissionais de outras áreas, na utilização de instrumentos matemáticos que eles necessitam. Tudo isso é denominado de atividade matemática (CHEVALLARD; BOSCH; GASCÓN, 2001).

A atividade matemática, segundo a Teoria Antropológica do Didático (TAD), se realiza mediante uma pluralidade de registros (escrito, gráfico, verbal, gestual e material). Esse componente da atividade matemática recebe nessa teoria a denominação neutra de objetos.

Denominam-se objetos ostensivos àqueles que apelam aos sentidos. O termo ostensivo tem sua origem no latim (*ostendere*) e significa mostrar-se, apresentar-se, apelar aos sentidos, insistir em ser percebido. São eles os elementos mediadores da apreensão dos objetos não-ostensivos, dos objetos propriamente matemáticos, aqueles que povoam o campo das ideias e que constituem o mundo do matemático. Os não-ostensivos são objetos cuja existência é institucional, isto é, sua existência é um atributo da criação humana que os determina, que os define. Esses objetos não podem mostrar a si mesmos, mas podem ser evocados mediante a manipulação de certos objetos ostensivos apropriados (CASABÓ, 2001).

Afirma a autora:

> De maneraun tanto paradójica, una vez establecida esta dicotomía, se postula lacoexistencia permanente de los objetos ostensivos y los objetos no-ostensivos, dentro de lo que llamamosla*dialéctica de lo ostensivo y de lono-ostensivo*: los objetos no-ostensivosemergen de lamanipulación de objetos ostensivos pero, al mismotiempo, dichamanipulación está siempre guiada y controlada por objetos no-ostensivos. El concepto de número entero o el de función lineal no existensin toda una actividad manipulativa de ostensivos (tanto linguística como gráfica, gestual y de escritura, sin olvidar enelorigenlamanipulación concreta de objetos materiales). Recíprocamente, toda manipulación de ostensivos viene controlada por la "activación" o "evocación" de objetos no-ostensivoscuyas características pueden verse modificadas a lo largo de laactividad (CASABÓ, 2001, não paginado, grifos da autora).

Entende-se que a Matemática sendo uma ciência essencialmente abstrata, seus elementos fundamentais ou objetos (que em algumas teorias são denominados de conceitos), não são tangíveis senão pela mediação desses signos denominados objetos ostensivos.

Embora a teoria não diferencie os objetos em mais ou menos apropriados admite que para certas ações alguns deles sejam mais fáceis de serem manipulados e cumprem o seu papel de forma mais eficiente. Nesse caso, fala-se em valência instrumental ou valor instrumental (BOSCH; CHEVALLARD, 1999; CASABÓ, 2001) que corresponde à potencialidade instrumental do signo. Por exemplo, o objeto fração que corresponde à metade do inteiro pode ser representada dos seguintes modos:

a) Por uma figura (fig.1). Signo esse que tem um forte potencial instrumental didático, mas um fraco potencial instrumental operacional. É difícil operar com figuras, especialmente se representarem frações diferentes.

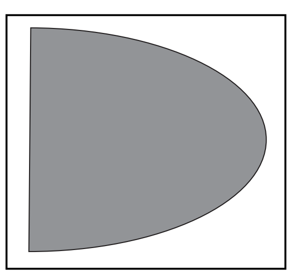

Figura 1- A metade da área delimitada por uma elipse.

b) Uma segunda forma de representar a mesma fração é pelo decimal 0,5, que tem grande potencial instrumental operacional, especialmente quando se usa calculadora. Da mesma forma, apresenta forte potencial quando o objetivo é inserir as frações no contexto do sistema decimal posicional. No entanto, como recurso didático, quando se busca compreender a relação parte/todo, tem um potencial menor do que o desenho.
c) Mas, a fração meio ou metade, pode ainda ser representada na sua forma mais comum que consiste em fazer um traço horizontal e colocar o algarismo 1 sobre o traço e o algarismo 2 sob o traço resultando no que popularmente se denomina “um sobre dois”. Simbolicamente: $1/2$.

Essa representação pode ter um potencial instrumental didático maior do que a representação decimal. Tem forte potencial instrumental para operações sem o uso de recursos tecnológicos, mas fraco potencial instrumental para operações com o uso dos recursos tecnológicos populares. Tem também fraco potencial quando o objetivo é tratar o número no contexto do sistema decimal posicional. Também tem fraco potencial didático quando o objetivo é ordenar uma sequência.

d) Ainda outro modo de representação da mesma fração é em forma de potência com expoente negativo: 2^{-1}. Esse signo tem um grande potencial instrumental quando se tem por objetivo incluir o número no contexto das progressões e das potências de base 2. Da mesma forma é potente para operações com tecnologias mais avançadas (calculadora científica, por exemplo). Para algumas operações manuais também ele possui uma potência maior do que a representação decimal.

