REVISTA DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL (UFMS)

Volume 7, Número Temático – 2014 – ISSN 2359 - 2842

O Conceito de Limite: estudo das organizações matemáticas e didáticas em livros didáticos[1]

The Concept of Limit: study of mathematical and didactical organizations in textbooks

Maria Bethânia Sardeiro dos Santos[2]

Saddo Ag Almouloud[3]

Resumo

O objetivo deste artigo é estudar as relações que os autores estabelecem ao apresentarem o conceito de limite, focando o tipo de abordagem adotado (intuitiva ou direta e formal). Refletimos sobre como os autores trabalham as formas indeterminadas, limites infinitos e limites no infinito. De fato, procuramos responder às seguintes questões: quais são os diferentes pontos de vista sobre o conceito de limite apresentados nos livros de cálculo? A quem se dirige o texto? Que elementos dele evidenciam esse direcionamento? Esta pesquisa de cunho documental apoiou-se nas seguintes categorias definidas por Bakhtin: enunciado, signo, significado, auditório social, vozes, entre outros. Traremos, também, elementos da Teoria Antropológica do Didático de Chevallard (1992) para pensarmos sobre o objeto matemático em si. Enquanto Bakhtin ajuda-nos a analisar o discurso, o texto e seus elementos, Chevallard guia nossa percepção com relação aos elementos que estariam presentes na elaboração desse objeto matemático - o limite, e analisar com mais profundidade a relação entre teoria e técnica presentes no conceito de limite e nas tarefas que os autores propuseram. Com relação às vozes, a referência que é feita explicitamente a um matemático específico ou a um período específico da história é ínfima. Os livros passam a ideia de uma ciência atemporal, desumanizada, descontextualizada. Um conteúdo pronto e que foi, desde o início, como é apresentado hoje. Ao pensarmos sobre os 4T (Tarefa/Técnica/Tecnologia/Teoria), percebemos que há momentos em que os procedimentos se sobressaem como se eles fossem a razão última do estudo. A técnica é priorizada em detrimento de uma abordagem mais conceitual. A tecnologia é também explícita, mas não ajuda, pelo menos na forma em que é apresentada, no entendimento da teoria.

Palavras-chave: Conceito de limite. Organizações matemática e didática. Auditório social. Vozes.

Abstract

The goal of this article is to study the relations that authors build when they present the limit concept. We focus on the type of approach they adopted (if intuitive or direct and formal). We reflect on how the writers work the indeterminate forms, infinity limits and limits on infinity. In fact, we search for answers to the following questions: which are the different points of view about the limit concept, presented in the calculus's book? To whom is the text elaborated? Which elements indicate who the text was made for? This documental part of this

[1] Este artigo foi construído a partir de um recorte da tese de doutorado em Educação Matemática de um dos autores.

[2] Doutorado em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC/SP, Professora da Universidade de Goiás – UFG – Goiânia (Goiás) Brasil. bethania@ufg.br

[3] Doutorado em Matemática e Aplicações pela Universidade de Rennes I – França – Professor do Programa de Estudos Pós-graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC/SP, São Paulo – SP, saddoag@pucsp.br

research was based on the Bakhtin`s categories, among others: utterance, sign, significance, social auditorium, voices. We also work with elements of the anthropological theory of the didactics from Chevallard (1992), as we think about the mathematical object on itself. While Bakhtin helps us to analyse the speech, the text and its elements, Chevallard guides our perceptions related with the elements, that would be present elaborating the mathematical object – the limit, as well as to analyses deeply, the relation between theory and technique related with the limit concept and on the tasks that the writers had proposed. With respect to voices, the reference that is being explicitly made, to a mathematical specific or to a specific historical period, is negligible. The books give the impression of a timeless science, dehumanized, decontextualized. The contents shows up readily and seems to be since the beginning, as shown today. In thinking about the 4T (Task / Technique / Technology / Theory), we realize that there are times, when the procedures stand out as if they were the last reason the study. The technique is prioritized at the expense of a more conceptual approach. The technology is also explicit, but it does not help - at least in the way it is presented - understanding the theory.

Keywords: Concept. Mathematical and didactical organizations. Social Auditorium. Voices.

Introdução

Se há um conceito matemático que gera controvérsias e dificuldades, esse é o de limite. E por que isso acontece? Pesquisas[4] têm mostrado que são vários os elementos que contribuem para essa dificuldade e há diferentes tipos de obstáculos já identificados na aprendizagem do mesmo. Entre esses elementos, interessamo-nos pelas organizações matemáticas e didáticas propostas por autores de livros didáticos sobre o conceito de limite.

O nosso objetivo é o de refletirmos sobre as relações que os autores estabelecem ao apresentarem o conceito de limite, se optam por uma abordagem mais intuitiva ou trabalham de maneira mais direta e formal. Vamos analisar, também, como os autores trabalham as formas indeterminadas, limites infinitos e limites no infinito. Procuraremos verificar, ainda, se há alguma preocupação em relação à história do conceito e do seu desenvolvimento. Nesse sentido, buscaremos elementos que possam de maneira direta ou indireta evidenciar as vozes que estariam presentes na constituição daquele conceito.

Os livros que compuseram a elaboração desse texto foram escolhidos por meio de alguns critérios: a familiaridade da pesquisadora com alguns deles, visto que os mesmos foram utilizados por ela nos cursos de Cálculo Diferencial e Integral ministrados para os cursos de Agronomia, Engenharia Elétrica e Computação. Um livro, especificamente, foi escolhido por ter sido o livro no qual a pesquisadora estudou Cálculo quando era aluna da graduação em Matemática. Os outros livros foram escolhidos por se constituírem como referência para o ensino de Cálculo sendo seus autores reconhecidos pela comunidade matemática brasileira, como Geraldo Ávila e Hamilton Guidorizzi.

Procuraremos, ao trabalhar com esses textos de um gênero discursivo específico (e por intermédio de alguns conceitos de Bakhtin), responder às questões acima colocadas, apoiando-nos nas seguintes categorias definidas por Bakhtin: enunciado, signo, significado,

[4]Cornu (1983,1991), Sierpinska (1985), Robert e Speer (2001), Tsamir (2002), Amorim (2011) entre outros.

auditório social, vozes, entre outros. Bakhtin (2003, p.307) ressalta que onde há texto, há objeto de pesquisa e pensamento.

Traremos, também, elementos da Teoria Antropológica do Didático de Chevallard (1992) para pensarmos sobre o objeto matemático em si. Enquanto Bakhtin ajuda-nos a analisar o discurso, o texto e seus elementos, Chevallard guia nossa percepção com relação aos elementos que estariam presentes na elaboração desse objeto matemático - o limite. Em suma, as questões que procuraremos responder neste artigo: quais são os diferentes pontos de vista sobre o conceito de limite apresentados nos livros de cálculo? A quem se dirige o texto? Que elementos dele evidenciam esse direcionamento?

Cada análise de texto se inicia com elementos do prefácio do autor porque comungamos com Bakhtin quando afirma que um traço essencial (constitutivo) do enunciado é o seu direcionamento a alguém, o seu endereçamento (BAKHTIN, 2003, p.301). Tendo consciência disso, a leitura e, consequentemente, a análise se modifica. Lembrando que para Bakhtin (2003, p.333) todo enunciado tem sempre um destinatário cuja compreensão responsiva o autor procura e antecipa porque a palavra do outro coloca diante do indivíduo a tarefa especial de compreendê-la (BAKHTIN, 2003, p.379). E ainda que a “resposta” não seja dada imediatamente, toda compreensão plena real é ativamente responsiva e não é senão uma fase inicial preparatória da resposta (seja qual for a forma em que ela se dá) (BAKHTIN, 2003, p.272).

