REVISTA DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL (UFMS)

Volume 7, NúmeroTemático – 2014 – ISSN 2359-2842

Modelagem Matemática de Situações Reais utilizando Funções Quadráticas

Mathematical Modeling of Real Situations using Quadratics Functions

Hérica de Jesus Souza[1]

Afonso Henriques[2]

Resumo

Este trabalho consiste no desenvolvimento de uma sequência didática em torno de funções quadráticas, como objeto de estudo, com o intuito de investigarmos as práticas institucionais dos estudantes do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC). Pretendemos compreender, por meio dessas práticas, as relações desses estudantes com o referido objeto. A sequência em questão é composta por uma situação real, que se subdivide em quatro subtarefas, cuja realização passa pela modelagem matemática. Os resultados encontrados mostram que os estudantes, de modo geral, apresentam dificuldades na modelagem do tipo da situação proposta. Entendemos que tais dificuldades podem ser reflexo de um ensino pautado na realização de tarefas que exigem dos estudantes a aplicação imediata de técnicas repetitivas provenientes do bloco "logôs" da praxeologia do objeto de estudo, no contexto da Teoria Antropológica do Didático. Além dessa teoria, nos apoiamos também na noção de Registros de Representação Semióticas.

Palavras-chave: Praxeologia. Sequência Didática. Registros de Representação. Práticas Efetivas de Estudantes.

Abstract

In this paper we developed a didactic sequence on quadratic functions as a study object in order to investigate the institutional practices of Mathematics undergraduate students from the "UniversidadeEstadual de Santa Cruz (UESC)". We intend to understand, through these practices, the relationships of these students with that object. The referred sequence is composed by a real world situation, which is divided into four subtasks to be achieved by using mathematical modeling. The results shown that students generally have some difficult in modeling these types of situation. We believe that such difficulties can be a consequences from the teaching based on tasks that require to the students a immediate application of repetitive techniques from the "logos" blockof the praxeology of the study object, in the context of the Anthropological Theory of Didactics. In addition, we also used some notions the Registers of Semiotic Representation.

Keywords: Praxeological Organization. Didactic Sequence. Register of Representation.Effective Practices for Students

---

[1]Licenciada em Matemática pela Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC). Atualmente é estudante do curso de Especialização em Ensino de Ciências e Matemática da UESC, Ilhéus, BA, Brasil. *E-mail*: hericajsouza@hotmail.com.

[2] Doutor em Matemática e Informática pela Universidade Joseph Fourier de Grenoble (UJFG), França. Atualmente é professor titular da UESC, Ilhéus, BA, Brasil. *E-mail*: henry@uesc.br.

Introdução

É inegável que a Matemática é uma ciência de suma importância para a sociedade, na medida em que boa parte de seus conceitos estão presentes no cotidiano, favorecendo, direta ou indiretamente a modelagem de situações reais. Nesta modelagem, as noções de funções quadráticas, como objetos de estudo, encontram um espaço significativo. O seu campo de aplicação é, portanto, vasto, podendo desenvolver-se, tanto na própria Matemática quanto em outras ciências, como a Física, a Química e a Biologia. Contudo, o termo "modelagem" tem, às vezes, seu significado distorcido dentro da área de Matemática. Pois, muitas vezes é utilizado naturalmente sob sua forma verbal, na qual, modelar assume o significado de "reproduzir" ou "dar forma" ou até mesmo criar forma. Ora, paraBiembengut& Hein (2000) [3] "a modelagem matemática busca traduzir situações reais para uma linguagem matemática, para que, por meio desta, possamos melhor compreendê-las". Acreditamos que em tal tradução várias situações do mundo real podem ser modeladas com auxílio de tecnologias modernas a fim de contribuir na melhor compreensão referida pelos autores. Contudo, é louvável nos questionar sobre a existência da tradução que eles mencionam, nas práticas institucionais desenvolvidas na organização de objetos matemáticos, como por exemplo, as funções quadráticas.

Partindo destes pressupostos e questionamentos, nos propomos no presente artigo, aprofundar os nossos conhecimentos em torno do processo ensino-aprendizagem deste objeto matemático. Concordamos com Onuchic (2014), quando sublinha que, "ensino-aprendizagem, é uma palavra composta dentro de uma dinâmica de trabalho para a sala de aula, em que o ensino e a aprendizagem devem ocorrer simultaneamente" e, enfatizamos que a aprendizagem é um fenômeno ligado direta e/ou indiretamente ao ensino. Além disso, quando nos referimos ao processo ensino-aprendizagem estamos imerso na dialética de Onuchic onde neste processo os dois termos são fortemente entrelaçados. Deste modo, toda pesquisa voltada a aprendizagem de estudantes em torno de um objeto do saber, questiona direta ou indiretamente o ensino correspondente.

Neste contexto, elaboramos uma sequência didática, constituída por uma situação real (subdividida em quatro subtarefas), que abrange conceitos do objeto de estudo (funções

[3] http://editoracontexto.com.br/modelagem-matematica-no-ensino.html. Acessado em 04.12.2014

quadráticas), com o objetivo de analisarmos os conhecimentos que os estudantes do Curso de Licenciatura em Matemática (CLIMA) da UESC mobilizam na realização de tarefas envolvendo tais conceitos.

É importante ressaltar que a sequência foi construída com base na organização praxeológica de funções quadráticas proposta no livro didático intitulado Fundamentos de Matemática Elementar (conjuntos e funções) de autoria de Iezzi e Murakami (1977). Esse livro é sugerido no Projeto Acadêmico Curricular (PAC) do curso em questão e é utilizado frequentemente no ensino de funções quadráticas nessa instituição. A situação real que nos referimos anteriormente pode ser modelada com os conhecimentos matemáticos inerentes a essa praxeologia. Com efeito, nos questionamos sobre as práticas institucionais dos estudantes do curso de Licenciatura em Matemática da UESC (CLIMA) referentes ao estudo de funções quadráticas. Quais são os discursos tecnológico-teóricos que eles utilizam para explicar e justificar as técnicas empregadas na realização das tarefas propostas? Além disso, entendemos que o acesso aos conhecimentos correspondentes passa, necessariamente, por registro, o que nos permite questionar sobre os registros de representação que eles mobilizam na realização dessas tarefas.