A fração irracional tem, como veremos, um valor instrumental didático menor do que a forma racionalizada, especialmente quando o objetivo é discutir o seu significado geométrico, compreender a sua posição na reta ou até mesmo inseri-la no contexto das frações ou buscar compreender o número que ela representa.

Frações irracionais

Os números irracionais expressos na forma de radicais geralmente começam aparecer nos programas escolares ou manuais didáticos a partir do nono ano do ensino fundamental. Desse ano escolar para frente eles farão, mesmo que indiretamente, parte constante do programa e estarão presentes com muita frequência. Nem sempre é explorado[5], pelos autores de livros didáticos, o significado geométrico de $\sqrt{2}$, por exemplo, e a abordagem fica, na maioria das vezes, no nível algébrico onde $\sqrt{2}$ =1,4142....Mesmo no curso superior, quando um número irracional aparece como componente de um vetor, não há a preocupação com a sua representação geométrica (KOLMAN, 1998).

Na educação básica, principalmente no ensino fundamental, quando se depara com uma expressão em que as frações têm como denominadores números irracionais na forma de um radical o procedimento imediato é a racionalização. Aliás, os livros induzem esse procedimento uma vez que o tema é abordado através da racionalização. Da forma como o assunto é introduzido, em alguns livros didáticos consultados e citados a seguir, tem-se a impressão de que esse irracional é abordado apenas para dar suporte ao procedimento da racionalização.

Se não explicitam, pelo menos, deixam implícito que apenas o denominador influencia na qualificação da fração. Leonardo (2010, p. 38), por exemplo, afirma que "Algumas frações apresentam no denominador uma raiz não exata, ou seja, um número irracional. Quando temos uma fração desse tipo, podemos obter outra fração equivalente a ela, que tenha como denominador um número racional".

O tema no caso seria a racionalização e não propriamente o estudo do número irracional expresso na forma de fração cujo denominador é um número irracional.

Os autores de livros didáticos dedicam um número variável de páginas ao assunto das frações irracionais, todas envolvendo radicais no denominador e como uma aplicação da racionalização (MORI; ONAGA, 2002; BONJORNO; BONJORNO; OLIVARES, 2006; BARROSO, 2006). Todos os autores citados tiveram seus livros aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) de 2005. Essa tendência se manteve nos livros aprovados no PNLD de 2013 (IMENES; LELIS, 2012; CENTURIÓN; JAKUBOVIC, 2012; ANDRINI; VANCONCELLOS, 2012; LEONARDO, 2010). Nos três últimos houve, no entanto, a preocupação em discutir o problema da divisão do numerador pelo denominador quando este é um número irracional como justificativa para a necessidade da racionalização. Não dispusemos de livros dos PNLD entre 2005 a 2013.

[5] Alguns livros exploram e outros não. O livro adotado atualmente em nosso município (ANDRINI; VASCONCELLOS, 2012), por exemplo, não explora.

No curso superior, supondo que o estudante tenha atingido certa maturidade intelectual, o professor não se ocupa desse detalhe, isto é, deixa o resultado em forma de fração com número irracional no denominador (LEON, 1999; STEINBRUCH; WINTERLE, 1987; KOLMAN, 1998), e muitos estudantes ficam se perguntando: devemos racionalizar ou não? Aliás, esse comportamento reforça a ideia de que na educação básica são ensinadas coisas desnecessárias.

Para quem nunca viu uma representação geométrica desses números fica a impressão de se tratar de algo essencialmente abstrato, um vetor hipotético em lugar não definido, mesmo tendo componentes reais definidas.

Este trabalho pretende discutir essa questão: racionalizar ou não racionalizar? Por que é importante racionalizar no ensino fundamental? Qual deve ser a postura do professor do curso superior quando o problema aparece na sua aula, especialmente se o curso for de licenciatura?

O pressuposto é que o processo de racionalização tem por objetivo tornar plausível, ao aluno do nível fundamental, a ideia de fração irracional no contexto de estudo de frações que ele conhece.

Este trabalho se insere na perspectiva da TAD de que discutir a forma como determinada ideia matemática é abordada e como essa forma pode ser alterada visando um fim educacional também é uma atividade matemática.