Quando escrevemos, imaginamos um tipo de leitor. Um texto é também uma forma de diálogo aberto. O leitor também não o lê de maneira passiva. Bakhtin explicita que o traço essencial constitutivo do enunciado é o seu *direcionamento*.

Para Bakhtin, toda enunciação, mesmo na forma imobilizada da escrita, é uma resposta a alguma coisa e é construída como tal (BAKHTIN, 2010), vamos então procurar identificá-las no texto.

Ao trabalharmos com a Teoria Antropológica do Didático (TAD), criada por Chevallard (1992), procuraremos identificar quais são os objetos ostensivos e não ostensivos[5] que são utilizados pelos autores para tratarem do conceito de limite. Com relação aos exemplos e exercícios, buscaremos analisar quais os objetivos propostos, mas também no que a execução de certas tarefas ajudaria no aprendizado do limite. Analisaremos as técnicas contidas no texto. Segundo Chevallard (2002), um *saber-fazer*, identificado por uma tarefa e

[5] De acordo com Chevallard (1999, apud ALMOULOUD, 2007, P.119), os ostensivos são os objetos manipuláveis na realização da atividade matemática. Os objetos *não ostensivos* são todos os “objetos” que, como as ideias, as instituições ou os conceitos, existem institucionalmente sem que, no entanto, eles sejam vistos, ditos, escutados, percebidos ou mostrados por conta própria. Assim, esses objetos só podem ser evocados ou invocados pela manipulação adequada de certos objetos ostensivos que lhes são associados, tais como uma palavra, uma frase, um gráfico, uma escrita, um gesto, ou todo um discurso.

uma técnica, não é uma entidade isolada porque toda técnica exige, em princípio, uma justificativa; isto é, "um discurso lógico" (*logos*) que lhe dá suporte, chamado de tecnologia. Ao longo das análises das tarefas, faremos referência a Duval e Vygotsky para refletirmos mais profundamente com relação ao possível exercício cognitivo mobilizado por alguns deles e suas relações com a teoria que está sendo ensinada, além das relações que podem ser construídas por intermédio da TAD.

Análise global dos pontos de vista dos autores de livros didáticos escolhidos

Nessa primeira parte da análise dos livros didáticos de cálculo, tivemos como objetivo apresentar o ponto de vista[6] de cada autor e responder algumas questões.

Quando refletimos sobre o conceito de limite, é fundamental que o aluno domine os vários pontos de vista presentes na teoria para que tenha uma verdadeira compreensão do mesmo. Esse conceito dá margem a várias abordagens, em diferentes quadros: geométrico, algébrico, analítico, numérico, etc. Mas, pode haver uma supervalorização de um quadro em detrimento do outro. Por exemplo, se a ênfase é dada mais ao quadro numérico, o analítico poderá ficar comprometido. Para que a compreensão aconteça, Almouloud (2007) afirma que: "é imprescindível que o aluno compreenda as propriedades dos objetos nesses dois quadros e suas interconexões" (p.80).

Em termos matemáticos, é fundamental que o aluno transite em diferentes quadros e registros de representação semiótica (DUVAL, 2009) para que compreenda melhor os conceitos estudados. As atividades propostas pelos professores ou que compõem um livro didático deveriam ter essa perspectiva.

Em suma, as atividades devem ser desenvolvidas de tal maneira que ofereçam ao aluno a oportunidade de mudar de quadros (DOUADY, 1986) e de pontos de vista.

As perguntas que queremos discutir inicialmente são: Como o conceito de limite ou sua definição são apresentados? Em que contexto[7], associado à derivada ou continuidade, ela surge? Ou de maneira independente: Como são explicadas as indeterminações?Os autores fazem alguma referência ao desenvolvimento desse conceito ao longo da história?Como são explicados os limites infinitos e os limites no infinito?Como os autores explicam que o infinito não é um número?

[6] De acordo com Almouloud (2007), pontos de vista diferentes, para um objeto matemático, são maneiras diferentes de olhá-lo, de fazê-lo funcionar e, eventualmente, de defini-lo. Esse autor ressalta, ainda, que olhar um objeto em diferentes quadros é ter diferentes pontos de vista, embora se possam ter vários pontos de vista no mesmo quadro.

[7] Contexto aqui será considerado na perspectiva matemática e na de Bakhtin.

Ao longo das análises de cada livro, apresentamos algumas dessas respostas, o que exige que sejamos breves na síntese final para não sermos repetitivos.

Os autores apresentam o limite de diferentes modos. Há aqueles que optam por falar sobre ele – de maneira sucinta - ao apresentarem a derivada (como é o caso de Ávila). Outros trabalham inicialmente com a noção de aproximação por intermédio de um exemplo concreto ou de gráficos (Boulos e Rogério, Silva e Badan). Há também aquele que já associa, desde o início, o estudo do limite com o de continuidade (Guidorizzi). Há diferentes tipos de objetos associados ao conceito de limite. Em sua grande maioria, objetos não ostensivos, como o próprio conceito.

É praticamente impossível dissociar o estudo do limite do estudo da derivada ou da continuidade. Mas, quando o enfoque é dado ao limite, em si, pode-se perder a ideia do todo. Realizamos estudos que envolvem limite de funções, mas não é difícil – com a priorização de procedimentos algébricos – perder isso de vista. Apesar da grande importância que é dada ao conceito de limite, ele aparece sempre vinculado a outros conceitos e depois do estudo das funções e da derivada – que já o utiliza.

Com relação às indeterminações, nenhum dos autores estudados dedicou tempo para explicar melhor o que seriam. Há o procedimento padrão, em termos algébricos, denominado "levantamento da indeterminação" que valorizam a técnica envolvida na resolução dessa tarefa, mas até mesmo os procedimentos – são apresentados de maneira bastante sucinta por alguns deles. Há a preocupação dos autores no sentido de que o aluno encontre uma maneira de sair dessas situações críticas, mas há pouco empenho tanto na explicação do por que ela é crítica quanto no porquê de certos procedimentos funcionarem.

O infinito e o zero estão presentes na matemática em diferentes disciplinas, é imprescindível que o professor de matemática tenha mais conhecimentos sobre eles. E a proposta da disciplina de Cálculo – que é introduzir o aluno iniciante em outros universos mais complexos – não cumpre seu papel ao trabalhar apenas - evitando - que certas situações aconteçam, sem a reflexão sobre o porquê de evitá-las. Assim, já respondemos a questão: como os autores explicam que o infinito não é número? A resposta é - não explicam.

Com relação aos limites infinitos e limites no infinito, acreditamos que há uma série de dificuldades que podem estar relacionadas aos mesmos. A forma de ler a expressão que os caracteriza é diferente da estudada por intermédio apenas da ideia intuitiva de limite. É aqui que vai ocorrer a mudança de terminologia. Se inicialmente era dito, o "limite é", com o estudo dos limites infinitos, muda-se para o "limite tende".

A igualdade é também, no nosso ponto de vista, outro elemento que pode gerar dificuldades para os alunos. O simbólico – nesse estudo – traz outra leitura. Não é a leitura mais usual, a mais conhecida dos nossos alunos. É uma igualdade misteriosa porque aponta para um resultado infinito! Mas, não havia sido dito para os alunos anteriormente que o infinito não poderia ser aceito como solução de um limite? Agora pode?

