REVISTA DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL (UFMS)

Volume 7, Número Temático – 2014 – ISSN 2359 - 2842

Conhecimentos de Alunos Brasileiros e Franceses Relacionados ao Campo Conceitual dos Números Irracionais

Knowledge of Brazilian and French Students Regarding to the Conceptual Field of Irrational Numbers

Veridiana Rezende[1]

Clélia Maria Ignatius Nogueira[2]

Resumo

A presente pesquisa foi desenvolvida com vistas a identificar conhecimentos relacionados aos números irracionais, mobilizados em resolução de atividades matemáticas, por alunos brasileiros, concluintes do Ensino Fundamental, Médio e Licenciatura em Matemática, e alunos franceses, concluintes de níveis de ensino correspondentes. O motivo de se investigar sujeitos de países distintos decorre do fato de que os currículos da Educação Básica do Brasil e da França apresentam diferenças, especialmente em relação aos irracionais. Como procedimentos metodológicos realizaram-se entrevistas individuais com resolução de atividades matemáticas, que foram filmadas. No decorrer das análises buscou-se identificar os possíveis teoremas em ação falsos mobilizados nas respostas dos alunos. Os resultados apontam que o fato de os números irracionais estarem explícitos ou não nos currículos e livros didáticos não interfere no desempenho dos alunos em relação a esse conceito. Ao contrário, é a experiência escolar e a diversidade de situações matemáticas que eles vivenciam que vai favorecer a aprendizagem relacionada aos números irracionais.

Palavras-chave: Conhecimentos. Escola Básica. Licenciatura em Matemática.

Abstract

This research was developed in order to identify the knowledge regarding irrational numbers mobilized in the resolution of mathematical activities by Brazilian students concluding Basic Education, High School and Degree in Mathematics, and French students concluding the correspondent levels. The reason of investigating subjects from different countries is due to the fact that the curriculums of Basic Education from Brazil and France present differences, mainly regarding to irrational numbers. As methodological procedures, we performed individual interviews with the resolution of mathematical activities, which were filmed. Along analyzes we tried to identify possible false theorems in action mobilized by the students' answers. The results show that the irrational numbers being or not explicit at the curriculum and didactic materials do not interfere in the students'

[1] Doutora pelo Programa de Pós – graduação em Educação para a Ciências e a Matemática da Universidade Estadual de Maringá, professora adjunta da Universidade Estadual do Paraná – Unespar – Câmpus de Campo Mourão, Campo Mourão, Paraná, Brasil, rezendeveridiana@gmail.com.

[2] Doutora pelo Programa de Pós – graduação em Educação da Universidade Estadual Paulista - Unesp – Câmpus de Marília, professora convidada do Programa de Pós-graduação em Educação para a Ciência e a Matemática da Universidade Estadual de Maringá e docente da Unicesumar, Maringá, Paraná, Brasil, voclelia@gmail.com.

performance regarding such issue. By the contrary, it is the educational experience and the diversity of mathematical situations that they experience, that will favor the learning related to irrational numbers.

Keywords: Knowledge. Basic School. Degree in Mathematics.

Introdução

Apresentamos neste trabalho os resultados de uma pesquisa relacionada ao campo conceitual dos números irracionais no processo escolar. Consideramos campo conceitual no sentido de Vergnaud (1990), como um conjunto de situações, conceitos, representações, símbolos, propriedades e teoremas necessários para o estudo de determinado conceito.

A pesquisa foi realizada com 42 alunos, sendo 21 alunos brasileiros concluintes do Ensino Fundamental, Médio e Curso de Licenciatura em Matemática, e 21 alunos franceses concluintes de níveis correspondentes do sistema de ensino francês. A finalidade de investigar alunos brasileiros e Franceses decorre do fato de serem sujeitos de países com culturas e sistemas de ensino distintos, particularmente em relação ao ensino dos números irracionais.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) para a disciplina de Matemática (BRASIL, 1998; 1999), no sistema de ensino brasileiro o estudo dos números irracionais deve ocorrer no 8º e/ou 9º anos do Ensino Fundamental e no 1º ano do Ensino Médio. No que diz respeito ao sistema de ensino francês (FRANCE, 2009; 2008), o conceito número irracional não é explicitado nos documentos curriculares oficiais (*Programmes*)da Educação Básica (*Collège* e *Lycée*), ficando a cargo do professor de Matemática e de autores de livros didáticos oficializarem ou não o ensino desse conteúdo.

No entanto, embora não sejam explicitados nos currículos franceses, os números irracionais fazem parte da trajetória escolar dos alunos desse país desde a *Quatrièmme* – nível correspondente ao 8º ano do Ensino Fundamental, durante o estudo de diversos conceitos matemáticos, como teorema de Pitágoras, raiz quadrada, figuras geométricas planas, sólidos geométricos, trigonometria, funções, soluções de equações do segundo grau, entre outros. Desse modo, diante de sistemas de ensino distintos, nossa pesquisa teve como objetivo geral analisar os conhecimentos relacionados aos números irracionais, mobilizados em atividades matemáticas por alunos brasileiros e franceses, concluintes de cada nível de ensino investigado.