O estudo das frações ordinárias

Antes de prosseguir consideramos relevante discorrer um pouco sobre a ideia de fração. Nos livros analisados ela antecede o aparecimento do processo de racionalização. Racionalizar é um procedimento que entra em pauta quando o resultado da operação é uma fração cujo denominador é um número irracional. Mais especificamente:um número na forma de radical.

Iezzi, Dolce e Machado (2005) introduzem o assunto no sexto ano através do tangram, isto é, focalizando a relação parte/todo e concluem afirmando:

> Podemos dizer, então, que fração é um número que representa partes de um inteiro.Nas frações o número colocado abaixo do traço é chamado *denominador* e indica em quantas partes iguais a unidade foi dividida. O número colocado acima do traço é chamado *numerador* e indica em quantas partes da unidade foram tomadas (IEZZI; DOLCE; MACHADO, 2005, p. 154, grifos dos autores).

Fração, portanto, é um número composto de dois números e não um número composto por dois algarismos como o 23, por exemplo[6]. Um dos números constituintes da fração indica a divisão do inteiro e o outro a quantidade de partes utilizadas. Pela definiçãofica evidente que se o numerador se igualar ao denominador a fração representará um número inteiro ($\frac{m}{n}=1$, se $n=m\neq 0$). De igual modo se o numerador for igual à metade do denominador então a fração representará a metade do inteiro. O raciocínio vale para um terço, um quinto e assim sucessivamente. Essa é a ideia expressa no texto.

Por ser a definição introdutória é natural supor que os autores não tiveram a intenção de incluir as frações impróprias, os casos em que mais de um inteiro está em jogo.

Dessa forma, pode-se imaginar que se um inteiro for cortado em um número muito grande de pequeninos pedaços o numerador pode ter um crescimento praticamente contínuo até se igualar ao denominador. Se denominarmos o numerador de m e o denominador de n pode-se dizer que $0 < m \leq n$ quando o inteiro for único, isto é, quando se tratar de fração ordinária própria.

Páginas adiante os mesmos autores (IEZZI; DOLCE; MACHADO, 2005) introduzem o conceito de dízimas periódicas através da divisão do numerador de uma fração pelo seu denominador e o resultado é um número composto por diversos algarismos (repetidos ou não). A fração como um número começa se delinear a partir desse ponto e também quando se estuda a conversão de fração em número decimal. Dois números tornam-se um como em $3/4 = 0{,}75$, onde os números três e quatro quando combinados dessa forma transformam-se em um único número, o 0,75 ou o 75%.

Nesse caso temos que a fração pode ser parte de um inteiro, isto é, os números que a compõem representam um conjunto de partes, mas também pode representar uma divisão de um desses números (o numerador) pelo outro.

A fração como um número traz implícita a divisão de um de seus componentes pelo outro. Mais precisamente, a divisão do numerador pelo denominador.

Cavalcante et al (2006, p. 156) afirmam que “As frações são usadas, no dia-a-dia, para expressar quantidades e medidas que não podem ser indicadas com números naturais”.

---

[6]Adler (1972, p. 63) tratando da construção desse novo campo numérico (as frações) afirma que “cada fração representará um número nesse novo sistema”, mas que nesse conjunto “os números não serão simples frações”, é uma “família de frações ou de quocientes inteiros”.

A ideia de fração como medida é a tônica inicial desses autores. Os exemplos com medidas de canos e de parafusos evidenciam isso. Nas páginas seguintes à citada é introduzido o conceito de fração como parte de uma figura ou de um conjunto de objetos. Logo mais eles afirmam que "qualquer fração pode ser representada por meio de uma divisão e vice-versa. O traço da fração representa uma divisão" (CAVALCANTE et al. 2006, p. 161).

Dessa forma a fração pode ser vista: a) como um número ($3/5 = 3:5 = 0{,}6$), b) como uma parte do todo ($1/5$ é a quinta parte de alguma coisa dada)[7], c) como uma razão entre duas grandezas ou d) como medida interna, isto é, o denominador como medida do numerador. Esta quarta visão pressupõe que em $m/n\,(m,n \in$ Z, $n \neq 0)$ m pode ser dividido por n ou que n mede m. Fração como um número composto por dois (ou mais) algarismos, e não "por dois números", se obtém a partir da primeira visão, que estamos denominando de medida externa, isto é, medida de um objeto dado.