Há também outros elementos significativos que compõem essa definição de limites no infinito, principalmente quando comparado com os limites infinitos. No primeiro caso a variável pode tender a um valor finito e gerar como resultado o crescimento indefinido da função. No segundo caso, a variável x tende ao infinito e isso pode gerar um resultado infinito ou não. À luz do estudo que realizamos, podemos afirmar que esse conceito é cheio de nuances e detalhes que, pouco explorados, trarão como consequência a aprendizagem exclusiva de procedimentos de resolução ou nem mesmo isso.

E mais uma vez defendemos que, sem as mudanças de quadros, sem o trabalho de conversão de representações em diferentes registros de representação semiótica, o aluno corre o risco de "aprender" a teoria que envolve o estudo de limite de uma função de forma compartimentada e nada significativa. Ter o domínio de um registro não implica no domínio de outro, principalmente se não há o trabalho com essas mudanças.

Com relação ao texto – ou em outros termos – quando nos perguntamos para quem se dirige o discurso dos livros, percebemos que, ainda que no prefácio alguns autores explicitem que o seu texto é dirigido para os alunos dos primeiros anos da universidade, os enunciados parecem ser construídos muito mais para especialistas.

Nos dias atuais há a utilização do termo "interface não amigável" para definir tecnologias ou sistemas nos quais os usuários encontram dificuldades em manipulá-los. Com o cuidado necessário, podemos nos utilizar dessa terminologia para refletirmos sobre os textos dos livros de Cálculo. O livro deveria servir, também, de estímulo ao estudo. Seu texto, apresentação, problemas – deveriam criar um "ambiente" que fosse fácil de ser lido pelo aluno. Mas, isso não acontece com frequência. Os livros acabam exercendo o papel de comunicadores de conhecimento pronto e acabado.

Se o autor – ao escrever – tem em mente um leitor que não é o especialista, é preciso que fique explícito que leitor é esse. Há um abuso de certos termos que não são tão familiares para os alunos calouros. Para ilustrar isso, citaremos alguns exemplos encontrados nos livros analisados.

- "É natural definir que" (ÁVILA, 1998, p.77).
- "Neste caso [o autor está considerando o limite da função $\frac{1}{x^2}$ quando x tende a zero], temos um limite no sentido ordinário" (ÁVILA, 1998, p.81).

Boulos é o único autor que se utiliza de símbolos nada convencionais para indicar aspectos que ele julga importantes no seu livro. As observações que aparecem ao longo do capítulo são explicações mais detalhadas do que foi colocado anteriormente. Há momentos em que o autor é bastante direto, como na observação da p.170. Depois de trabalhar a teoria dos limites infinitos, Ele afirma: “Em nenhum caso relatado por um dos símbolos acima o limite existe. Lembre-se de que para dizer que existe, o limite deve ser um número!” (BOULOS, 1999, p.170).

A exclamação faz parte do texto do autor sendo algo inédito em livros de Cálculo. Mas, são elementos assim que acabam por contribuir para a ideia da entoação[8] que o autor queria transmitir. O texto deixa de ser tão impessoal e frio. Fica mais próximo de quem lê.

Rogério, Silva e Badan(1992) explicitam, no início do capítulo sobre limites, que o seu texto é para os professores leitores. Mas, certas informações também contribuem para maior compreensão por parte dos alunos com relação à proposta do livro. Na p.45, podemos ler:

> O procedimento que adotaremos é, inicialmente, o de apresentar situações concretas através das quais o leitor irá se familiarizando com a utilização do limite à medida que for interpretando a linguagem simbólica e a situação apresentada. Em seguida, passaremos a encarar o limite em seu sentido operacional.

Guidorizzi (2001) é o único autor analisado que associa o estudo do limite à continuidade e realiza esse estudo de maneira profunda. Ávila (1998) também estabelece a relação entre limite e continuidade, mas de maneira mais sutil. O texto de Guidorizzi (2001) é denso porque o mesmo trabalha essencialmente com a percepção mais formalizada dos conceitos. Mas, esse autor traz – em vários momentos – o registro gráfico próximo ao registro algébrico – o que pode ajudar na compreensão e na conversão de um registro em outro. Em termos de linguagem, acreditamos que a utilizada por Guidorizzi (2001) é a que mais se aproxima da linguagem para/de especialistas.

Análises de tipos de tarefas

Continuando a parte de análise dos livros didáticos, nós apresentamos um estudo das tarefas que foram propostas pelos autores baseando-nos na Teoria Antropológica do Didático de Chevallard (1992). A escolha pela Teoria Antropológica do Didático justifica-se pelo fato de que, por intermédio dela, podemos modelar práticas sociais, em geral, por meio de tarefas, de técnica, de tecnologia e de teoria.

A TAD nos dá elementos para estudarmos as organizações praxeológicas (OP) entendidas como um conjunto de técnicas, de tecnologia e de teorias organizadas para um tipo

[8] Entoação tem o sentido de “acento apreciativo”, em termos bakhtianos é o que faz com que possamos identificar o “tom” que foi dado àquela palavra ou frase em um determinado contexto.

de tarefas. A Organização Didática (OD) é a forma utilizada para abordar o conteúdo matemático, a maneira de fazer, as escolhas, a apresentação. Abrange aspectos além da matemática. Ao falarmos de organização didática é preciso que pensemos, também, nos momentos que compõem a mesma e que foram colocadas por Chevallard num total de seis: encontro, exploração do tipo de tarefa e elaboração de técnica, constituição do ambiente, etc. A organização matemática (**OM)** refere-se à realidade matemática que se pode construir para ser desenvolvida em sala de aula.

A teoria e a tecnologia fundamentam uma técnica que é utilizada na resolução de determinada tarefa. É preciso ressaltar que para Chevallard, as tecnologias são explicações científicas que provam a validade da técnica, enquanto que a teoria comprova a tecnologia. As noções de tarefa, técnica, tecnologia e teoria permitem modelar as práticas sociais, em geral, e em particular, a atividade matemática (ALMOULOUD, 2007).

A técnica na TAD é utilizada como uma maneira de fazer uma tarefa, não sendo necessariamente um procedimento estruturado, metódico ou algoritmo. É importante lembrar que *o cumprimento de toda tarefa decorre do desenvolvimento de uma técnica* – esse é um dos postulados da atividade matemática.

Mas, o que seria uma tarefa? Segundo Almouloud (2007), as tarefas são identificadas por um verbo de ação que sozinho caracterizaria um gênero de tarefa, por exemplo: calcular, decompor, resolver, somar, que não definem o conteúdo em estudo. E qual a relação da técnica com a tarefa? Para produzir técnicas é necessário que se tenha uma tarefa, efetivamente problemática, que estimule o desenvolvimento de, pelo menos, uma técnica para responder às questões colocadas na tarefa.

Faremos, a partir de agora, algumas análises gerais e, mais adiante, trataremos dos objetos ostensivos e não ostensivos que também fazem parte da TAD. Faremos uso, também, de parte da teoria de Duval – que dará suporte para analisarmos mais profundamente algumas das tarefas propostas através da noção de registro de representação e a formação de conceitos na perspectiva desse autor.

Análises gerais do conteúdo referente ao limite

1ª Análise – Ordem dos conteúdos

Ao observarmos a disposição dos conteúdos matemáticos nos livros, podemos notar que não há diferenças significativas nessa ordem geral. O estudo do limite vem sempre depois do estudo da derivada podendo acontecer concomitante com o estudo da Continuidade ou não.