Para as análises, buscou-se identificar os conhecimentos mobilizados pelos alunos que finalizavam cada nível de ensino, com atenção especial aos possíveis teoremas em ação –

termo designado por Vergnaud (1990) para representar categorias de conhecimentos implícitos indicados nas respostas dos alunos.

A teoria dos campos conceituais e as contribuições para a presente pesquisa

A teoria dos campos conceituais nasceu na década de 1980 com o psicólogo e pesquisador francês Gérard Vergnaud, orientando de doutorado de Jean Piaget. Trata-se de uma teoria psicológica que se refere ao desenvolvimento cognitivo dos indivíduos, sobretudo quando ligado à aprendizagem de competências complexas, na escola e no trabalho (NOGUEIRA, REZENDE, 2014).

No que se refere ao ensino de Matemática, para Vergnaud (1990), um sujeito aprende e se desenvolve em função das situações enfrentadas no decorrer do processo escolar. Vergnaud (1990) defende que para o estudo de um conceito são necessários diversos outros conceitos, situações, símbolos, representações, propriedades e teoremas interligados, formando o que o pesquisador denomina por Campo Conceitual.

Nessa perspectiva, e de acordo com nossos estudos, constatamos que a compreensão do conceito de números irracionais está relacionada ao conjunto das situações que envolvem equações algébricas de grau maior ou igual a 2, representação decimal dos números irracionais, números racionais, conceitos de infinito, potências, raízes (quadradas, cúbicas, etc.), teorema de Pitágoras, medidas de segmentos, figuras geométricas (quadrado, círculo, etc.), entre outras, além dos diferentes símbolos, propriedades, teoremas e formas de se representar número irracional.

Assim, levando em conta a complexidade do campo conceitual dos números irracionais, estruturamos as atividades do instrumento de pesquisa considerando algumas das situações acima mencionadas, juntamente com a diversidade de representações simbólicas, relacionadas ao campo conceitual investigado.

Segundo Vergnaud (1990), dificilmente os sujeitos explicitam com palavras todos os seus conhecimentos; muitos deles permanecem implícitos. A esses conhecimentos implícitos nas respostas dos sujeitos, Vergnaud (1990) denomina invariantes operatórios. Os invariantes operatórios são conhecimentos que um sujeito dispõe, na ação, para resolver determinada situação. Esses conhecimentos, chamados de conhecimentos em ação, podem ser explicitáveis ou não, conscientes ou não. Além disso, podem ser falsos em relação a determinado conceito ou propriedade matemática, ou ser apenas localmente verdadeiros.

Vergnaud (2009) diferencia os conhecimentos implícitos dos sujeitos em duas categorias de naturezas distintas, conceitos em ação e teoremas em ação: “Um conceito em ação é um conceito considerado pertinente na ação. Um teorema em ação é uma proposição tida como verdadeira na ação” (VERGNAUD, 2009, p. 23). Os primeiros não são passíveis de serem verdadeiros ou falsos; eles apenas são pertinentes ou não para a situação. Já os teoremas em ação podem ser verdadeiros ou falsos. Para a presente pesquisa, nos dedicamos a investigar os possíveis conhecimentos implícitos na forma de teoremas em ação, ou seja, nas proposições assumidas como verdadeiras pelos alunos no momento das entrevistas.

Além disso, Vergnaud (2009) defende que propor atividades que favoreçam desequilíbrio e desestabilização pelo menos local de conhecimentos falsos mobilizados pelos alunos é essencial para auxiliar a aprendizagem. Por isso, a escolha das situações para a presente pesquisa também teve como objetivo favorecer e identificar a desestabilização de teoremas em ação falsos possivelmente manifestados pelos alunos no decorrer da entrevista.

Desse modo, a teoria dos campos conceituais subsidiou tanto a elaboração das atividades do instrumento de pesquisa, ao indicar que para a compreensão de um conceito são necessárias diversas situações, símbolos, propriedades, teoremas e outros conceitos, quanto às análises das respostas dos sujeitos, favorecendo compreender o desempenho e os conhecimentos mobilizados pelos alunos de diferentes níveis de escolarização, com atenção especial aos conhecimentos implícitos, modelados na forma de teoremas em ação.

Procedimentos metodológicos e descrição das atividades

Devido ao objetivo geral da pesquisa, *analisar os conhecimentos mobilizados em atividades matemáticas por alunos brasileiros e franceses, concluintes de cada nível de ensino investigado, relacionados ao conceito de número irracional*, os sujeitos colaboradores foram 42 alunos de escolas públicas brasileiras e francesas, que finalizavam seu respectivo nível de ensino: Ensino Fundamental, Médio ou Superior de Matemática para os alunos brasileiros, e *Collège*, *Lycée* e *Licenceen Mathématiques* para os alunos franceses.

A seleção dos sujeitos brasileiros de Ensino Fundamental e Médio e dos sujeitos franceses de níveis correspondentes, *Collège* e *Lycée*, ocorreu por meio de membros das equipes pedagógicas ou professores de Matemática das instituições envolvidas. Todavia, foi solicitado que os alunos fossem voluntários e que não fossem nem os que mais se destacassem nem aqueles com baixo desempenho em Matemática perante os colegas de turma.