Na perspectiva de razão, se temos a fração $1/2$, por exemplo, parece fácil explicar para o estudante do nível básico de escolaridade que 1 objeto foi dividido em 2 partes ou que 3 objetos foram repartidos para 4 pessoas, no caso de $3/4$. Igualmente é fácil dizer que em uma festa havia 3 adultos para cada 4 crianças ou 1 refrigerante para cada 2 crianças. Não nos parece fácil dizer que havia 3 refrigerantes para cada 6 décimos de uma pessoa, ou 3 refrigerantes para cada $3/5$ de pessoa.

Se adotarmos o raciocínio de divisão do inteiro em partes discretas, pensamos que se não é fácil aceitar que se divida um inteiro por um número não inteiro, supomos ser ainda mais difícil entender o significado de $1/\sqrt{2}$ ou $6/\sqrt{3}$. Fiquemos com $1/\sqrt{2}$ por ser mais simples.

Poderíamos pensar em abordar as frações irracionais, com a ideia de medida (externa), isto é, a fração como a medida de um objeto, mas entendemos que (mesmo ignorando $\sqrt{2}$ é um número que traz implícita a incomensurabilidade), nesse nível de escolaridade que estamos considerando, ela fica comprometida porque se $1/2$ de uma polegada representa 50% da polegada e $3/5$ representa 60% dela, o que representaria $1/\sqrt{2}$ de

[7]Aqui está implícita a ideia de medida de que tratam Cavalcante et al. O objeto foi dividido em 5 partes iguais e a quinta parte é a medida da porção que interessa (20% do todo).

uma polegada (ou de um metro)? Supomos que é nessa perspectiva que o aluno pensa porque é nessa perspectiva que foi induzido a pensar.

Quem estudou incomensurabilidade e se apropriou da ideia entende que 1 e $\sqrt{2}$ são grandezas incomensuráveis sabe que toda tentativa de compará-las será feita por aproximação. No entanto, o estudo dos segmentos incomensuráveis não aparece em todos os livros e, supostamente, o assunto não é posto em pauta pelo professor.

Deve-se levar em conta ainda que os autores ao apresentar as frações irracionais, apresentam-nas como frações, isto é, como parte de um todo ou como havendo uma possível mensurabilidade entre numerado e denominador.

É a partir dessa constatação que a discussão seguinte faz sentido.

Como ideia de uma parte do todo não parece razoável evocar porque dividir o todo em $\sqrt{2}$ pedaços não deve ser muito simples de conceber mesmo por quem ainda não se deu conta do que significa um número irracional. Se dividir um inteiro em 1,5 pedaços talvez já seja complexo o que dizer de dividir em 1,4142...? A ideia de se tentar ignorar a incomensurabilidade advém do fato de que nesse nível de escolaridade muitos alunos desconhecem esse conceito.

A ideia de razão entre duas grandezas também não parece fácil uma vez que recai no já exposto de que 1 inteiro possa ser partilhado por uma quantidade irracional (que para os alunos pode significar indefinição por causa das infinitas casas decimais na repetidas) de indivíduos quaisquer.

Resta considerar a ideia de medida interna, a ideia de que uma parte (o denominador) mede a outra (o numerador). Nesse caso, medida não implica em a fração representar uma unidade de medida, como ¾ do todo, por exemplo, mas uma relação interna à própria fração. Fração entendida como razão entre duas grandezas de mesma natureza, onde, em $\frac{m}{n}$, n mede m.

Antes de prosseguir reconhecemos que alguns autores induzem a possibilidade de que, em $1/\sqrt{2}$ que um segmento que mede um metro está sendo medido por um segmento que tem $\sqrt{2}$ metros, uma vez que justificama racionalização tratando a "dificuldade" de se proceder a divisão de " $\frac{7}{\sqrt{2}} = \frac{7}{1{,}414213562} = 7 : 1{,}414213562$ " e 1: $\sqrt{2}$ (ANDRINI; VASCONCELLOS, 2012, p. 33; LEONARDO, 2010).

Em edições anteriores essa “dificuldade” nem era discutida. Admitia-se implicitamente a impossibilidade da divisão. A evidência dessa admissão está no fato de induzirem à racionalização antes de discutirem o significado dela. É como se dissessem: “racionalize e não tente entender qual a relação que existe entre essas duas grandezas”.