Guidorizzi é o único autor que faz o estudo da derivada após o estudo do limite. Os outros autores utilizam do conceito do limite para o estudo da derivada, fazem o estudo desse conceito e, só depois, retomam ao conceito de limite – para o seu estudo propriamente.

Ávila	Derivada → Continuidade e limites → Regras de derivação
Boulos	Funções → Derivada → Limites → Continuidade → TVM
Rogério, Silva e Badan	Funções → Derivada → Limite → Existência da Derivada
Guidorizzi	Números Reais → Funções → Limite e Continuidade → Extensões do conceito de Limite → Teoremas

Quadro 1 - Disposição dos conteúdos
Fonte: autores deste artigo.

Quando olhamos para a forma como o conceito de limite é introduzido, encontramos algumas diferenças que analisaremos a seguir.

2ª Análise – Disposição dos conteúdos relacionados ao limite

Pudemos constatar que três dos quatros livros analisados apresentaram o conceito primeiramente de maneira intuitiva para depois o formalizarem. Há discrepância com relação aos teoremas, pois os mesmos podem ser mencionados ou ignorados. O que nos faz questionar – qual a justificativa para isso?

Com relação à definição formal de limite de uma função, em termos de épsilon e delta, dois livros apresentaram e dois livros omitiram. Com relação ao limite das funções trigonométricas, encontramos esse estudo em dois dos quatro livros analisados.

Ávila	Continuidade – TVM – Limites de uma função – Limites Laterais – Derivabilidade e continuidade – Limites infinitos e limites no infinito.
Boulos	Conceito intuitivo de limite – Propriedades operatórias – Limites Infinitos – Limites no infinito – Teorema do Sanduíche – Continuidade.
Urbano e outros autores	Situação problema – Limite de maneira intuitiva – Limites Laterais – Existência de limite de uma função – Funções Polinomiais e Racionais – Propriedades operatórias – Limites de funções trigonométricas.
Guidorizzi	Função Contínua (aspectos intuitivos e gráficos) – Limite de maneira intuitiva – Função Contínua (formal) - Definição formal de limite – Limites Laterais – Limite de funções compostas – Teorema do Confronto.

Quadro 2 - Disposição dos conteúdos relacionados ao Limite
Fonte: autores deste artigo.

3ª Análise – Quantidade de exemplos e exercícios

Essa contagem foi realizada levando em consideração somente o(s) capítulo(s) do estudo de limite. Ainda que o mesmo estivesse subdividido em várias sessões, a análise contemplou todo o conteúdo que se relacionava direta ou indiretamente ao conceito de limite que figurava no capítulo de estudos desse. Alguns autores fazem composições como é o caso de continuidade e limite ou derivada e limite. Quando começarmos a dar exemplos das tarefas, ficará mais fácil para compreender como essa relação foi estabelecida pelos autores.

Quando olhamos para a distribuição desses exercícios, somente Ávila apresentou os mesmos inteiramente ao final do capítulo. Todos os outros autores mesclaram teoria com exemplos e exercícios. A contagem foi feita da seguinte maneira: se o exercício tivesse letras a, b, c – cada uma delas foi contada como um exercício independente. Com relação ao tipo de exercício solicitado, esse foi feito em blocos e foi alvo de outra análise que apresentaremos mais adiante.

Ávila	14 exemplos e 30 exercícios
Boulos	10 exemplos e 68 exercícios
Urbano e outros autores	11 exemplos e 11 exercícios – com mais uma lista extra de exercícios com 24 itens
Guidorizzi	61 exemplos e 73 exercícios

Quadro 3 - Quantidade de exemplos e exercícios
Fonte: autores deste artigo

4ª Análise – Quantidade de tipos de tarefas por temas

Antes de realizarmos o estudo de alguns tipos de tarefas e técnicas nelas envolvidas, evidenciaremos o quantitativo de exercícios (Tabelas 1, 2, 3 e 4) por conteúdos específicos. Nosso intuito foi o de verificar se os autores trabalhariam mais exercícios para determinado assunto ou não. Se haveria alguma preocupação por parte dos mesmos no sentido de que um conteúdo considerado “mais difícil” exigiria mais exercícios, por exemplo. Depois da apresentação dessa visão mais geral, procuraremos focar em alguns tipos de tarefas e técnicas a elas relacionadas ao nosso objeto de estudo – o conceito de limite.

Tipo de tarefas por conteúdo específico	Quantidade
Determinar o limite da função	30
Determinar o limite da função com x tendendo a zero ou a um	18

Determinar o limite da função com *x* tendendo a mais ou menos infinito	12

Tabela 1 - Quantidade de tipos de Tarefas - Ávila (1998)
Fonte: autora desta pesquisa.

Exercício por conteúdo específico	Quantidade
Determinar o limite de maneira intuitiva e os limites laterais	9
Determinar o limite da função com substituição direta do valor na função polinomial	3
Determinar o limite da função com substituição direta do valor na função racional	6
Determinar o limite da função em um ponto do domínio que gera indeterminação	6
Cálculo de limites infinitos	14
Revisão da teoria através de V ou F	7
Cálculo de limites no infinito	15
Cálculo de limite com substituição por variável	3
Cálculo de limite com funções trigonométricas	4
Exercício do tipo mostre que	1
Total de exercícios	68

Tabela 2 - Quantidade de tipos tarefas - Boulos (1999)
Fonte: autores deste artigo.

Exercício por conteúdo específico	Quantidade
Tipo de tarefa “Estudar o comportamento da função por intermédio do conceito intuitivo de limite”	1
Tipo de tarefa “Estudar do limite de funções com o conceito intuitivo de limite”	2
Tipo de tarefa “Calcular o limite da função e os limites laterais”	5
Tipo de tarefa “Verificar existência e calcular o limite – se existir”	3
Tipo de tarefa “Determinar o limite de funções polinomiais (limites no infinito)”	4
Tipo de tarefa “determinar o limite de funções racionais (limites no infinito)”	6
Tipo de tarefa “determinar limites infinitos”	6
Tipo de tarefa “mostre que”	1
Determinar o limite da função em um ponto do domínio que gera indeterminação	4
Exercício com as propriedades do limite	3
Calculo de limite de funções trigonométricas	4
Lista de exercícios – Determinar o limite das funções	24
Total de exercícios	63

Tabela 3 - Quantidade de tipos de tarefas - Rogério, Silva e Badan (1992)
Fonte: autores deste artigo.