No que se refere aos alunos brasileiros e franceses do Ensino Superior, a pesquisadora entrou na sala de aula do último semestre do curso de Licenciatura em Matemática das três instituições de Ensino Superior envolvidas na pesquisa, sendo duas instituições brasileiras e uma francesa, apresentou os objetivos da pesquisa e solicitou a participação voluntária dos alunos. Foram entrevistados todos os alunos que se disponibilizaram a participar e compareceram no momento da entrevista.

Com o objetivo de realizar uma pesquisa que não representasse uma realidade pontual, como em um único estabelecimento de ensino, fez-se a opção por diversificar as instituições de ensino envolvidas. Sendo assim, no Brasil, entre os meses de setembro e outubro de 2011, participaram como sujeitos da pesquisa sete alunos do Ensino Fundamental de quatro colégios, sete alunos do Ensino Médio de quatro colégios e sete alunos do Curso de Matemática de duas Universidades. Todas as instituições de ensino brasileiras envolvidas na pesquisa são públicas e pertencem ao interior do Paraná.

Na França, as entrevistas foram realizadas entre os meses de março e abril de 2012, com sete alunos de dois *Collèges* distintos, nove alunos de dois *Lycées* e cinco alunos do Curso de Matemática de uma Universidade. Todas as instituições francesas envolvidas são públicas e se localizam na região NordPas de Calais.

Na França, existem diversas modalidades de *Lycée*. Nesta pesquisa, foram contemplados alunos do *Lycée Economique et Social* e do *Lycée Scientifique*. O primeiro *Lycée* foi escolhido devido ao fato de possuir currículo mais próximo do currículo do Ensino Médio brasileiro, no sentido dos conteúdos matemáticos contemplados, bem como a carga horária da disciplina de Matemática. Já o *Lycée Scientifique* foi contemplado por preparar os alunos para ingressar nos cursos de Ciências Exatas. Considerando que esta pesquisa contemplava alunos do Curso de Matemática, julgamos pertinente analisar respostas de alunos dessa modalidade de *Lycée*.

A coleta de dados ocorreu por meio de entrevistas individuais, sustentadas na resolução pelos alunos de oito atividades, que foram filmadas.

Para a elaboração das atividades, consideramos, a partir de nossos estudos, diversos conceitos, símbolos, teoremas, propriedades e situações presentes no campo conceitual dos números irracionais. O instrumento de pesquisa consistiu de oito atividades elaboradas com nível de dificuldade correspondente ao 9º ano do Ensino Fundamental, que foram aplicadas a todos os sujeitos da pesquisa. Foi acrescentada uma questão sobre a demonstração da não racionalidade de $\sqrt{2}$ aos alunos brasileiros do Ensino Médio e Superior de Matemática, e aos alunos franceses de níveis correspondentes. Questões sobre as teorias que sustentam a construção dos números irracionais e reais também foram acrescentadas aos alunos do Ensino Superior. Além disso, as atividades foram elaboradas buscando contemplar dez ideias base de números irracionais, elencadas em Rezende (2013, p. 98):

> I. Compreender sobre as infinitas casas decimais de alguns números.
> II. Compreender que alguns números podem ser representados como a razão entre dois números inteiros e outros números não podem.
> III. Diferenciar um número irracional de um número racional: saber que um número irracional não pode ser escrito como a razão entre dois números inteiros, e que um número irracional possui infinitas casas decimais não periódicas.
> IV. Considerar a existência de números irracionais e perceber para que esses números servem.
> V. Saber aplicar o teorema de Pitágoras.
> VI. Aceitar a existência de segmentos de medidas $\sqrt{n}, \forall n \in N$.
> VII. Aceitar que a equação $x^2 = p$ tem solução real, para todo $p \in R_+$.
> Para alunos do ensino superior:
> VIII. Saber demonstrar que os números algébricos da forma $\sqrt{n}$, com *n* não quadrado perfeito, não são racionais.
> IX. Conhecer definições, propriedades e exemplos de conjuntos enumeráveis e não enumeráveis.
> X. Conhecer as teorias de Eudoxo, Dedekind e Cantor para a construção dos números reais.

Cada atividade do instrumento de pesquisa estava associada a pelo menos uma dessas ideias base, e todas foram elaboradas de modo que, a cada atividade, o grau de complexidade aumentasse, no sentido de ampliar conceitos, representações simbólicas e propriedades envolvidas.

Também foram levados em consideração pressupostos de Vergnaud (1990), conforme os quais, para a compreensão de um conceito, o sujeito deve vivenciar uma diversidade de situações relacionadas a este conceito. A pesquisa de Bronner (1992) também serviu de inspiração para organizar as atividades nos quadros Numérico, Algébrico, Gráfico e Geométrico.

Essa estruturação das atividades, além de permitir analisar os conceitos mobilizados pelos alunos, e de colaborar para a identificação de possíveis teoremas em ação indicados em suas respostas, permitiu perceber o desempenho conceitual dos alunos dos diferentes níveis entrevistados.

Durante as entrevistas realizadas individualmente, a pesquisadora procurou, assim como sugere Carraher (1989, p. 32), "[...] acompanhar o raciocínio de cada sujeito, estando atenta ao que o sujeito diz ou faz, sem corrigir automaticamente as respostas dadas pelo sujeito de acordo com seu raciocínio e sem completar o que o sujeito diz”, oportunizando que o sujeito estabelecesse suas conclusões.