Para obtermos respostas a essas questões, recorremos à Teoria Antropológica do Didático e a noção de Registros de Representação Semiótica, constituindo assim o nosso quadro teórico apresentado a seguir.

Quadro teórico

O quadro teórico é segundo Henriques & Serôdio (2013), "o referencial teórico de base de uma pesquisa, escolhido pelo pesquisador em função da sua problemática, constituído, pelo menos, por uma teoria capaz de fornecer ferramentas de análise aos estudos que se pretende desenvolver" (HENRIQUES; SERÔDIO, 2013, p. 2).

Assim, as duas teorias que nos referimos acima constituem o quadro teórico do presente trabalho as quais apresentamos resumidamente como segue:

Teoria Antropológica do Didático (TAD)

Essa teoria foi desenvolvida por Yves Chevallard(1992) e considera os objetosmatemáticos, não como existentes em si, mas como entidades que emergem de sistemas de práticas existentes em determinadas instituições. Esses sistemas ou *praxeologias* são descritos em termos de *tarefas* (T) específicas de cada objeto, que são solicitadas aos estudantes, das *técnicas* (τ) que permitem realizá-las, e dos discursos *tecnológico-teóricos* que servem para justificar e explicar as *técnicas*. Essas quatro noções pertencem a uma das vertentes da TAD chamada de *abordagem praxeológica*.

"Essa *abordagem* é um modelo para análise da ação humana institucional, descrita em termos de quatro noções: *Tarefa*, *Técnica*, *Tecnologia* e *Teoria*". (HENRIQUES, 2006). A*Tarefa* denotada pela letra T representa um tipo de *tarefa*; a *Técnica* (τ) consiste na(s) maneira(s) ou forma(s) de realizar um tipo de *tarefa* T; cada *técnica* tem uma *praxeologia* própria, que depende da instituição. A *Tecnologia* (θ), por sua vez, consiste de um discurso racional que justifica/explica a *técnica*, ou seja, garante a validade da *técnica* utilizada. A *Teoria* (Θ)tem o papel de justificar e tornar acessível a *tecnologia*.

Nesse modelo, as quatro noções, descrevem uma *organização praxeológica*completa [T/τ/θ/Θ], que se decompõe em dois blocos *saber-fazer* (praxe) - [T/τ] e o ambiente *tecnológico-teórico* (logôs) - [θ/Θ]. Nesse sentido, a *organização matemática* é uma *organização praxeológica* desenvolvida em torno de objetos matemáticos.

A *organização praxeológica*coloca em jogo as práticas institucionais em torno de objetos de estudo. Ou seja, fornece elementos que permitem estudar as práticas institucionais de determinados objetos de saberes, no nosso caso, as *funções quadráticas*. Bosch e Chevallard (1999) destacam que na *organização praxeológica*, ao utilizar uma *técnica* para realizar um determinado tipo de *tarefa* há a necessidade de manipular *objetos ostensivos* por meio dos *não-ostensivos*. Para os autores:

> Os *objetos ostensivos* são objetos que têm uma natureza sensível, certa materialidade que, para o sujeito humano, adquirem uma realidade perceptível, eles são de certa forma manipuláveis.
>
> Os objetos *não-ostensivos* são os objetos que, como as idéias, as intenções ou os conceitos, existem institucionalmente sem, no entanto, poderem ser vistos, ditos, entendidos, percebidos ou mostrados por si: eles só podem ser evocados ou invocados a partir da manipulação adequada de objetos ostensivos associados.

A *função quadrática*, por exemplo, é um objeto *não-ostensivo*que podemos evocar por meio de *objetos ostensivos* como $f(x) = ax^2 + bx + c$ ou a partir do gráfico de uma função desse tipo quando conhecidos ou especificados os valores das *variáveis didáticas*[4] (a, b e c) com $a \neq 0$.

Henriques, Attie e Farias (2007) ressaltam que a manipulação/representação é o que permite distinguir os objetos *não-ostensivos* dos *ostensivos*. Esses últimos podem ser perceptíveis na realização de *tarefas* pelos sujeitos. Entendemos que a manipulação de *objetos ostensivos* passa, porém, pela mobilização de pelo menos um *registro* correspondente. Com esse entendimento, nos propomos estudar a noção que apresentamos a seguir.

Registros de Representação Semiótica (RRS)

RRS é uma abordagem cognitiva, relativa à aquisição de conhecimento, proposta por Duval (2003) e possibilita ao sujeito a compreensão de um determinado conceito matemático, que pode ser representado em vários *registrosde representação semióticas* como a *língua materna* e os *registrosalgébrico*, *numérico* e *gráfico*.

Nesta abordagem, Duval (1993) sustenta que na Matemática, os objetos não são acessíveis, a não ser, por meio de suas representações que podem ocorrer em diferentes *registros* em função da mobilização de possíveis transformações. A distinção entre um objeto e sua representação é um ponto estratégico na compreensão da Matemática. Nessa compreensão, o autor considera dois tipos de *transformações* entre os *registros de representações semiótica*: *tratamentos* e *conversões*. O primeiro refere-se à transformação que ocorre no mesmo sistema. Já o segundo ocorre em diferentes sistemas ou *registros*. Além dessas duas atividades cognitivas, o autor apresenta também a noção da *coordenação* entre *registros* que se manifesta pela capacidade do sujeito reconhecerum mesmo objeto em duas representações distintas.

Segundo Duval (2003), do ponto de vista matemático, o *tratamento* é o mais utilizado do que a *conversão*, porque tem o papel de justificar e de provar, em função das situações em questão no mesmo registro de representação nas quais foram construídas. A *conversão* é geralmente deixada em segundo plano, sendo utilizada apenas para escolher o *registro* no qual os *tratamentos* serão realizados. O autor afirma que a*conversão* é a atividade que conduz à compreensão dos conceitos matemáticos e que a competência de converter sugere a *coordenação* de diferentes representações do mesmo objeto entre os *registros* que estão sendo

[4]Ver definição mais adiante.

mobilizados pelo sujeito. Em geral, no ensino-aprendizagem da Matemática não é colocada em evidência a diferenciaçãode um objeto matemático e suas possíveis *representações*. Com efeito, o sujeito, em particular os estudantes não reconhecem o mesmo objeto em mais de um registro de representações semióticas. "A originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea, de ao menos, dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar, a todo o momento, de registro de representação" (DUVAL, 2003).