Tipo de tarefas por conteúdo específico	Quantidade
Tipo de tarefa “Construir gráfico por intermédio do conceito intuitivo de continuidade”	6
Tipo de tarefa “Calcular o limite de maneira intuitiva”	8
Tipo de tarefa “Esboçar o gráfico e realizar o cálculo por intermédio da ideia intuitiva de limite”	1
Tipo de tarefa “Calcular o limite de maneira intuitiva”	6
Tipo de Tarefas referentes à continuidade	48
Tipo de tarefa “Calcular e justificar o limite da função em determinado ponto”	21
Tipo de tarefa “determinar L para que a função seja contínua no ponto dado e justificar”	3
Exercício utilizando a razão incremental	6
Tipo de tarefa “determinar o limite da função em determinado ponto”	18
Tipo de tarefa “prove que”	10
Tipo de tarefa “Cálculo do limite com os limites laterais”	12
Tipo de tarefa V ou F (relacionado limite e continuidade)	1
Tipo de tarefa “relacionar limite e continuidade”	4
Tipo de tarefa “Determinar limite de função composta”	4
Tipo de tarefa “seja f definida em R”, “suponha que”.	4
Tipo de tarefa “seja f definida em R”, “suponha que”. Com a utilização da razão incremental	4
Exercícios relacionados ao Teorema do Confronto	16
Tipo de tarefa “determinar o limite de funções trigonométricas”	20
Tipo de tarefa “prove que” envolvendo funções trigonométricas	2
Exercícios para determinar limites no infinito	18
Tarefas do tipo “mostre que”, “prove que” envolvendo limites infinitos	5
Exercícios para determinar limites infinitos	20
Tarefas do tipo “determinar o limite das funções em determinado ponto do domínio”	18
Tipo de tarefa “dê exemplos” - “tais que”	3
Exercício do tipo “prove que”	2
Exercícios referentes ao limite de sequências	23
Exercícios mesclando cálculo de limite de funções com limite de sequências	7
Total de exercícios	290

Tabela 4 - Percentual de Exercícios - Guidorizzi (2001)
Fonte: autores deste artigo.

Análises de tarefas propostas pelos autores

A escolha dos tipos de tarefas foi feita, primeiramente, buscando os elementos que são fundamentais na construção do conceito de limite de uma função: a ideia intuitiva de limite, os limites laterais, limites infinitos, limites no infinito e o limite por intermédio da definição formal de Weierstrass. Como há autores que trabalham sem diferenciar esses elementos por tarefas e outros que propõem blocos delas depois de cada trabalho teórico, optamos por fazer essas análises também em blocos.

Essa opção é útil para identificarmos a teoria e a tecnologia envolvidas em cada tarefa e sua técnica. E ainda que o autor não tenha separado os exercícios explicitamente no seu texto, procuramos assim fazê-lo por compreendermos que isso facilitaria a comparação de tarefas dentro do mesmo bloco e com o mesmo autor. Faremos, inicialmente, uma análise horizontal – as tarefas propostas por um autor – e, posteriormente, uma análise vertical – para compararmos as tarefas que foram propostas para um mesmo conteúdo, entre os autores.

Tivemos também o cuidado de não repetirmos tarefas muito parecidas ou iguais. A escolha feita para um autor foi excluída no outro, visto que o raciocínio e os procedimentos para a resolução eram os mesmos. Por exemplo, em todos os livros encontramos a tarefa "calcule o limite da função" para os mais diferentes tipos de funções: polinomiais, racionais, trigonométricas, etc. Ao analisar uma, fazemos referência também às outras que não foram citadas.

O quadro 4 foi construído quando observamos os verbos que constavam nas tarefas propostas nos livros.

Autor	Verbos
Ávila	Calcule.
Boulos	Dê, calcule, estude, julgue, demonstre.
Rogério, Silva e Badan	Destaque, justifique, encontre, esboce, estude, responda, dê, calcule, mostre que.
Guidorizzi	Calcule, esboce, justifique, determine, prove, dê.

Quadro 4 - Verbos utilizados pelos autores
Fonte: autores deste artigo

As tarefas

Finalizando o estudo de livros didáticos para o ensino de Cálculo, partiremos agora para a análise de algumas tarefas para refletirmos sobre o quanto o tipo de tarefa solicitada mobilizaria o aluno no sentido de rever os conceitos, reforçar definições, teorias, técnicas e estabelecer conexões. Nesse momento procuraremos pensar também nas relações: teoria – tecnologia – técnica – tarefa.

Como a análise de todos seria inviável, além de fugir aos objetivos desse artigo, acreditamos que ao apresentarmos algumas dessas tarefas, já atingimos nossos objetivos no sentido de refletirmos sobre como esses exercícios podem vir a influenciar o aprendizado do aluno leitor. Com o objetivo de compreendermos melhor o conceito de limite, buscamos identificar nas tarefas elementos que explicitem como elas podem contribuir nessa apreensão. A que tipo de exercício teórico-cognitivo o aluno seria levado a realizar por meio dela.

É interessante perceber que os verbos presentes nas tarefas já indicam procedimentos que podem ser mais ou menos abrangentes. Se a tarefa se inicia com "*calcule*", por exemplo, esse verbo indica explicitamente que temos que realizar um procedimento de cálculo. Por outro lado, quando nos deparamos com verbos tais como *estude, encontre, destaque*, etc. há o rompimento da ideia de um "procedimento" padrão, há maior liberdade por parte de quem realiza a tarefa com relação à maneira de iniciar, desenvolver e concluí-la. Há também aqueles verbos que indicam tarefas mais complexas tais como *prove, mostre que, demonstre*.

Normalmente, tarefas como essas últimas exigem maior grau de abstração e são mais complexas. O foco da nossa investigação está na compreensão e percepção do conceito de limite e não nas tarefas em que os alunos poderiam demonstrar domínio dos elementos mais difíceis. Ainda assim, apresentamos ao final do trabalho, uma reflexão específica relacionada a esse tipo de tarefa que envolve a compreensão da definição formal de limite.

Para cada tarefa solicitada e escolhida por nós, faremos a análise da mesma através da teoria de Chevallard em um primeiro momento. Após, faremos a análise da tarefa mediante a teoria de Duval e, finalizando, explicitaremos as diferenças entre os pontos de vista dos autores com relação ao conceito de limite.

Análise específica de algumas tarefas propostas pelos autores

Para cada autor, apresentaremos algumas das tarefas que foram propostas em seus livros. Vamos escrever o enunciado da questão para que fique clara – a forma – como foi colocada a tarefa.

No livro de Ávila (1998)

O autor não separou as tarefas em blocos. Todas elas foram apresentadas apenas ao final do capítulo e o único verbo utilizado foi – calcule (Quadro 4). Mais especificamente "calcule os limites indicados nos Exercícios seguintes". Quando resolvemos alguns desses limites percebemos que eles exigem procedimentos diferenciados e que – por estarem todos em um único bloco – a diferenciação entre esses procedimentos não é tão simples ou óbvia. Explicaremos com mais detalhes por intermédio da análise da resolução de alguns desses exercícios.

Quando há a solicitação do cálculo do limite, subentende-se que o mesmo existe – o que não dá margens para a reflexão das condições de existência do mesmo, nem a utilização dos limites laterais. Não houve, também, uma iniciação intuitiva ao conceito, nem a utilização dos gráficos das funções nos exercícios. Somente na parte teórica.

Do bloco de 30 exercícios, escolhemos os números: 1, 14, 18 e 30.

Tarefa (1) $\lim_{x\to 2} x^2 - 3x + 1$	Tarefa (14) $\lim_{x\to -2^+} \frac{x+3}{x+2}$
Tarefa (18) $\lim_{x\to \pm\infty} \frac{2-x}{1+3x}$	Tarefa (30) $\lim_{x\to \pm\infty} \frac{2x^3+1}{1-x^2}$

Quadro 5 - Tarefas propostas por Ávila (1998, p.84)
Fonte: Ávila (1998, p.84).

Ao analisarmos os procedimentos relacionados à resolução dessas tarefas (Quadro 5), percebemos que há diferenças significativas com relação a eles. A tarefa (1) é bastante simples, visto que 2 pertence ao domínio da função. Não há impedimento em substituir diretamente o valor na lei da função e encontrar -1 como sendo o limite da mesma.