Para as respostas de cada atividade foram solicitadas justificativas, permitindo que os sujeitos demonstrassem seu nível de compreensão. Procurou-se meios de esclarecer as ambiguidades surgidas nas respostas. Esse modo de conduzir as entrevistas, juntamente com Vergnaud (1990), que nos fundamenta a analisar e reconhecer conhecimentos implícitos nas respostas dos sujeitos, possibilitou coletar dados condizentes ao objetivo da pesquisa.

As respostas de cada sujeito da pesquisa foram analisadas individualmente com base nas observações da conduta dos alunos no decorrer das entrevistas ao resolver as atividades propostas, levando em consideração os sucessos, hesitações, fracassos, com atenção especial aos conhecimentos implícitos, modelados na forma de teoremas em ação possivelmente mobilizados pelos alunos durante as entrevistas.

Em relação às atividades, a primeira delas teve como objetivo conhecer as percepções dos alunos sobre números irracionais. Para isso, foram escolhidos dez entre números decimais, racionais, irracionais e complexos, a saber $\sqrt{3}$, $\sqrt{9}$, π, 3,14, 0,333..., 0,101001000..., $\frac{2}{3}$, -4, $\sqrt{-4}$, 0, que foram representados em cartões e exibidos aos alunos. Com os cartões em mãos, os alunos eram questionados sobre a existência ou não dos números representados, qual sua utilidade, e quais os alunos classificariam como racional, irracional ou nem racional e nem irracional.

A partir da atividade 2, seguindo um padrão diferente da primeira, foram apresentadas aos alunos atividades individuais em folhas sulfite, com as quais eles ficavam livres para fazerem os registros escritos nas folhas ou apenas explicitar a resposta oralmente para a pesquisadora.

Na atividade 2, tivemos como objetivo investigar se os alunos têm consciência que os números disponíveis no visor da calculadora são números decimais. Assim, era solicitado que os alunos teclassem $\sqrt{2}$ na calculadora; em seguida, eles eram questionados se é possível afirmar que o número que aparece no visor da calculadora, 1,414213562, é igual ao número $\sqrt{2}$. Se os alunos afirmassem que a igualdade $\sqrt{2} =$ 1,414213562 é verdadeira, a pesquisadora pedia que eles calculassem os valores de ambos os membros da referida igualdade ao quadrado, e justificassem o resultado obtido (o resultado obtido com os cálculos é 2 = 1,999999999). Para os alunos que respondiam que a igualdade $\sqrt{2} =$ 1,414213562 não é verdadeira, a pesquisadora solicitava justificativa e lançava questões relacionadas à irracionalidade do número $\sqrt{2}$.

A atividade 3 teve como objetivo favorecer aos alunos a mobilização de conhecimentos relacionados ao fato de que *um número irracional não pode ser escrito como a razão entre dois números inteiros*. Para isso, considerando o número irracional $\sqrt{2}$, os alunos eram questionados sobre a possibilidade ou não de escrever esse número como a razão entre dois números inteiros.

Elaboramos a atividade 4 com a intenção de investigar se os alunos consideram ou não a existência de solução para equações da forma $x^2 = \mathrm{a}$, com $a \in R$, sobretudo quando *a* não é um número quadrado perfeito, isto é, quando a solução da equação trata-se de um número irracional algébrico.

As atividades 5(a), 5(b), 6, 7 e 8 dizem respeito à ideia base VI[3]. No entanto, particularmente, as atividades 5(a), 5(b) e 6 foram elaboradas com vistas a perceber se os alunos concebem a existência de um quadrado, cuja medida de lado é um número irracional algébrico.

A atividade 5(a) questionava aos alunos sobre a existência ou não de um quadrado de medida de área 13 *cm²*, solicitando aos alunos justificarem suas respostas. Ao inserir a atividade 5(a) no instrumento de pesquisa, teve-se como hipótese, confirmada com as análises das respostas dos alunos, que eles poderiam apresentar indicativos de conhecimentos falsos, dizendo que não existe um quadrado de medida de área aproximadamente igual a 13 *cm²*. Apenas para os alunos que disseram que não existe o quadrado de medida de área 13 *cm²*, foi proposta a atividade 5(b), com a intenção de desestabilizar, ou pelo menos perturbar localmente, tais conhecimentos equivocados.

A atividade 5(b) consistiu em apresentar um quadrado ABCD cuja medida do lado coincidia com a medida do lado de um triângulo retângulo de catetos com medidas *2cm* e *3cm*, conforme a figura a seguir, e tinha por enunciado: *A área do quadrado ABCD é* 13 *cm². Você concorda com esta afirmação ou não?* Nossa intenção era que os alunos utilizassem o teorema de Pitágoras para encontrar $\sqrt{13}$*cm* como medida do lado do quadrado, favorecendo-os a concluir que a área do quadrado é 13 *cm²*.

[3] Ideia base VI: aceitar a existência de segmentos de medidas $\sqrt{n}, \forall n \in N$.