O autor reforça, portanto, a importância da utilização de pelos menos dois registros de representação, para que se tenha melhor entendimento do conceito estudado, em particular no processo ensino-aprendizagem da Matemática.

Partindo dos pressupostos descritos até aqui propomos, nesse artigo, apresentar uma *sequência didática* constituída de um dispositivo experimental composto por uma situação real modeladacomos conceitos de *funções quadráticas*subdividindo-a em quatro *subtarefas*. Para realizar tais *subtarefas*do dispositivo, é fundamentala mobilizaçãodos *registros algébricos*, *numéricos* e *gráficos*. Além disso, o*tratamento*, a *conversão*e a *coordenação* de representações entre os registros utilizando *técnicas* correspondentes se tornam necessários nesta sequência.

Sequência didática (SD)

Henriques (2011) compreende a SD como um dos aspectos da Engenharia Didática desenvolvida por Artigue (1988). A Engenharia Didática vista como metodologia de pesquisa, "caracteriza-se por um esquema experimental baseado em realizações didáticas em sala de aula, isto é, na concepção, na realização, na observação e na análise sequencial de atividades de ensino (ARTIGUE, 1988)".De um modo geral, na *Engenharia Didática*, o papel do Professor, segundo Douady (1993):

> É o do engenheiro que vai realizar um projeto. Este projeto evolui na medida em que ocorrem as trocas professor/alunos em função das escolhas do professor pela experiência na disciplina...A engenharia é o resultado de uma análise preliminar e, ao mesmo tempo, de adaptação do funcionamento dessa análise em condições dinâmicas na sala de aula.

Baseado nesta metodologia e na análise institucional, bem como por entender a SD como um dos aspectos desta engenharia Henriques (2011) define:

> Uma *sequência didática* é um esquema experimental de situações-problema ou tarefas, realizadas com um determinado fim, desenvolvida por sessões de aplicação a partir de um estudo preliminar (análise institucional) em torno do objeto do saber e de uma análise matemática/didática, caracterizando os objetivos específicos de cada problema/tarefa (HENRIQUES, 2011, p. 22).

O autor explica que as análises matemática/didáticas devem evidenciar a maneira de realização e de controle das *tarefas* (destacadas na praxeologia do objeto de estudo em questão, ou elaboradas com base nesta praxeologia), os resultados esperados, os pré-requisitos, as *variáveis didáticas* das situações e as competências necessárias para a realização das *tarefas* propostas, tais variáveis possibilitam diferenciar a diversidade de tarefas propostas aos estudantes.

Assim, amparado na engenharia, Henriques (2011) decompõe a Sequência Didática emcinco etapas: (1) análise preliminar (análise institucional), (2) organização da *sequência*, (3) análise *a priori*, (4) aplicação da *sequência* e (5) análise *aposteriori*e *validação*. Seguindo as descrições do autor, na primeira etapa realizamos a análise institucional[5] a fim de melhor compreendermos a proposta institucional e as *organizaçõespraxeológicas*do objeto de estudo (*funções quadráticas*) na instituição de referência (CLIMA). Na segunda etapa, organizamos a SD contendo ao menos uma sessão constituinte deum dispositivo experimental com a situação-problema que nos referimos anteriormente elaborada com base napraxeologia destacada na primeira etapa.Na terceira etapa desenvolvemos a análise *a priori* de cada *tarefa* do dispositivo experimental da SD destacando os objetivos de cada *tarefa*, bem como as *técnicas* institucionais que permitem realizá-las. Na quarta etapa, correspondente a aplicação, apresentamos o local, os sujeitos envolvidos e as escolhas que fizemos para essa aplicação. Na quinta e última etapa, apresentamos o estudo das relações pessoais dos sujeitos, participantes da pesquisa, com o objeto de estudo em questão, revelando assim suas práticas institucionais efetivas e validação em confronto com análise a priori.

Segunda etapa da SD: Dispositivo experimental

O Quadro 1 apresenta o dispositivo experimental que nos referimos, compondo a única sessão da Sequência Didática, composta de uma situação real subdivida em quatro *subtarefas* que identificamos por: st1,..., st4.

[5]Nesse artigo não nos propomos apresentar a referida análise institucional. O leitor poderá encontrar elementos deste tipo de análise em Henriques (2011); Henriques; Nagamine; Nagamine (2012).

	Universidade Estadual de Santa Cruz – UESC Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas – DCET Curso de Matemática: Bacharelado e Licenciatura	**SD** Unitária
Dispositivo experimental para estudo das práticas dos estudantes sobre Funções quadráticas		
Professor da disciplina (opcional):		
Aluno (opcional):		Data:
Em cada tarefa abaixo, use os conceitos correspondentes aos estudos de funções quadráticas.		

T) Situação real simulada (SRS): Um motorista está dirigindo uma carreta em formato de um paralelepípedo tendo sete metros de comprimento e quatro metros de largura. Ele pretende entrar num túnel em forma de uma calha de “base” medindo seis metros de largura, cuja “altura máxima na entrada, em relação ao nível do mar”[6], é de nove metros. (Nessa situação, desprezamos a altura da roda, do chão a base do paralelepípedo). Nessas condições, realizar as seguintes subtarefas:

st1. Qual é a área máxima, em metros quadrados, que a superfície paralelepipédica da carreta deve ter para passar por esse túnel?

st2. Qual é a capacidade da carreta em metros cúbicos?

st3. Se a carreta tivesse seis metros e setenta e cinco centímetros de altura, qual seria a sua largura?

st4. Sabendo que a longitude e a latitude na saída do túnel são iguais a treze e onze, respectivamente, encontrar as coordenadas da base e a equação que representa a parábola na saída do túnel.

Quadro 1: Dispositivo experimental para análise de práticas de estudantes.