De fato, se dividir um inteiro por um número decimal exato, como 0,6 ou 0,8, não tem sido fácil “convencer” o aluno de que faz sentido proceder assim, o que dizer de dividir (no sentido de repartir) por um decimal não exato como 1,4142...? Portanto, emtoda discussão sobre racionalização há obstáculos a serem superados. Conforme Bachelard (1996) ato de conhecer consiste na superação de ideias previamente constituídas e que essa ação não é imediata e nem espontânea. Há um “trajeto” cognitivo a ser percorrido, conflitos a serem vivenciados e rompimentos a serem produzidos.

No entanto, pode-se ainda pensar em termos de obstáculo didático, conforme Brousseau (1976), uma vez que algumas dificuldades em trabalhar com frações irracionais estão ligadas à forma de abordagem do assunto.

Romper com a ideia de que sempre que aparecer um número na forma $\frac{m}{n}$ é possível que *n* caiba em *m*um certo número de vezes ou que o inteiro pode ser dividido em *n* partes não tem sido a tônica dos autores. A proposta é operacionalizar, efetuar a divisão.

Mas, se as outras ideias (razão, relação parte/todo e um número) trazem dificuldades conceituais porque implica pensar em grandezas discretas insistimos então pensar no outro significado da divisão: medida. A questão, portanto, é: quantas vezes *n*cabe em *m* na fração m/n(subtendendo que estamos trabalhando com números inteiros diferentes de zero)?

Que somente a metade, de um segmento de 2 m, cabe em um segmento de 1 m talvez não seja tão complicado admitir, mas o que dizer de um segmento de 1m ser medido por um segmento que mede $\sqrt{2}$ m? Quantas vezes $\sqrt{2}$ m cabe em 1 m?

Supomos que venha dessas especificidades e dificuldades, que no nível de ensino fundamental se proceda a racionalização. Pois é mais fácil admitir que um segmento que mede $\sqrt{2}$ m seja dividido ao meio ($\sqrt{2}/2$) do que admitir que ele caiba, aproximadamente, 0,7 vezes em um segmento de 1 m como é o caso de $1/\sqrt{2}$. Dessa forma, se na via direta ($1/\sqrt{2}$) é difícil perceber a divisão de 1 por $\sqrt{2}$, pela via inversa, isto é, após racionalizada, ($\sqrt{2}/2$) mostra que em um segmento de 1 unidade cobre cerca de 70% do segmento de $\sqrt{2}$

unidades ($\sqrt{2}/2$ ≅0,7071... ≅70%). É uma forma de contornar o problema da incomensurabilidade, apresentando uma solução prática.

Logo o artifício didático da racionalização ($1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2$) torna o assunto mais compreensível, mas não necessariamente mais compreendido. Por que uma coisa é igual a outra aparentemente tão diferente? Nos casos onde não há o hábito de dialogar com o estudante sobre o que está sendo ensinado; quando não é hábito ocorrer à argumentação (conversa de mão dupla que busca esclarecer, convencer) em sala de aula é possível que após algumas aulas sobre racionalização,alguns estudantes, que não permitiram que seu raciocínio se embotasse no processo, fiquem perguntando: se $1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2$ (isto é, se resultou no denominador sobre o dobro do numerador) então por que $1/5 \neq 5/2$? As regras da Matemática não valem sempre?

Esta é outra questão que escapa quando se procede a racionalização de forma imediata como normalmente se faz. São obstáculos didáticos sendo produzidos?

Quando fazemos $1/\sqrt{2} = 1/\sqrt{2} \times \sqrt{2}/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2$, na maioria das vezes, sequer discutimos que estamos multiplicando pela unidade e é isso que dá a garantia de que $1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2$. É essa multiplicação pela unidade que nos permite escrever $3/5 = 21/35$, pois, $3/5 = 3/5 \times 7/7 = 21/35$. Dos livros consultados somente Imenes e Lellis (2012) trazem esse indicativo explícito.

É essa mesma propriedade que vai justificar porque $1/5 \neq 5/2$.

Dessa forma, a racionalização permite tratar essa relação entre os componentes de uma fração de forma mais plausível e o estudo da racionalização pode finalmente sair do contexto totalmente abstrato.

Entendemos que nos cursos de licenciatura esse assunto deve ser discutido pelos professores. A suposição de que todos saibam que uma fração também pode ser um número e que esse número pode, inclusive, ser irracional, pode ser falsa porque muitos estudantes podem não ter esse entendimento. Mesmo que a suposição fosse verdadeira, defendemos a discussão porque o verdadeiro problema não está na possível falsidade do pressuposto de que todos já sabem, está no fato de esquecer que esse acadêmico será professor e que trabalhará essas questões com alunos de um nível de escolaridade que requer cuidados na forma de abordar a Matemática. Admitimos que tratar esse, e outros assuntos, sem a preocupação com o diálogo com a classe sobre o tema em estudo é um falha na proposta daquele que assim proceder estando na função de formador de professores. Portanto, o problema reside no fato de que o assunto deve ser discutido.