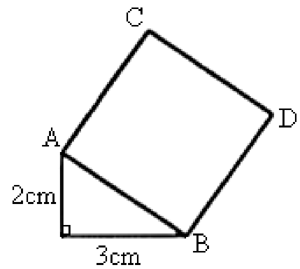

Figura 1 - Quadrado de medida de área 13 *cm²*

A atividade 6 foi inspirada em Douady (1986), e diz respeito aos infinitos retângulos de área 24 *cm²* que podem ser representados no plano cartesiano. Essa atividade também questionava sobre a existência de um quadrado cuja medida de área não é um número quadrado perfeito, e teve como objetivo analisar se, no quadro de funções, mais precisamente em seu aspecto gráfico, diferenciado da atividade precedente, os indicativos de desestabilização dos teoremas em ação falsos, percebidos em alguns alunos no decorrer da atividade 5(b), também poderiam ser indicados nessa situação.

A atividade 7 foi inserida no instrumento de pesquisa com o objetivo de perceber se os alunos reconhecem a possibilidade de se representar um número irracional algébrico, tais como $\sqrt{2}$ ou $\sqrt{5}$, na reta numérica. Para isso, foi apresentada a representação de reta conforme a figura 2, e questionado aos alunos sobre a possibilidade de se representar $\sqrt{2}$ na reta numérica. Para os alunos do Ensino Superior, foi questionada a possibilidade de se representar $\sqrt{5}$ na reta.

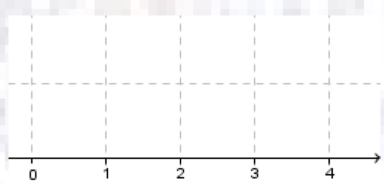

Figura 2- Representação da reta numérica

Ao elaborar a atividade 7, teve-se como hipótese, confirmada com as análises, que alguns alunos poderiam alegar, de modo incorreto, que não seria possível representar o número $\sqrt{2}$ (ou $\sqrt{5}$) na reta numérica; ou, ainda, que eles poderiam representar uma aproximação do número $\sqrt{2}$ por meio de um número decimal. Por isso, elaboramos a atividade 8, destinada a esses alunos, visando à possível desestabilização, ou pelo menos perturbação local, desses conhecimentos falsos.

Sendo assim, na atividade 8, com o apoio da figura 3, a pesquisadora apresentava aos alunos os passos da construção do caracol pitagórico, mostrando uma possibilidade de se construir segmentos de medidas irracionais da forma $\sqrt{n}, n \in Z_+^*$, quando n não é um número quadrado perfeito. Após apresentar aos alunos esse método de construção de segmentos, a pesquisadora os questionava se, diante do referido método, eles representariam o número $\sqrt{2}$(ou$\sqrt{5}$) de um modo diferente do que eles haviam representado na atividade 7.

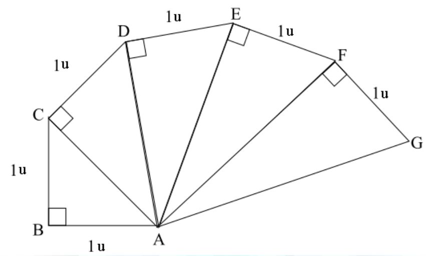

Figura 3- Caracol Pitagórico

Análises das respostas dos sujeitos da pesquisa

Para as análises da pesquisa, para preservar a identidade dos sujeitos da pesquisa, os alunos foram identificados por uma sigla correspondente a uma letra inicial de seu respectivo nível de ensino e um número entre de 1 a 7, conforme a legenda a seguir:

Níveis do Sistema de Ensino Brasileiro	**Sigla**
Ensino Fundamental	F1, F2, F3, F4, F5, F6, F7
Ensino Médio	M1, M2, M3, M4, M5, M6, M7
Graduação em Matemática	G1, G2, G3, G4, G5, G6, G7
Níveis do Sistema de Ensino Francês	**Sigla**
Collège	C1, C2, C3, C4, C5, C6, C7
Terminale Economique et Social - TES	ES1, ES2, ES3, ES4
TerminaleScientifique - TS	S1, S2, S3, S4, S5
LicenceenMathématiques	L1, L2, L3, L4, L5

Quadro 1 - Siglas dos sujeitos colaboradores da pesquisa

Em relação aos alunos do Ensino Fundamental e *Collège*, foram percebidas várias semelhanças em suas respostas, principalmente no que diz respeito a conhecimentos equivocados relacionados ao conceito de número irracional. Destaca-se que os alunos entrevistados desse nível de ensino não distinguem números racionais de irracionais, e não reconhecem como irracional nem ao menos certos irracionais prototípicos, tais como $\sqrt{2}$ e π . Além disso, eles não souberam dizer para quê servem os números $\pi, \sqrt{3},\ 0{,}10100...$, embora o estudo de áreas e perímetros de circunferências, e volumes de esferas, que estão diretamente relacionadas ao número π , faça parte dos currículos brasileiros e franceses para esse nível de ensino, assim como o estudo do teorema de Pitágoras e trigonometria no triângulo retângulo, os quais se relacionam ao significante $\sqrt{3}$.