Como já sublinhamos, essa situação foi elaborada levando-se em consideração os conhecimentos institucionais da*praxeologia* de *funções quadráticas*proposta no livro didático intitulado “Fundamentos de Matemática Elementar (conjuntos e funções)”. O objetivo é estudar as práticas institucionais dos estudantes da instituição de referência[7]em torno desse objeto.Procuramos entender por meio dessas práticas suas relações com o estudo de *funções quadráticas*,ou seja, os conhecimentos que esses estudantes mobilizam em torno desse objeto de estudo.Acreditamos que esse dispositivo nos permitirá conhecer as *técnicas*, estratégias e os discursos *tecnológico-teóricos* que eles colocam em prática no estudo de *funções quadráticas*. Entendemos por estratégia o meio ou método utilizado pelo sujeito para abordar um problema. Tal método pode ser algébrico/analítico ou gráfico/geométrico. A primeira, segundo Henriques (2011) consiste na realização da tarefa sem recorrer ao registro gráfico. Enquanto que na segunda, recorre-se aos registros gráficos a partir da mobilização de conhecimentos geométricos. A técnica define-se como visto anteriormente.

---

[6]No sentido de que a base do túnel na entrada está na altitude zero, isto é no nível do mar. A altitude de um ponto é a distância vertical medida entre o referido ponto e o nível do mar.

[7]Para Henriques (2011), a *instituição de referência* é o local institucional de realização de uma pesquisa. A mesma coincide com a *instituição de aplicação* se ambas as atividades ocorrem no mesmo local.

Seria interessante analisarmos cada uma das *tarefas* propostas nesse dispositivo, apresentando a praxeologia de cada uma. Porém, nesse artigo nos contentamos em apresentar uma análise *a priori* da situação como um todo, e concentrarmos a atenção na *subtarefa* st4 finalizando o artigo com a apresentação da análise *a posteriori* em torno das práticas dos sujeitos envolvidos no experimento.

Terceira etapa da SD: Análise a priori da situação real simulada

Objetivo da *tarefa T* (*Situação Real Simulada - SRS*): essa*tarefa* propõeencontrarmos a equação que representa a parábola na entrada do túnel.

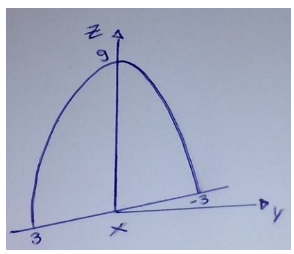

Figura 1: Representação da entrada do túnel no registro gráfico.

Para realizarmos as *subtarefas*correspondentes, é necessário interpretarmos corretamente as informações contidas no enunciado do mesmo e destacarmos todos os elementos matemáticos necessários na modelagem da situação. Em outras palavras, precisamos *converter* as informações matemáticas da*língua materna* para os *registros algébrico*, *numérico* e*gráfico*, a fim de favorecer a modelagem como definida por Biembengut& Hein (2000).

A carreta, por exemplo, tem o formato de um paralelepípedo, no qual se destacam: altura, largura e comprimento. As duas últimas dimensões são fornecidas, tendo quatro metros de largura e sete metros de comprimento, respectivamente. Com efeito, deve-se encontrar a altura da carreta, medida que permiterealizar st1 e st2.

Além disso, é essencial termos em mente o que é uma calha, tanto no *registrográfico* quanto *algébrico*, e que é um objeto matemático do espaço tridimensional correspondente à translação ou à superposição de parábolas ao longo de um dos eixos *x*, *y* ou *z*. Esta translação também pode ocorrer ao longo de uma reta paralela a um desses eixos coordenados. Portanto, é fundamental expressarmos esse objeto no *registro algébrico*, ou seja, encontrarmos a equação que representa a parábola na entrada do túnel e, em seguida a altura da carreta. Por consequência, os objetos da Geometria Analítica intervêm nesta modelagem.

Assim, para encontrarmos a referida equação consideramos um sistema de coordenadas cartesianas tridimensionais.Em seguida fazemos uma escolha (dentre os três) do plano coordenado de representação da entrada do túnel. Por conveniência, escolhemos o plano-*xz* tendo o eixo *z* como eixo de simetria da parábola e o plano-*xy* como suporte da base do túnel. Com esta escolha representamos a altura máxima da entrada do túnel no eixo *z* e a largura no eixo *x*. Como a base do túnel tem seis metros de largura, então consideramos três metros à direita da origem e três à esquerda (ao longo do eixo *x*) como mostra a Figura 1. Essa escolha não é única, podendo obter-se outras representações possíveis.

Com base nesta descrição, podemos afirmar que a equação que define a parábola na entrada do túnel intercepta o eixo *x*nos pontos (-3, 0, 0) e (3, 0, 0). Ou seja, $x = -3$ou$x = 3$são as raízes da equação quadrática ou da parábola em questão.

A partir destas informações, podemos encontrar tal equação ($x^2 - 9 = 0$) a partir de $ax^2 + bx + c = 0$,utilizando as técnicas *soma* e *produto de raízes*,que representamos *algebricamente* por:$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$ e $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ onde $a \neq 0$,sendo os números -1, 0 e 9 os valores das *variáveis didáticas* (*a*, *b* e *c*, geralmente conhecidas como constantes). Sublinhamos que *a*, *b* e *c* são *variáveis didáticas*, no sentido de que, na medida em que alteramos um deseus valores (ou todos), o comportamento da função se modifica. Já a variável *x* da função (variável matemática) não altera o comportamento da função à medida que *x* varia no domínio de *f*. De um modo geral as*variáveis didáticas*operam conforme descrito anteriormente na apresentação da SD.

Recordamos que as operações acima são realizadas no conjunto dos Reais.

Como já afirmamos, a entrada do túnel está representada no plano-*xz*. Assim, a equação quadrática que representa a entrada do túnel deve ser dada algebricamente por $z = -x^2 + 9$. Mobilizando a noção de função, escrevemos $f(x) = -x^2 + 9$. A *tecnologia* (θ) que justifica as duas *técnicas*empregadasconsiste na fórmula de Bhaskara tendo como *teoria* (Θ) o conjunto de conhecimentos matemáticos correspondentes ao estudo de *funções quadráticas*. Essa *tarefa T<SRS>* constitui, portanto, uma *praxeologia completa*. Apresentamos a seguir, a análise da*subtarefa*4.

Análise a priori da st4

O objetivo desta*subtarefa* é encontrar as coordenadas da base e a equação que representa a parábola na saída do túnel.Para isso, devemos ter em mente o que é longitude e latitude, que são conceitos que se referem, respectivamente, à distância de um ponto da esfera terrestre ao meridiano geral (Greenwich) e à distância de um ponto da esfera a linha do Equador.