Retomando para aprofundamentos

Tendo discorrido rapidamente sobre o significado da racionalização estamos nos propondo em fazer a retomada de alguns parágrafos precedentes para um ligeiro aprofundamento.

Dissemos em parágrafos anteriores que uma fração pode ser vista como um número, como uma parte do todo, como uma razão entre duas grandezas ou como uma medida interna. Esta quarta visão pressupõe que em m/n ($m,n\in$ Z, $n\neq 0$) m pode ser dividido por n ou que n mede m. A ideia de medida interna, convém repetir, não é a usual, isto é, o denominador servir de parâmetro não para dimensionar objetos, mas de comparação interna, entre os próprios componentes da fração.

Entendemos que esse assunto requer ampliação. Vimos que fração como um número se delineia a partir da divisão do numerador pelo denominador. Para quem se habituou a pensar em número como uma entidade abstrata e com vida própria, para quem número já não representa necessariamente uma quantidade de objetos ou uma medida, não deve ser difícil aceitar a divisão de2 por $\sqrt{5}$, por exemplo. Não sabemos informar se essa facilidade se estende para muitas pessoas, se a "regra" é válida para a maioria.

Ver a fração (m/n) como parte do todo, isto é, como se o todo fosse cortado em n pedaços (fragmentação discreta do todo) de igual tamanho e em que uma quantidade $m$desses pedaços seja tomada, pode ser dificultada nas frações cujo denominador é um número irracional tanto na apresentação direta da fração com n irracional ($1/\sqrt{2}$) como da forma racionalizada ($\sqrt{2}/2$) com n inteiro e m irracional. Cortar um inteiro em $\sqrt{2}$ ou $\sqrt{5}$ pedaços só é possível em um contexto de pura onde apenas a operação interessa, onde importa apenas saber que se trata de um número. De igual modo cortar um inteiro em, diríamos, 5 pedaços e tomarmos $\sqrt{2}$ desses pedaços ($\sqrt{2}/5$) supomos que também seja possível somente em um contexto abstrato porque nesse contexto onde um número tem vida própria essas discussões são secundárias. Embora seja esse o “estado de espírito” (BACHELARD, 1996) ambicionado talvez seja um pouco cedo esperar que o estudante do ensino fundamental o tenha atingido.

Não nos parece simples, isento de conflitos, pensar a fração com componentes irracionais em termos de algo prático, perceptível pelos órgãos dos sentidos ou imaginável em termos quantitativos discretos, mesmo para quem não se deu conta do fator “incomensurabilidade” que permeia o assunto. O entendimento de que fração seja um pedaço do inteiro, como um valor discreto em que ocorreu um corte literal parece nãoajudar a entender uma fração irracional ou diminuir a suspeita de que não se encaixa no contexto de frações comuns.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) fazem referência à “inexistência de modelos materiais que exemplifiquem os irracionais” e pressupõem que essa seja uma das “dificuldades na aprendizagem dos irracionais” (BRASIL, 1998, p.106).

A fração como razão entre duas grandezas contínuas de mesma natureza, em que uma mede a outra, nos parece a abordagem mais apropriada. A que justifica a racionalização do denominador de uma fração irracional.

No ensino fundamental, e mesmo em outros níveis de escolaridade, não temos percebido a preocupação em tratar divisão sob essa perspectiva. Quase sempre a divisão é abordada com o sentido de repartir ou simplesmente uma operação. Mesmo quando se transforma fração em número decimal, exato ou periódico, ocorre simplesmente uma operação entre dois números como entes abstratos e o resultado não é visto como uma medida de algo ou em quantas vezes o denominador estava contido no numerador.

Essa ideia de medir, se devidamente explorada, contribuiria para evitar contratempos como o caso vivenciado por um dos autores deste texto durante uma prova em um curso de Administração. Ao resolver um dos problemas propostos e, ao se deparar com o resultado (obtido pela calculadora) de que $3000/0{,}5 = 6000$, um acadêmico se irritou dizendo que o problema não tinha solução porque conduzia a uma divisão cujo resultado era “absurdo”.Seu raciocínio era, para ele, obvio: se sempre haviam lhe dito que dividir é repartir como se pode repartir uma quantidade e ela ainda ficar maior?