Em relação aos conhecimentos mobilizados sobre soluções de equações do segundo grau da forma $x^2 = b,\ b \in R_+$, foi possível notar que, embora de acordo com os currículos brasileiros e franceses, este conteúdo seja estudado nesse nível de ensino, nenhum desses alunos apresentou a solução negativa das equações contempladas no rol de atividades. Porém, quando se refere ao valor de b negativo, assim como a equação considerada na pesquisa $x^2 = -9$, surgem, de modo equivocado, nas respostas de seis alunos, sendo três alunos do Ensino Fundamental e três alunos do *Collège*, duas soluções – uma positiva e uma negativa -, conforme apontam as análises.

No que se refere a situações que envolvem a *raiz quadrada* de um número, foi possível constatar que o domínio numérico dos alunos do Ensino Fundamental e *Collège* diz respeito aos números inteiros quadrados perfeitos, pois nove desses alunos disseram que as equações $x^2 = 17$ e $x^2 = \pi$ não possuem solução porque não existe um número que, se elevado ao quadrado, resulte em 17 ou π .

Na atividade 5(a), que questionava sobre a existência ou não de um quadrado de medida de área $13\ cm^2$, dentre os 14 alunos do Ensino Fundamental e *Collège* entrevistados, 11 alunos alegaram que não existe o quadrado de medida de área 13 cm^2 porque não existe um número cujo quadrado resulta em 13, conforme ilustra a fala do aluno francês C4: *não... Porque não existe 13 na tábua de multiplicação... Nós não podemos encontrar um número que vezes ele mesmo resulte em 13*. Assim, para falas como essa, juntamente com as análises das demais atividades, pode-se indicar a mobilização de dois teoremas em ação falsos: *Seja* $a \in R_+$, $\sqrt{a}$ *existe se e somente se* a *é quadrado perfeito*; *Se* $p \in R_+$ *não é quadrado perfeito então não existe* $x \in R$ *tal que* $x^2 = p$.

Destaca-se que, ao negar a existência de um quadrado, esses alunos estão negando a existência da medida do lado do quadrado, que se trata de um número irracional. Esse conhecimento falso é tão resistente para esses alunos, que, mesmo diante de um método de construção de segmentos de medida irracionais da forma $\sqrt{n},\ n \in Z_+$, apresentado na última atividade da entrevista, com o objetivo de contribuir para a desestabilização desse conhecimento equivocado, apenas um aluno do *Collège* demonstrou ter compreendido a situação e representou o segmento de medida $\sqrt{2}\ u.c.$ na reta.

No que diz respeito aos alunos do Ensino Médio e *Lycée*, eles também mobilizam conhecimentos equivocados relacionados ao campo conceitual dos números irracionais. No entanto, a possibilidade de desestabilizá-los, ou pelo menos perturbá-los localmente, é mais concebível do que em relação aos alunos do Ensino Fundamental e *Collège*. Por exemplo, eles reconheceram de modo imediato que a calculadora proporciona a decimalização dos números, conforme a fala do aluno brasileiro M4: *Eu acho que não, porque na calculadora não aparece todos os números. Vai ter mais números.*

Dentre os alunos da Educação Básica entrevistados, em relação à atividade 3, que questionava sobre a possibilidade de representar o número $\sqrt{2}$ como a razão entre dois números inteiros, apenas dois alunos franceses de TS responderam corretamente, alegando que não é possível, conforme exemplifica a fala de S2: *Pra mim não... pra mim as raízes não podem ser escritas como a divisão entre 2 inteiros, as raízes não são inteiras*. No entanto, dentre os demais alunos da Educação Básica, brasileiros e franceses, prevaleceram respostas incorretas, alegando a impossibilidade de se representar $\sqrt{2}$ como a razão entre dois números inteiros devido ao fato de $\sqrt{2}$ não ser um número inteiro, exemplificado na fala de ES3: *Não, eu penso que não... são números com vírgula, não são números como 1,2,3,4*. Argumentos como este, presentes na fala dos alunos, indicam a possibilidade do teorema em ação falso: *Seja x um número não inteiro, então não existem* $p,q \in Z$ *, com* $q \neq 0$ *tal que* $x = \frac{p}{q}$.

Na atividade 5(a), dentre os 16 alunos do Ensino Médio e *Lycée* entrevistados, apenas 2 alunos de TS responderam corretamente, dizendo que o quadrado de medida de área igual a $13\ cm^2$ existe, e que a medida de seu lado é $\sqrt{13}\ cm$. Porém, na atividade 5(b), que tinha o objetivo de favorecer os alunos compreender sobre a existência do quadrado de medida de lado $\sqrt{13}\ cm$, houve avanço no desempenho dos alunos do Ensino Médio e TES em relação aos alunos de Ensino Fundamental e *Collège*, pois cinco alunos indicaram desestabilização, pelo menos local, do teorema em ação falso manifestado por eles na atividade anterior: *Se* $b \in R_+$ *não é quadrado perfeito, então não existe um quadrado cuja medida de área é* $A = b\ cm^2$.

Segundo o que se presumia, devido ao longo período escolar, experiências com estudos e situações matemáticas, o melhor desempenho, no decorrer das entrevistas, ocorreu com os alunos do Ensino Superior. Estes sujeitos apresentaram respostas mais precisas, menor quantidade de conhecimentos falsos, mobilização consciente da decimalização proporcionada pela calculadora, e possibilidade de desestabilizar, ou pelo menos perturbar localmente, teoremas em ação falsos.