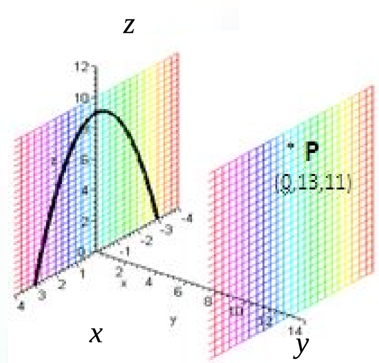

Figura 2: Representação dos planosde equações y=0 e y=13 no registro gráfico.

A primeira é medida ao longo de um paralelo, enquanto que a segunda ao longo de um meridiano.

Com base na escolha que fizemos anteriormente, representamos a entrada do túnel no plano-*xz*. Assim, o seu comprimento deve ser representado ao longo do eixo *y*. Com efeito, o gráfico da função quadrática que representa a saída do túnel deve estar em um plano paralelo ao plano-*xz.* Neste plano, a longitude e a latitude na saída do túnel medem 13 e 11 metros, respectivamente. Assim, o terno ordenado (0, 13,11) é o ponto máximo da parábola na saída do túnel. Isto é, no registro algébrico, o ponto P(0, 13,11) pertence ao plano de equação dada por$y$ =13 que é paralelo ao plano-*xz*, como mostra a Figura 2. Sabemos que a saída do túnel tem as mesmas dimensões da entrada, ou seja, 6 metros de largura na base e 9 metros de altura. Assim, do ponto P(0, 13,11) podemos dizer que a base da saída do túnel está numa altitude correspondente a 11 – 9 = 2 metros acima do plano-*xy*. Com efeito, a base do túnel corresponde à rampa, que é um plano secante aos planos $y = 0$e $y = 13$, ao longo das retas $x = t$, com $t \in R$ passando no ponto (0, 0, 0) e $x = t$, com $t \in R$ passando no ponto (0, 13,2), respectivamente, como mostra a Figura 3, onde Q(0, 13,2) é um ponto central da base na saída do túnel.

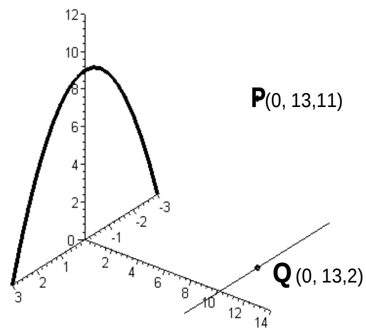

Figura 3: Representação da entrada do Túnel e dos pontos P e Q no registro gráfico.

Como a saída do túnel tem as mesmas dimensões da entrada, então a equação da parábola na saída assume o máximo P(0, 13,11), querepresentamos algebricamente por $z = 11 - x^2$ no plano $y = 13$.

Sabemos que os pontos (0, 13,11), (3, 13,2) e (-3, 13,2) pertencem à parábola na saída do túnel. Assim, considerando a equação geral da parábola nas variáveis (x e z) dada por $z = ax^2 + bx + c$, temos que:

$$\begin{cases} 11 = a(0)^2 + b(0) + c \\ 2 = a(3)^2 + b(3) + c \\ 2 = a(-3)^2 + b(-3) + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 11 \\ c + 9a + 3b = 2 \\ c + 9a - 3b = 2 \end{cases}$$

Somando as duas últimas equações membro a membro obtemos $2c + 18a = 4$. Multiplicando essa equação por $\frac{1}{2}$, temos $c + 9a = 2$.Usando o valor de c,obtemos:$11 + 9a = 2$ ou $9a = 2 - 11$, o que implica que $9a = -9$, daí$a = -1$. Assim, de $z = ax^2 + bx + c$ concluímos que $z = -x^2 + 11$.

Os planos (da entrada e da saída do túnel) que consideramos, até agora são paralelos ao plano canônico de equação$y = 0$ (ou plano-*xz*).A determinação das equações destes planos não é trabalhosa, o que não é o caso da determinação da equação do plano$\propto$representanteda rampa. Para obtermos a equação deste plano$\propto$, utilizamos a*técnicade encontrar* a equação de um planodefinido por três pontos conhecidos e um vetor normal a esse plano.

Notamos inicialmente que os pontos $A(0,\ 0{,}0)$, $B(3,\ 0{,}0)$ e $Q(0,\ 13{,}2)$ pertencem ao plano$\propto$ (rampa).Assim, $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ = <3, 0, 0> e $\vec{v} = \overrightarrow{AQ}$ = <0, 13, 2> são vetores de$\propto$. Com efeito, o produto vetorial $\vec{w}$ dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, isto é,$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$é um vetornormal ao plano$\propto$,onde,

$$\vec{w} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 2 \end{vmatrix} = (0-0)i - (6-0)\,j + (39-0)k = 0i - 6\,j + 39k = < 0, -6, 39 >$$

Dessa forma, a equação do plano $\propto$ (rampa) é determinada pelo produto escalar dos vetores $\vec{w}$ e $\overrightarrow{P_1P}$, isto é, pela*técnica*: $\vec{w} \cdot \overrightarrow{P_1P} = 0$ onde P_1é um ponto fixo de $\propto$ e P é um ponto qualquer de $\propto$. Escolhendo P_1 = A, temos:

$\vec{w} \cdot \overrightarrow{AP}$= <0, -6, 39>$\cdot < x-0, y-0, z-0 > = 0$,ou equivalentemente, $0 \cdot (x-0) - 6 \cdot (y-0) + 39 \cdot (z-0) = 0$,o que resulta na equação dada por $-6y + 39z = 0$ que é a equação do plano $\propto$correspondente à rampa do túnel. A Figura 4mostra a representação do túnel no registro gráfico, reunindo, as parábolas correspondentes à entrada à saída e à rampa do túnel,assim como à carreta.