Na resolução da tarefa (14) (Quadro 5), há uma modificação de procedimento. Não podemos substituir o valor -2 diretamente na lei da função, pois o mesmo não pertence ao domínio da função (além da substituição gerar uma indeterminação). Nesse caso, o ideal é que o aluno veja o gráfico, para assim ter uma ideia do valor para o qual tende a função quando x se aproxima de -2. E a interpretação, nesse momento, é totalmente diferente da anterior. Se na primeira o limite é, nessa segunda, o limite tende, já que infinito não é número.

E como ter a certeza de que essa função tenderia ao infinito? Por intermédio de tabelas com valores que se aproximam pela direita de -2, por exemplo, e é preciso que se analise tanto o numerador quanto o denominador. No caso do numerador, ele vai para 1. E o denominador tende à zero positivamente. O que implica que a função tende ao infinito positivo. Algo que poderia gerar dificuldades, no nosso ponto de vista, é a orientação da reta real que deve ser levada em consideração ao tomar os valores para a construção da tabela.

Na resolução da tarefa (18) (Quadro 5) mobiliza-se um raciocínio bastante similar ao anterior, com uma pequena e significativa diferença; não há como substituir o infinito na expressão da função; mais uma vez, o aluno deverá trabalhar com tendências. Analisar para qual valor tende a função racional e determinar o limite da mesma. São necessárias, então, quatro análises, duas por sinal. No caso do infinito positivo, temos como "resultado" infinito negativo, para infinito negativo, "resultado" igual. A resposta será, então, menos infinito.

A tarefa (30) (Quadro 5) é resolvida com outra técnica. Coloca-se em evidência o fator de maior expoente e analisam-se, ao final, os sinais. Nesse caso, ficará em evidência apenas x multiplicando fatores que tendem a zero. Logo, a resposta será mais ou menos infinito. Considerando as análises para ambos os sinais.

Todos os autores apresentaram tarefas desse tipo. A diferença é que alguns deles pedem para que o aluno justifique o valor encontrado e, se o limite não pode ser determinado, há a solicitação do cálculo dos valores dos limites laterais e, algumas vezes, trabalham com esse tipo de tarefa, mas envolvendo gráficos. Vamos analisar os quatro T (quadro 6) que estão presentes em uma tarefa como essa.

Teoria	**Tecnologia**
Limite de uma função	$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$; Propriedades operatórias do limite (precisamos destacar que Ávila não apresenta a tecnologia envolvida nesse estudo, mas sim os procedimentos por intermédio de exemplos).
Tarefa	**Técnica**
Calcular o limite da função no ponto considerado. Observação: quando x_0 tende a mais ou menos infinito, a "verificação" do valor para o qual L tende pode ser feita de maneiras diferentes.	- substituir o valor de x_0 na função se o ponto pertencer ao domínio da função (tarefa 1). - se o ponto não pertencer ao domínio da função, o cálculo é feito para valores próximos do ponto x_0 (tarefa 14). - na tarefa 18, as funções polinomiais que compõem a função racional têm o mesmo grau, analisa-se então, qual a tendência do numerador e do denominador. - na tarefa 30, temos polinômios que têm diferenças de graus. Nesse caso, é preciso que se coloque em evidência o fator de maior grau e, depois das simplificações, analisar qual será o sinal determinante.

Quadro 6 - Os 4T nas tarefas de Ávila (1998)
Fonte: autores deste artigo.

Não encontramos neste livro de Ávila, com referência ao estudo de limites de uma função, nenhum outro tipo de tarefa. Além disso, ele não explora a mudança de registros. Com um único tipo de tarefa, o autor acaba por privilegiar procedimentos de cálculo. A mudança de registro poderá vir a acontecer, se o aluno optar por ela ao resolver a tarefa, mas voluntariamente.

No livro de Boulos (1999)

1ª TAREFA. Exercício 13.1: Dê o limite da função em x_0, se existir, nos casos da Figura 13-4. Caso não exista, determine os limites laterais (Figura 1).

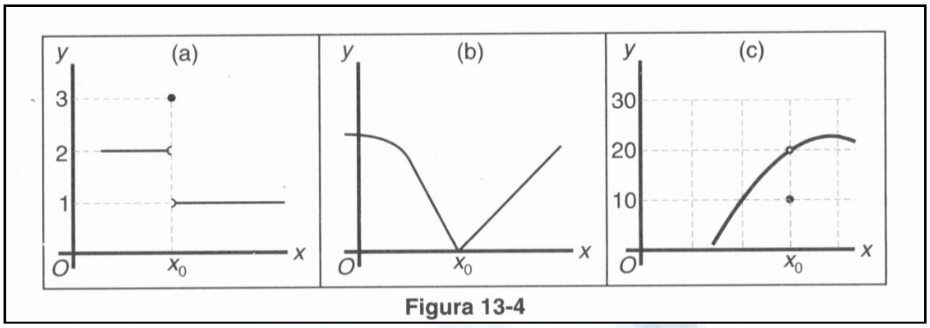

Figura 1- Gráficos da tarefa 1
Fonte: Boulos (1999, p.165)

Para a resolução dessa tarefa, são necessárias a interpretação dos gráficos das funções e a compreensão do significado do que vem a ser o limite de uma função em determinado ponto. Na letra (a) – o limite não existe, pois temos limites laterais diferentes. À esquerda de x_0 o valor é 2 e à direita de x_0 o valor é 1. Na letra (b) – os limites laterais tendem ao mesmo valor – zero. Logo, o limite da função é zero. Na letra (c) – apesar do ponto x_0 estar fora do gráfico da função, ao observarmos os limites laterais, percebemos que os mesmos tendem a um mesmo e determinado valor: 20. No nosso ponto de vista, essa situação é a mais delicada com relação ao estudo do limite da função em um ponto. Se o aluno não compreender que podemos determinar o limite da função nos baseando no que acontece na vizinhança do ponto, provavelmente não entenderá o porquê desse resultado. Apresentamos no quadro 7 uma síntese das reflexões que tecemos acima.

Teoria	**Tecnologia**
Ideia intuitiva de limite, limites laterais, existência do limite da função num ponto dado.	Se x_0 é ponto de acumulação bilateral do domínio de f, tem-se: $\lim_{x\to x_0} f(x) = L \; se \; e \; somente \; se \; \lim_{x\to x_0^-} f(x) = L \quad e \; \lim_{x\to x_0^+} f(x) = L$

Tarefa	**Técnica**
Dê o limite da função em x_0, se existir, nos casos da figura 13-4. Caso não exista, dê os limites laterais.	Para a resolução de uma tarefa como essa, o aluno deverá: - interpretar graficamente o limite da função, especialmente as tendências a ele associadas. - calcular os limites laterais. - verificar as condições de existência do limite de uma função em determinado ponto do domínio (sem perder a ideia de que o conceito de limite é local). - Determinar o limite da função mesmo quando o ponto não pertence ao domínio da função.

Quadro 7 - Os 4Ts na tarefa 1 - Boulos (1999, p.165)
Fonte: autores deste artigo

2ª TAREFA – Exercício 13.2 (p.165): Dê o limite da função *f* em $x_0 = 0$; caso não exista, dê os limites laterais.