Entretanto, as análises mostram que conhecimentos falsos ligados às situações relacionadas aos números irracionais também se fazem presentes nas respostas desses futuros professores de Matemática. Destaca-se o fato de alguns alunos não considerarem a não periodicidade dos números irracionais, classificando $0{,}101001000\ldots$ como racional, ou $0{,}333\ldots$ como irracional, e não saberem sobre a não periodicidade de $\sqrt{2}$; dificuldades com a ideia de infinito; não justificam a existência de números irracionais transcendentes tais como $0{,}101001000\ldots$; não consideram a existência e não sabem representar segmentos de medidas irracionais algébricas, e chegam a negar a existência de quadrados cuja medida de área é $13\ cm^2$ ou $24\ cm^2$.

Quanto às respostas dos alunos brasileiros do Ensino Superior, um aluno indicou resposta relacionada aos teoremas em ação falsos *Se x não é um número inteiro, então x é irracional*; *Se x é um número negativo, então x é irracional*.

Apesar de todos os alunos do Ensino Superior entrevistados, brasileiros e franceses, alegarem ter estudado conjuntos enumeráveis e não enumeráveis, nenhum aluno brasileiro respondeu corretamente que os números racionais são enumeráveis e que os irracionais são não enumeráveis. Três alunos, G3, G5 e G7, enunciaram corretamente a definição de conjuntos enumeráveis e afirmaram que o conjunto dos números racionais é enumerável, porém esses três alunos disseram acreditar, de modo incorreto, que os irracionais também são enumeráveis, pois acreditam que deve existir uma bijeção entre o conjunto dos irracionais e o conjunto dos números naturais.

Em relação às soluções das equações do segundo grau apresentadas na atividade 4, percebe-se avanço nas respostas dos alunos do Ensino Superior em relação aos alunos da Educação Básica. Contudo, alguns equívocos e dúvidas também foram percebidos nesses alunos: 2 alunos franceses, L2 e L3, não mencionaram as soluções negativas em nenhuma das equações; e dúvidas surgiram em relação à raiz quadrada do número transcendente π, como pode ser ilustrado pela fala do aluno G2:

> **G2:** *Como eu nunca tinha pensado na raiz de um número irracional, eu vou pensar como a raiz de 17, eu acho que existe. Mas são diferentes, porque raiz de 17 é a raiz de um número inteiro e raiz de π é a raiz de um número irracional. Mas eu acho que existe... estou com medo de afirmar que ela está no conjunto dos números reais... nunca pensei, não sei se eu colocar na calculadora o que vai aparecer. Se fosse uma avaliação, eu colocaria que está no conjunto dos números irracionais, mas por que... está eu não saberia dizer.*
> **Pesquisadora:** *Mas se não estiver no conjunto dos números reais, a qual conjunto deveria pertencer a raiz do número π ?*
> **G2:** *Nos complexos.*
> **Pesquisadora:** *Você acha que a raiz de π é um número complexo?*
> **G2:** *Não, acho que não.*
> **Pesquisadora:** *Então a qual conjunto ele deve pertencer?*
> **G2:** *No conjunto dos números reais. Agora sim, faltou pensar um pouco mais... raiz de π pertence ao conjunto dos reais.*

Esta fala mostra que, embora os alunos do Ensino Superior apresentem avanço no desempenho em relação aos alunos da Educação Básica, é possível notar dúvidas presentes nas respostas desses futuros professores de Matemática condizentes a conceitos estudados desde o Ensino Fundamental, presentes a todo o momento nas aulas e livros de Matemática, como a raiz quadrada e número real.

Dois alunos disseram que existe um quadrado de medida de área aproximadamente igual a $13\ cm^2$, e quatro alunos responderam corretamente, indicando mobilizar os teoremas em ação verdadeiros *Seja* $b \in R_+$ *então existe um quadrado de área* $A = b\ cm^2$*, cuja medida dos lados é* $\sqrt{b}\ cm$; e *Se* $a \in R_+$*, então existe* $\sqrt{a}$.

No entanto, no decorrer das entrevistas dos alunos que mobilizaram conhecimentos em ação falsos, foi possível perceber em suas falas a desestabilização, ou pelo menos perturbação local, de conhecimentos falsos, indicando momentos de aprendizagens. Para exemplificar, citamos que nas atividades 5(a), 5(b), 6 e 7, o aluno brasileiro G2 havia mobilizado os teoremas em ação falsos *Se* $n \in N$ *não é quadrado perfeito, então não é possível representar* $\sqrt{n}$ *na reta numérica*, e *Se* $b \in R_+$ *não é quadrado perfeito, então não existe um quadrado de área* $A = b\ cm^2$. No entanto, na última atividade, após conhecer um método de construção de medidas irracionais, o aluno representou o segmento de medida $\sqrt{5}\ u.c$ na reta numérica e argumentou: *Então, a partir disto eu posso construir o quadrilátero com esta medida de lado?* Indicando, portanto, desestabilização, ou pelo menos perturbação local, dos conhecimentos falsos mobilizados nas atividades precedentes.

Conclusões

A presente pesquisa permite afirmar que os alunos do Ensino Fundamental e *Collège* mobilizam conhecimentos relacionados ao campo conceitual dos números irracionais de modo correspondente, não sendo possível apontar diferenças significativas entre suas respostas, mesmo em se tratando de sistemas de ensino distintos e de os currículos explicitarem ou não esses números.