A divisão como medida, com a ideia de “quanto cabe” ou “quanto é necessário para”, facilitaria o entendimento do acadêmico citado. Bastaria pensar em quantas moedas de 50 centavos ele necessitaria para compor 3000 reais. Ou, quantos meio-metros teria que andar para percorrer 3km.

Essa ideia de medida associada à geometria pode ser útil especialmente para entender uma fração que tem como denominador um número irracional. Já vimos que se $1/\sqrt{2}$ oferece dificuldades para interpretação, a sua racionalização ($\sqrt{2}/2$) torna essa fração mais "racional" porque dividir um segmento ao meio não é estranho. Mesmo casos mais complexos podem ser interpretados dessa forma. A fração $5/\sqrt{2}$ equivale a dividir um segmento que mede $5\sqrt{2}$ ao meio, isto é, equivale a $5\sqrt{2}/2 \cong 7{,}05/2$. Ou, ainda, que o segmento $\sqrt{2}$ m cabe, aproximadamente, 3,5 vezes em um segmento de 5m.

Quando temos $2/(\sqrt{5}-\sqrt{3})$ ao invés de perguntarmos quantas vezes o segmento de medida $\sqrt{5}-\sqrt{3}$ cabe em um segmento de medida 2, afirmaremos que é um segmento de medida $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ dividido ao meio ou seja: $(\sqrt{5}+\sqrt{3})/2$.

Sobre as dificuldades em se trabalhar com números irracionais, consta nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (PCN) que:

> De modo geral, as formas utilizadas no estudo dos números irracionais têm se limitado quase que exclusivamente ao ensino do cálculo com radicais. Apesar de tradicionalmente ocupar um razoável espaço no currículo do quarto ciclo, o trabalho com os irracionais pouco tem contribuído para que os alunos desenvolvam seu conceito.Do ponto de vista de sua evolução histórica, a existência e a caracterização dos números irracionais foram questões bastante complicadas. Apesar de ser antiga a convivência do homem com os números irracionais, somente há pouco mais de cem anos é que esses números foram sistematizados (BRASIL, 1998, p.106).

Os números irracionais trazem em sua própria constituição um certo grau de dificuldade e o documento citado ao afirmar que "o trabalho com os irracionais pouco tem contribuído para que os alunos desenvolvam seu conceito" revela a necessidade de um abordagem específica. Dessa forma a nossa proposta de um tratamento diferente para as frações irracionais está respaldada.

Entendemos que a racionalização possui maior valência instrumental para o entendimento do significado de uma fração cujo denominador é um número irracional e que a forma racionalizada tem maior potencial instrumental didático no estudo das frações irracionais. Essa discretização do denominador torna o seu estudo mais plausível para quem pensa fração em termo de partição de um inteiro em porções discretas.

Esse poderia ser um tema de prática como componente curricular (CNE, 2002) em análise ou nas disciplinas em que as frações irracionais mais aparecem como Álgebra Linear e Geometria Analítica.

A prática como componente curricular na universidade dificilmente é operacionalizada porque muitos professores não conseguem encontrar temas matemáticos que estão presentes na educação básica e que são revistos com aprofundamentos na universidade.

Considerações finais

Pelo exposto podemos deduzir que ensinar racionalização de frações com um número irracional no denominador é uma atividade que se torna relevante, e justifica o dispêndio de tempo em sala de aula, se a Matemática for explorada nesse processo.

Mesmo no curso superior, e talvez nesse nível fosse o local mais apropriado para esse debate, o assunto pode se tornar objeto de bons momentos de diálogo com o estudante.

A racionalização das frações somente através da exemplificação como se faz seguida de modelos prontos para serem seguidos não contribui para o que Bachelard considera relevante para a formação do espírito científico que é marcado pela inquietação e pelo rompimento. De igual modo, entendemos que introduzir o assunto como se fosse uma forma de facilitar uma operação para saber quantas vezes uma grandeza cabe na outra, exatamente duas grandezas incomensuráveis, sem oportunidade para uma "conversa" sobre o que está tentando revelar e sobre o que ainda permanece oculto, é uma abordagem simplista.

Dessa forma, entendemos que racionalizar não deve ser o foco, e sim analisar a Matemática que se "esconde" sob um processo de racionalização.

Entendemos também que ao gastar muitas horas-aula exercitando racionalização, sem explorar a matemática subjacente, podemos estar vivendo o paradoxo de ensinar muito sem ensinar nada.