Nessa tarefa, o autor propõe o cálculo de limite de seis funções definidas no quadro 8. Não apresentou os seus gráficos, o que induz a uma interpretação algébrica do limite das funções. Escolhemos as letras: (a), (d) e (e).

a) $f(x) = \|x\|$	d) $f(x) = x \; se \; x < 0$ $e \; f(x) = 0 \; se \; x > 0$	e) $f(x) = x + 1, se \; x < 0 \; e$ $f(x) = 2x, se \; x > 0$

Quadro 8- Itens da tarefa proposta - Boulos (1999, p.165)
Fonte: autores deste artigo

Mais uma vez, se o aluno tem conhecimento sobre o gráfico das funções apresentadas ele poderá determinar o limite das mesmas ou utilizar desse recurso como um auxiliar na resolução do que foi pedido.

O limite – no caso da letra (a) - existe e é zero.

O limite – na função dada pela letra (b) – também existe e é zero

Na letra (e) – o limite não existe, pois os limites laterais possuem valores distintos. À direita de 0, temos 0: e à esquerda de zero, temos1.

Teoria	**Tecnologia**
Ideia intuitiva de limite, limites laterais, existência do limite da função num ponto dado.	Se x_0 é ponto de acumulação bilateral do domínio de f, tem-se: $\lim_{x \to x_0} f(x) = L \; se \; e \; somente \; se \; \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L \quad e \; \lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$

Tarefa	Técnicas
Dê o limite da função em $x_0 = 0$, caso não exista, dê os limites laterais.	Para a resolução de uma tarefa como essa, o aluno poderá: - construir o gráfico para ter uma visão do que acontece em torno do ponto x_0 considerado. - verificar as condições de existência do limite de uma função em determinado ponto do domínio (sem perder a ideia de que o conceito de limite é local). - calcular os limites laterais. - Determinar o limite da função mesmo quando o ponto não pertencer ao domínio da função.

Quadro 9 - Os 4T na tarefa 2 - Boulos (1999, p.165)
Fonte: autores deste artigo

No quadro 9, Apresentamos, entre outras coisas, as técnicas que devem ser mobilizadas no cumprimento das tarefas propostas. As tecnologias que justificam essas técnicas nem sempre são objeto de ensino, e consequentemente de estudo pelo aluno.

3ª TAREFA

Exercício 13.5 (letras *a* e *e*).

a) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2+x}{x}$ e) $\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{3x^2-3x-6}$

Na resolução desses exercícios, os procedimentos são parecidos com os anteriormente citados. No primeiro caso, como não se pode substituir o valor diretamente na expressão, coloca-se x em evidência. Efetua-se a substituição e encontraremos o valor do limite igual a 1.

Na segunda função, apesar de lidarmos também com uma função racional, o procedimento é outro. O valor de x_0, nesse caso, coincide com o valor de uma das raízes da função do denominador. Sendo assim, podemos reescrevê-la como o produto de fatores e, assim, simplificamos a expressão e estabelecemos o valor do limite para a segunda função: 2/9.

Teoria	Tecnologia
Limite de funções racionais. Fundamentos teóricos do conceito de limite	Definição de limite de função quociente $\lim_{x\to x_0} r(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} p(x)}{\lim_{x\to x_0} q(x)} = \frac{p(x_0)}{q(x_0)} = r(x_0)$
Tarefa	**Técnica**

Calcule	Para que o aluno resolva essa tarefa, precisará: - verificar se o ponto considerado é zero das funções envolvidas. - verificar se o valor anula o numerador, mas não anula denominador. - decompor a função. - colocar o fator de maior expoente em evidência. - substituir o valor de x_0 na nova função.

Quadro 10 - Os 4Ts na tarefa 3 - Boulos (1999, p.168)
Fonte: autores deste artigo

4ª TAREFA. Exercício 13.7

Esse exercício (quadro 11) foi um dos mais diferentes dos livros analisados. É muito raro encontramos, em um livro de Cálculo, uma tarefa de cunho essencialmente teórico e com esse formato. O autor faz uma revisão teórica e "provoca" análises relativas à compreensão teórica do aluno ao solicitar que ele julgue a sentença.

Exercício 13-7 Verdadeiro ou falso? (Nos itens (d)-(g) espera-se um raciocínio intuitivo.)

(a) Se $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$, então existe o limite de $f(x)$ para x tendendo a x_0.
(b) ∞ é um número real, maior que todos os números reais.
(c) ∞ e $-\infty$ são dois números reais distintos.
(d) Se $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=\infty$, então $\lim\limits_{x\to 0}(-f(x))=-\infty$.
(e) Se $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, então $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=\infty$.
(f) Se $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, e $f(x)>0$ para todo x próximo de x_0, então $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=\infty$.
(g) Se $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)=-\infty$ e $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)=\infty$, então $\lim\limits_{x\to x_0} f^2(x)=\infty$.

Quadro 11 - Figura 10: Exercício 13. 7 (BOULOS, 1999)
Fonte: Boulos (1999, p.171)

O quadro 12 apresenta os quatros T relacionadas com essa tarefa.

Teoria	**Tecnologia**
Limite de uma função	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$ *se e somente se* $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=L$ *e* $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=L$
Tarefa	**Técnica**
Classifique ou julgue as sentenças em V ou F	- leitura e análise das afirmativas.

Quadro 12 - Os 4T na tarefa 4 - Boulos (1999, p.171)
Fonte: autores deste artigo

Vamos discutir as sentenças e suas respostas.

a) A sentença é falsa. O infinito não é "resposta". E aqui, é necessário que pensemos com mais vagar sobre o papel da igualdade nessa expressão. Os alunos estão habituados a “ler” a igualdade de uma única maneira. Essa forma de perceber a igualdade é nova.

b) A sentença é falsa – mais uma vez, infinito não é um número.

c) Falsa – o argumento é o mesmo da sentença anterior.

d) Essa sentença não é simples. Ela generaliza uma situação. Até esse momento, o autor trabalhou com o limite de maneira intuitiva e os procedimentos para o cálculo de limite de funções polinomiais e racionais envolvendo o infinito. Vamos então julgar a sentença com esses elementos. A maneira mais fácil de verificar se a sentença é verdadeira, é testando com uma função conhecida. Escolhemos a função quadrática definida por f(x) = x^2, quando calculamos o limite dessa função quando $x \to \infty$encontraremos ∞. Verificamos, então, o que acontece quando testamos a segunda parte da sentença. A função tem o sinal invertido e x tenderá a zero. O limite de (-f(x)) será dado por limite de - (x^2) quando x tende a zero. Que dará - ∞. A sentença é verdadeira.

e) É claro que a análise não pode ser feita e concluída apenas por intermédio de exemplos porque os mesmos não abarcariam todas as possibilidades. O ideal é que o aluno consiga generalizar a ideia que está por trás dessa verdade. Os exemplos servem para ele entender o que acontece com gráficos específicos. Posteriormente, o aluno poderá entender que estamos tratando de funções que sofreram uma transformação peculiar que é expressa pelo menos. Esse sinal faz com que a função mude de quadrante e gere o resultado do limite indicado.

f) O procedimento para a verificação dessa sentença é o mesmo da anterior. O aluno poderá inicialmente pensar em exemplos de funções que ele conhece e depois generalizar o raciocínio. E o resultado será que a sentença é falsa.

g) Sentença verdadeira.

h) Sentença verdadeira.

5ª TAREFA - Exercício 13.9 – letra c: Calcule.