Em relação aos alunos do Ensino Médio e *Lycée* – TES – *Terminale Economique et Social* e TS – *Terminale Scientifique*, é possível afirmar que existe avanço no desempenho dos alunos de TS, diante de situações do campo conceitual dos números irracionais, no que diz respeito a respostas mais precisas com menor mobilização de teoremas em ação falsos e agilidade em desestabilizar tais conhecimentos. Esse fato não nos surpreende, uma vez que os alunos de TS são preparados para ingressar em cursos universitários de Ciências Exatas, recebendo, portanto, maior ênfase nas disciplinas de Matemática, bem como carga horária mais ampla do que os alunos dos demais *Lycée* e do Ensino Médio brasileiro. Por consequência, os alunos franceses do Curso de Licenciatura em Matemática também apresentaram respostas mais precisas com menores indicativos de teoremas em ação falsos, sobretudo em relação às atividades 3, 4, 5, 6 e 7.

Segundo o que se presumia, devido ao longo período escolar, experiências com estudos e situações matemáticas, o maior desempenho no decorrer das entrevistas ocorreu com os alunos do Ensino Superior. Estes sujeitos apresentaramrespostas mais precisas, menor quantidade de conhecimentos falsos, mobilização consciente da decimalização proporcionada pela calculadora, e possibilidade de desestabilizar, ou pelo menos perturbar localmente,teoremas em ação falsos.

Entretanto, com relação às situações presentes no campo conceitual dos números irracionais, e considerando os sistemas de ensino brasileiro e francês, constatou-se que, independente do sistema de ensino em que os alunos estejam inseridos, seu desempenho avança conforme avança o nível de escolarização.

Além disso, a presente pesquisa mostra que, independente de este conceito estar explícito ou não nos currículos e livros didáticos, de se apresentar ou não a definição dos números irracionais aos alunos, de se inserir ou não um capítulo nos livros didáticos para se estudar a natureza dos números – racionais, irracionais, reais -, esses fatores não interferem na aprendizagem dos alunos em relação à natureza dos números. Ao contrário, os resultados da presente investigação apontam que é a experiência escolar, a diversidade de situações matemáticas vivenciadas pelos alunos, e a disponibilidade do professor em conhecer e apresentar a seus alunos atividades que favoreçam a desestabilização de conhecimentos falsos, que vão favorecer a apropriação do conceito de números irracionais.

Em relação às atividades utilizadas no instrumento de pesquisa, alertamos que elas não foram preparadas com o intuito de contemplar e esgotar todas as situações presentes no campo conceitual dos números irracionais, sobretudo porque consideramos que este seja um trabalho praticamente impossível. No entanto, as respostas dos alunos apontam que essas atividades podem auxiliar na aprendizagem de conceitos presentes no campo conceitual dos números irracionais, e favorecem a desestabilização, ou pelo menos a perturbação local, de conhecimentos equivocados manifestados por alunos em processo escolar.

Referências

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio.** Brasília:Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 1999.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: Ministério da Educação. Secretaria de Educação, 1998.

BRONNER, Alain. Connaissances Maliens a propos de la Racine Carrée. **Petit X**, n. 28, p. 119 a 55, IREM de Grenoble, Grenoble, 1992.

CARRAHER, Terezinha Nunes. **O método clínico:** usando os exames de Piaget. São Paulo: Cortez, 1989.

DOUADY, Régine. Jeux de cadres et dialectique outil-objet. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Grenoble : La Pensée Sauvage, vol. 7, n. 2, pp. 5 a 31, 1986.

FRANCE. **ProgrammesdesMathématiques. Classe de Seconde**. Bulletin Officiel (B. O.) nº 30 du 23 du juillet, 2009. Disponível em: <http://www.education.gouv.fr/cid28928/mene0913405a.html>. Acesso em: 15 nov. 2011.

FRANCE. **Programmes de l'enseignement de Mathématiques**. Bulletin Officiel spécial (B. O.) nº 6 du 28 du août, 2008. Programmes du Collège. Disponível em: <http://media.education.gouv.fr/file/special_6/52/5/Programme_math_33525.pdf>. Acesso em: 12 nov. 2011.

NOGUEIRA, C.; REZENDE, V. A teoria dos campos conceituaisno ensino de números irracionais: implicações da teoria piagetiana no ensino de matemática. **Schème: Revista eletrônica de Psicologia e Epistemologia Genéticas.** v. 6, n. 1, p. 41-63, 2014.

REZENDE, V. **Conhecimentos sobre números irracionais mobilizados por alunos brasileiros e franceses:** um estudo com alunos concluintes de três níveis de ensino.(Tese de doutorado). Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2013.

VERGNAUD, G. O que é aprender? In. **A aprendizagem Matemática na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais.** Org. BITTAR, Marilena, MUNIZ, Cristiano Alberto. Editora CRV, Curitiba, 2009.

_____________. La théorie des champs conceptuels. **Recherche en Didactique des Mathématiques**. Grenoble: La Pensée Sauvage, v. 10, n. 2.3, p. 133-170, 1990.

Submetido em outubro de 2014

Aprovado em novembro de 2014