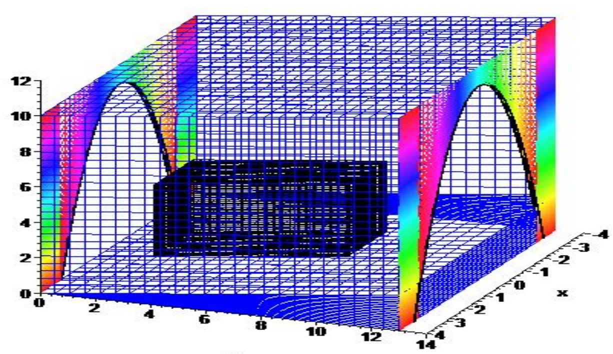

Figura 4: Representação do Túnel e a carreta no registro gráfico.

É importante ressaltarmos que encontrar a equação da rampa do túnel,não é objetivo da st4, porque os conhecimentos matemáticos inerentes a *praxeologia* do ensino de *funções quadráticas* não são suficientes para atender essa finalidade. Nesta *análise a priori* nos contentamos em encontrar a equação dessa rampa, com o intuito de trazermos mais contribuições para a modelagem dessetipo de situações, e esperamos que seja útil em outros trabalhos.

A seguir apresentamos a aplicação do dispositivo que acabamos de analisar.

Quarta etapa da SD: Aplicação do dispositivo experimental

O dispositivo experimental da *sequência didática*que acabamos de analisar foi aplicado a um grupo constituído de quatro estudantesdo curso de Licenciatura em Matemática da UESC que identificamos por A1, A2, A3 e A4. Eles tiveram em média quatro horas para realizar as *subtarefas* propostas. Os quatro estudantes estavam cursando o último dos nove semestres deste curso. Os mesmos se disponibilizaram voluntariamente a participar dessa pesquisa. A aplicação do dispositivo ocorreu em uma das salas de aulas da UESC no período vespertino no primeiro semestre de 2011.

As análises que apresentamos a seguir revelam as práticas institucionais efetivas desses estudantes em torno das *subtarefas* que compõem o dispositivo experimental como um todo, dando ênfase àst4.

Quinta etapa da SD: Análise a posteriori e validação

Como sublinhamos anteriormente, a realização das *subtarefas*st1 e st2 passa necessariamente pela *tarefa* de identificar/calcular a altura da carreta,o que nos permite encontrar essa altura é o valor máximo dafunção cujo gráfico descreve a parábola na entrada do túnel. Além disso, esta função nos permite realizar a st3.

Dos quatro estudantesenvolvidos no dispositivo experimental, três forneceram funções quadráticas,que são soluções possíveis desta tarefa, cujo gráfico representa a entrada do túnel. Destas três, duas (de A2 e A4)correspondem com a mesma que apresentamos na análise *apriori*, enquanto que A3 apresentou uma função diferente das outras duas.

Não consideramos como solução errônea aquela fornecida pelo estudante A3, apesar de ser diferente da que apresentamos na análise *a priori*. O que justifica essa diferença é a escolha da localização do plano de simetria da calha (túnel) em relação a largura da sua base. A Figura 5(b)mostra o recorte do manuscrito de A3 que considerou oplano de equação$x = 3$ como plano de simetria do túnel (em 3D), o que é equivalente a reta de equação $x = 3$ como eixo de simetria da parábola (em 2D),e o ponto (3,9) como seu vértice.Já a entrada do túnel considerada pelos estudantes A2 e A4 é representada por uma parábola que tem o eixo *y* como eixo de simetria e o ponto (0, 9) como ponto de máximo ou vértice da parábola. As figuras 5(a), 5(b) e 5(c) são recortes das produções ou práticas efetivas dos estudantes A2, A3 e A4, respectivamente.

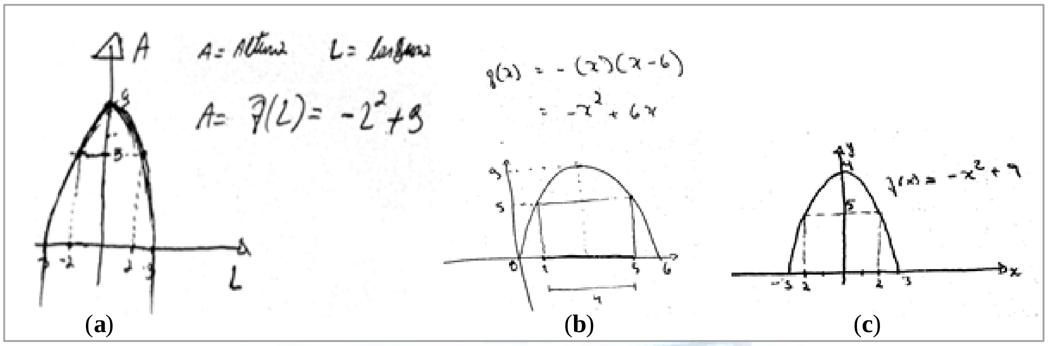

Figura 5: Recorte das produções ou práticas efetivas de três estudantes.
Fonte: Dados da pesquisa

Percebemos que os estudantes A2 e A4 não deixaram explícita a *técnica* utilizada para encontrar a função quadrática. Pois, não encontramos descrições ou desenvolvimento de tais técnicas que permitem obter as funções que apresentam nos seus manuscritos. O estudante A2 considerou as letras L e A para representar os eixos coordenados do plano de representação da entrada do túnel, ao invés das variáveis habituais x e y, o que nos parece pertinente. Ele considerou a letra A para representara altura da entrada do túnel, ea largura L, como a base da entrada. No entanto, não explicita o plano coordenado de representação da parábola,uma vez que o túnel é um objeto tridimensional. Nenhum desses estudantes demonstrou o conhecimento referente à mobilização de objetos do espaço tridimensional na situação em estudo. Ou seja, representar a calha no plano com uma perspectiva tridimensional. A relação institucional desses estudantes com o objeto de estudo se restringe à representação de situações no espaço bidimensional.

De fato, como podemos ver na produção dos três estudantes A2, A3 e A4, eles esboçam a entrada do túnel, mostram as*funções* correspondentes, mas sem a perspectiva tridimensional do objeto (túnel). Além disso, A3 representa a função $g(x) = -(x)\,(x-6) = -x^2 + 6x$ no *registro algébrico*, cujo gráfico corresponde a curva em questão sem especificar os eixos coordenados.

É importante ressaltarmos que a modelagem de uma situação real deve favorecer a realização de um trabalho próximo da realidade, com base nas propriedades intrínsecas da situação.Passamos a seguir, apresentar a análise *a posteriori*de st4.