Referências

ADLER, Irving. **Iniciação à Matemática de Hoje**. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico, 1972.

ANDRINI, Álvaro; VASCONCELLOS, Maria José.**Praticando Matemática**. 3.ed. renovada. São Paulo: Editora do Brasil, 2012.

BACHELARD, Gastón. **A formação do espírito científico**: contribuição para uma psicanálise do conhecimento. Rio de Janeiro: Contraponto, 1996.

BARROSO, Juliane Matsubara (editora). **Projeto Araribá**: Matemática. São Paulo: Moderna, 2006.

BONJORNO, José Roberto; BONJORNO, Regina Azenha; OLIVARES, Ayrton. **Matemática**: fazendo a diferença. São Paulo:FTD, 2006.

BOSCH, Marianna; CHEVALLARD, Yves. OstensifsetSensibilitéauxOstensifsdansl'activitéMathématique. **RecherchesenDidactiquedesMathématiques**, 19/1, 77-124, 1999.

BOYER, Carl B. **História daMatemática**. 2.ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: Matemática. Brasília: MEC /SEF, 1998.

BROUSSEAU, GUY. **Les obstacles epistemologiques et lês problemes em mathematiques**. Comptesrendus de La XXVIII er encontre organisee par La Commission Internationale pourl 'Etude et l', Louvain-la-neuve, pp.101-117, 1976. Disponível em: <http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/51/65/69/PDF/Obstacles_76.pdf> Acesso em : 11 jun 2013.

CASABÓ, Marianna Bosch. **Unpunto de vista antropológico: laevolución de los "instrumentos de representación" enlaactividad matemática**. Quarto Simpósio de laSociedadEspañola de InvestigaciónenEducación Matemática. Huelva: Universidade de Huelva, 2001. Disponível em <http://www.seiem.es/publicaciones/archivospublicaciones/actas/Actas04SEIEM/IVsimposio.pdf> Acesso em 11 de jun de 2009.

CAVALCANTE, Luiz G. et al. **Para saber Matemática**: 5ª série. 2.ed. São Paulo: Saraiva, 2006.

CHEVALLARD, Yves; BOSCH, Marianna; GASCÓN, Josep.**Estudar matemáticas**: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem. Porto Alegre: Artmed, 2001.

CENTURION,Marília; JAKUBOVIC, José. **Matemática**: teoria e contexto, 9º ano. São Paulo: Saraiva, 2012.

CONSELHO NACIONAL DE EDUCAÇÃO. Conselho Pleno. Resolução CNE/CP 2, de19 de fevereiro de 2002. Institui a duração e a carga horária dos cursos de licenciatura, de graduação plena, de formação de professores da Educação Básica em nível superior. Publicada no **Diário Oficial da União**, Brasília, 4 de março de 2002, seção 1, p.9.

DAVIS, Harold T. **História da Computação**. São Paulo: Atual, 1992. (Tópicos a história da matemática para uso em sala de aula.)

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MACHADO, Antonio. **Matemática e Realidade**: 5ª série. 5.ed. São Paulo: Atual, 2005.

IMENES, Luiz Márcio; LELLIS, Marcelo. **Matemática:**Imenes& Lellis. 2.ed. São Paulo: Moderna, 2012.

KOLMAN, Bernard. **Introdução à Álgebra Linear**: com aplicações. 6.ed. Rio de Janeiro: Prentice-Hall do Brasil, 1998.

LEON, Steven J. **Álgebra Linear com Aplicações**. 4.ed. Rio de Janeiro. LTC, 1999.

LEONARDO, Fábio Martins (Editor). **Projeto Araribá**: Matemática. 3. ed. São Paulo: Moderna, 2010.

MORI, Iracema; ONAGA, Dulce Satiko. **Matemática**: ideias e desafios, 8 série. São Paulo: Saraiva, 2002.

SILVEIRA, Francisco Porto da.**Fração Ordinária**. Porto Alegre: UFRS, 2011. Disponível em: <http://www.mat.ufrgs.br/~cydara/perola3.htm> Acesso em : 20 out. 2014.

STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. **Álgebra Linear**. 2.ed. São Paulo: McGraw-Hill, 1987.

TRAJANO, António. **Arithmetica Progressiva**: curso completo theorico e pratico de ArithmeticaSupeiror preparado para a mocidade Brazileira. 57.ed. São Paulo; Rio de Janeiro; Belo Horizonte: Livraria Francisco Alves, 1880?.

Submetido em outubro de 2014

Aprovado em dezembro de 2014