Análise a posteriori de st4

Lembramos que o objetivodesta*subtarefa*é encontrar as coordenadas da base e a equação que representa a parábola na saída do túnel.Observando os manuscritos dos estudantes (A1, A2, A3 e A4) participantes da pesquisa, notamos que nenhum delesforneceu o resultado esperado. Isto é, nenhum conseguiu encontrar as coordenadas da base e a equação que representa a parábola na saída, tal como descrevemos na análise *a priori*. Todavia, dentre os quatro estudantes, um deles (A2) apresentou um esboço com tentativas de ilustrar a estrutura do túnel em questão. Como podemos ver no recorte de sua prática efetiva (Figura 6), ele representa a entrada e a saída do túnel em um mesmo plano coordenado, ignorando, no entanto, que este é um objeto tridimensional.

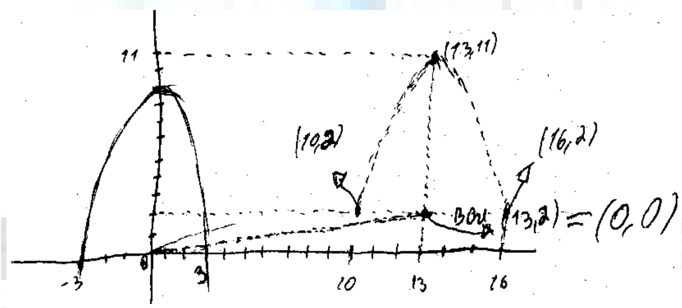

Figura 6: Recorte da produção do estudante A2.
Fonte: Dados da pesquisa

Esta constatação também é notável quando ele substitui os valores das coordenadas identificados na Figura 6, na representação geral da função quadrática que ele utiliza mais adiante.

Observa-se ainda, nessa Figura 6, que o estudante indica as coordenadas da base encontradas, como (10,2) e (16, 2) na saída do túnel, porém sem explicitar como tais coordenadas foram encontradas. Além disso, ele escreveu que base (13, 2) = (0, 0). Não conseguimos compreender sua intenção com esse *registro*, mas, trata-se de um *registro*errôneo, pois o ponto de coordenada (13,2) não é igual ao ponto de coordenada (0,0). Percebe-se ainda,nessa mesma Figura 6, que A2 não identificou os eixos coordenados por letra. Para tentar encontrar a parábola que representa a saída do túnel, esseestudante considerou, inicialmente, a representação geral de uma função quadrática($f(x) = ax^2 + bx + c$).Em seguida, atribuiu à x e à$f(x)$ os valores correspondentes a cada uma das coordenadas (13,11), (10,2) e (16,2), obtendo três equações distintastendo, assim, um sistema de equações lineares de três incógnitas e três equações, como podemos ver no recorte de suas práticasque apresentamos na Figura 7.

$$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad \begin{cases} 11 = a(13)^2 + b13 + c \\ 2 = a(16)^2 + b16 + c \\ 2 = a(10)^2 + b10 + c \end{cases} \qquad \begin{cases} c + 13b + 169a = 11 \\ c + 16b + 256a = 2 \\ c + 10b + 100a = 2 \end{cases}$$

Figura 7: Recorte da produção de A2.
Fonte: Dados da pesquisa

O estudante A2 não explicana*língua materna*, o método que utilizou para resolver o sistema encontrado, no entanto, podemos perceber, a partirdo recorte que apresentamos na Figura 8, que esse estudante utiliza a *técnica* "*eliminação de Gauss*".

$$L_2 = L_2 - L_1 \,/\, L_3 = L_3 - L_1 \qquad L_3 = L_3 + L_2$$

$$\begin{cases} c + 13b + 169a = 11 \\ 3b + 87a = -9 \\ -3b - 69a = -9 \end{cases} \qquad \begin{cases} c + 13b + 169a = 11 \Rightarrow c = -158 \\ 3b + 87a = -9 \Rightarrow b = 26 \\ 18a = -18 \Rightarrow a = -1 \end{cases}$$

$$a = -1 \qquad f(x) = -x^2 + 26x - 158$$

Figura 8: Recorte da produção de A2.
Fonte: Dados da pesquisa

O tratamento realizado por A2 no *registro algébrico* permitiu-lhe encontrar os valores -1;26 e -158 assumidos pelas *variáveis didáticasa*, *b* e *c*, respectivamente, na função quadrática que ele forneceu previamente. Ou seja: $a = -1$, $b = 26$ e $c = -158$.Daí, A2reescreve a função $f(x) = -x^2 + 26x - 158$,como podemos ver também na Figura 8.

A função encontrada por A2, não é correspondenteàequação da parábola que encontramosno *tratamento* desta *subtarefa* que apresentamos na análise *a priori*. Além disso,como se pode observar na Figura 6, A2considerou a base da entrada do túnel centrada na origem do sistema de coordenadas bidimensional, e representou o túnel (que deve ter forma de uma calha) neste mesmo plano que contem a base, sem a noção de perspectiva, pelo mesmo motivo que constatamos anteriormente, o que mostra claramente, a ausência da mobilização de objetos tridimensionais na sua prática institucional. É interessante destacar,nas práticas dos estudantes, a presença de três registros:*algébrico*, *gráfico* e *numérico* bem com a ausênciada *língua materna* no que se refere à descriçãodos procedimentos ou das idéias que utilizam na realização das*tarefas* em questão. Faz-se, portanto, necessário no processo ensino-aprendizagem, particularmente, na dinâmica de trabalho em sala de aula com *funções quadráticas*, motivar nos estudantes o desenvolvimento do discurso *tecnológico-teórico* que permita explicar e justificar as *técnicas*que eles empregam na realização das *tarefas* de acordo com o modelo praxeológico.

Considerações finais

Na introdução desse trabalho apontamos os questionamentos que propusemos responder sobre as práticas institucionais dos estudantes do curso de Licenciatura em Matemática da UESC referentes ao estudo de *funções quadráticas*. Com base na análise institucional e nas teorias que fundamentaram os nossos estudos, foi possível desenvolvermos uma *sequência didática* em torno desse objeto matemático.Por meio da realização e análise desta *sequência* constatamos queos estudantes encontraram dificuldade para modelar a situação real, particularmente a st4. Há indícios de que os estudantes não estejam familiarizados com oestudo de situações que requerem a modelagem matemática. Estas dificuldades podemser decorrência de um ensino pautado na realização de *tarefas* que exigem dos estudantes a utilização imediata de *técnicas* repetitivas.

Conforme já destacamos, o livro didático Fundamentos de Matemática Elementar[8] (conjuntos e funções)é utilizado frequentemente no ensino de*funções quadráticas*no curso de Licenciatura em Matemática da UESC. A*organizaçãopraxeológica* de *funções quadráticas* desse livro não coloca em jogo os conhecimentos dos estudantes. Ou seja, não os leva a

[8] A análise desse livro didático referente às funções quadráticas está disponível no site (https://sites.google.com/site/gpemac/dissertacoes-de-mestrado) do Grupo de Pesquisa em Ensino e Aprendizagem da Matemática em Ambiente Computacional (GPEMAC).

refletirem, a investigarem e a levantarem hipóteses. Enfim, a descoberta e a construção de novos conhecimentos matemáticos não são colocadas em discussão na *praxeologia* proposta nesse livro. Para realizar as *tarefas* do livro em questão, os estudantes precisamapenas mobilizar as *técnicas* fornecidas no bloco logôs. O autor apresenta, nessa obra, uma *praxeologia usual* que parte do ambiente *tecnológico-teórico* (logôs) - [θ/Θ] para o bloco *saber-fazer*(praxe) - [T/τ].

Acreditamos que seria também interessante se a *praxeologia* proposta nesse livro didáticoapresentasse situações que exigissem dos estudantes a modelagem matemática, motivando assim, o que Henriques (2011) chama de *praxeologia modelada*, no qual o desenvolvimento ou construção de conhecimentos parte do bloco *saber-fazer*(praxe) - [T/τ] para o ambiente *tecnológico-teórico*(logôs) - [θ/Θ]. Um ensino desenvolvido com base nessa *praxeologia*pode conduzir o estudante a fazer reflexões, interrogações e argumentações até a busca de novas descobertas.

Relativamente aos ostensivos, destacamos nas práticas institucionais dos estudantes participantes da pesquisa a presença de três *registros*: *algébrico*, *gráfico* e *numérico*, bem como a ausência do discurso na *língua materna*sobre aquilo que fazem. Ou seja, o discurso *tecnológico-teórico* que permite explicar e justificar as *técnicas*que eles empregam na realização das *tarefas* é ausente nas suas práticas. A nosso ver, essa ausência e as práticas de modelagem de situações reais por noções ou conhecimentos matemáticos devem merecer mais atenção em pesquisas na Educação Matemática.

Referências

ARTIGUE, M. **Ingénnierie Didactique**. Recherches em Didactique de Mathematiques. França, v. 9, nº 3, p. 245-308, 1988.

BIEMBENGUT, M. S & HEIN, N. **Modelagem Matemática no Ensino.**ISBN 978-85-7244-136-0. Ano 2000. Disponível em: http://www.editoracontexto.com.br/. Acessado em 04.12.2014.

CHEVALLARD, Y. **Concepts fondamentaux de La didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique**. Recherches em Didactique dês Mathématiques, 1992, V. 12, n°1, p. 73-112.

BOSCH M, CHEVALLARD Y. (1999), **Ostensifs et sensibilité aux ostensifs dans l'activité mathématique.***Recherche en Didactique des Mathématiques*, V. 19/1, p. 77-123.

DOUADY, R. **L'ingenierie didactique, un moyen pour l'enseignantd'organiser les rapports entre l'ensegnement et l'apprentissage**. Cahier de DIDIREM. França: IREM, Université Paris 7, n. 19, 1993.

DUVAL, R. Registros de representações semióticas e o funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. A. (org.).**Aprendizagem em matemática: registro de representação semiótica**. Campinas-SP: Papirus, 2003. cap. 1, p. 11-31.

DUVAL R. **Registres de représentation sémiotique et fonction nementcognitif de La pensée.** Annales de didactique et de sciences cognitives. IREM de Strasbourg, 1993, V. 5, p. 35-65.

HENRIQUES, A., **L'enseignement et l'apprentissage des intégrales multiples : analyse didactique intégrant l'usage du logiciel Maple.** UJF-Grenoble, Lab. Leibniz. 2006. Disponível em : https://sites.google.com/site/gpemac/dissertacoes-de-mestrado. Acessado em 04.12.2014

HENRIQUES, A.; ATTIE, J. P.; FARIAS, L. M. S. **Referências teóricas da didática francesa**: **análise didática visando o estudo de integrais múltiplas com auxílio do software Maple**. Educação Matemática Pesquisa. São Paulo, v. 9, n. 1, p. 1-29, 2007.

HENRIQUES, A. **Reflexões sobre análises institucionais e seqüências didáticas: o caso do estudo de integrais múltiplas**. (Progressão de Carreira do Magistério Superior, de Adjunto a Titular). UESC-BA, 2011. Disponível em:

https://sites.google.com/site/gpemac/dissertacoes-de-mestrado. Acesso em 04.12.2013.

HENRIQUES, A.; NAGAMINE, A.; NAGAMINE, C. M. L. **Reflexões Sobre Análise Institucional: o caso do ensino e aprendizagem de integrais múltiplas**. Bolema, Rio Claro (SP), v. 26, n. 44, dez. 2012.

HENRIQUES, A.; SERÔDIO, R.. **Intervenção de Tecnologias e Noções de Registros de Representação do Estudo de Integrais Múltiplas na Licenciatura em Matemática**, Anais do VI Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática (VI HTEM) 15-19 de julho de 2013, UFSCar, São Carlos, SP.

IEZZI, G.; MURAKAMI, C. **Fundamentos de Matemática Elementar**. Conjuntos e Funções, São Paulo: Atual, 1977. Vol. 1.

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa, **Resolução de Problemas: Contribuições para o Ensino, A Aprendizagem a a Avaliação, Anais do I Colóquio Internacional sobre Ensino de Ciências e Didática das Ciências CIEDIC,** Feira de Santana, 27-31 de Outubro de 2014**.**

.

Submetido em outubro de 2014

Aprovado em dezembro de 2014