(c) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{3x^2 - x + 2}$

Esse tipo de exercício foi encontrado nos livro de Boulos e de Guidorizzi. A função considerada é uma função composta. Para resolvê-la, é como se estivéssemos analisando duas funções. A primeira, a função quadrática. A segunda, a função que estabelece a raiz quadrada da primeira. Na verdade, a rigor, não haveria necessidade desse procedimento, mas ele auxilia na resolução. A substituição (quadro 13) faz com que a análise se realize por partes e isso poderá contribuir para que o aluno erre menos.

Teoria	**Tecnologia**
Limite de funções compostas: Conceituação de limite de função composta.	(na última igualdade usamos o resultado anteriormente enunciado). Em geral, tem-se: Para calcular $\lim\limits_{x \to x_0} f(g(x))$, chamamos $u = g(x)$, e se, para $x \to x_0$, tem-se $u \to \pm\infty$, então $\lim\limits_{x \to x_0} f(g(x)) = \lim\limits_{u \to \pm\infty} f(u)$ O resultado vale se, em lugar de x_0, figurar ∞ ou $-\infty$, ou se o limite for lateral.
Tipo de tarefa	**Técnica**
Calcule	O aluno deverá: - fazer a substituição da lei de formação da função que está dentro do radical por uma letra, por exemplo: - verificar o que acontece com a função u quando x tende a infinito. - o resultado encontrado será quase o valor da função composta. - deve-se verificar o que a função primeira modifica o resultado da segunda e concluir qual o valor do limite para essa segunda função.

Quadro 13 - Os 4T na tarefa 5 - Boulos (1999, p.176)
Fonte: autores deste artigo

Boulos é um autor que traz elementos teóricos e tarefas bem diferentes dos demais. Seus exercícios, colocados em blocos, acabam por explicitar qual a teoria que está sendo trabalhada naquele momento. Mas, ele propõe, também, tarefas mais gerais que ajudam na revisão de certos conteúdos.

Em várias de suas tarefas, há mudanças de registros. Se em um determinado momento há trabalho com gráficos, em outros acontece a exploração de registros algébricos. O autor explora, também, o registro na língua natural quando pede que o aluno justifique certos procedimentos.

No livro de Rogério, Silva e Badan (1992)

1ª TAREFA - Exercício 3.4 p.54 – letra B: “Em cada caso, responda se o limite da função existe e no caso afirmativo dê o seu valor”. Os autores associam a existência do limite da função em determinado ponto com a existência dos limites laterais iguais e finitos. Isso é feito através de definições. Há a ideia de reforço teórico no exercício apesar do mesmo ser algébrico.

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \geq 1 \\ x^2, & x < 1 \end{cases} \quad em\ x = 1$$

Se o aluno construir o gráfico da função, ele será capaz de visualizar aspectos importantes dessa função, conforme indicamos no quadro 14, além de associar outro registro a essa atividade.

Teoria	Tecnologia
Condições de existência de limite, Limites laterais.	Definição 3.1 - Diz-se que os limites laterais de uma função definida por y = f(x) num ponto a existem, se os limites laterais: $\lim_{x\to a^+} f(x)\ e\ \lim_{x\to a^-} f(x)$foram finitos. Definição 3.2 – Diz-se que existe o limite de uma função definida por y = f(x) em torno de a se existirem os limites laterais de y = f(x) em torno de a e se esses limites forem iguais.
Tipo de tarefa	Técnica
Em cada caso, *responda* se o limite da função existe e no caso afirmativo *dê* o seu valor.	- Na resolução dessa tarefa, percebemos que o aluno pode: - Traçar o gráfico da função para uma primeira análise visual/geométrica do que acontece em torno do ponto x = 1. - analisar se o ponto pertence ou não ao domínio da função. Nesse caso, sim. - calcular os limites laterais. - verificar que são diferentes e finitos. - concluir que o limite da função, nesse ponto específico, não existe.

Quadro 14 - Os 4T na tarefa 1 - Rogério e outros autores (1992, p.54)
Fonte: autores deste artigo

2ª TAREFA- Exercício 3.5 – letra a

Calcule os $\lim_{x\to\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ para:

$f(x) = 3x^2 + x + 4$

A resolução desse tipo de tarefa já foi apresentada anteriormente, mas a tecnologia apontada pelo autor se diferencia dos demais porque não há apenas a manipulação algébrica para se chegar a uma função “mais simples” e assim determinar o valor do limite. A função polinomial em questão é considerada através do seu expoente. Mesmo após essas manipulações que são, frequentemente, necessárias, o aluno deverá analisar o valor do expoente da função que restou: se é maior ou igual a um, se é menor que zero, se é maior ou igual a dois e par, ou se é maior ou igual a um e ímpar (Quadro 15).

Teoria	Tecnologia
Limite de funções polinomiais	$x \to \infty \begin{cases} x^n \to \infty, n \geq 1 \\ x^n \to 0, n < 0 \end{cases}$ $x \to -\infty \begin{cases} x^n \to \infty, n \geq 2 \; e \; n \; par \\ x^n \to -\infty, n \geq 1 \; e \; ímpar \\ x^n \to 0, n < 0 \end{cases}$
Tipo de tarefa	Técnica
Calcule	O aluno, para resolver uma tarefa assim deverá: - analisar a lei da função colocando o fator de maior expoente em evidência. Por intermédio das propriedades de limite, verificar o valor “dos pedaços” que compõem a lei da função. - com o que restar fazer a análise baseada no expoente – que é par, mas não é maior que 2. Logo, a análise recai à primeira situação, n maior ou igual a 1. O “resultado” será infinito.

Quadro 15 - Os 4T na tarefa 2 - Rogério e outros autores (1992, p57)
Fonte: autores deste artigo

3ª TAREFA- Exercício 3.10 – p.61: “nos exercícios abaixo as propriedades de limite não puderam ser aplicadas. Justifique o porquê e calcule os limites”.

Letra *a*

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \neq \frac{\lim_{x\to 1}(x^2 - 1)}{\lim_{x\to 1}(x - 1)}$$

Pela definição fornecida pelo autor, dadas duas funções f e g, tais que $\lim_{x\to a} f(x)$ e $\lim_{x\to a} g(x)$existem, então, existirá o limite que satisfaz a seguinte propriedade 5 (cf. quadro 16).

Antes da aplicação da propriedade 5, o aluno deve checar se o limite do denominador existe e é diferente de zero. Nesse caso, sua substituição direta na expressão geraria uma indeterminação. E necessário, então, que a expressão seja simplificada. O resultado será 2. Para que a propriedade possa ser aplicada, os limites dos fatores que compõem o quociente devem existir e o limite do denominador existir e ser diferente de zero (Quadro 16).

Teoria	Tecnologia
Limite de funções racionais	Propriedade 5 $\lim_{x\to a} (\frac{f}{g})(x) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$

Tipo de tarefa	Técnica
Justifique e calcule	- verificar se a substituição do valor na lei da função geraria uma indeterminação. - manipulação algébrica da função para sair da situação de indeterminação. - substituição do valor na nova função para a determinação da função.

Quadro 16 -Os 4Ts na tarefa 3 - Rogério e outros autores (1992, p.61)
Fonte: autores deste artigo

4ª TAREFA- Exercício 3.11 – letra a e letra d

a) $\lim_{x\to 0} \frac{tgx}{x}$ d) $\lim_{x\to 0} \frac{sen3x}{5x}$

Para a determinação desses limites, além dos limites fundamentais que devem ser considerados, o aluno precisará efetuar manipulações algébricas para chegar nesses limites fundamentais e, assim, determinar o valor do limite. Se ele não tiver domínio de algumas relações trigonométricas poderá encontrar dificuldade em resolver a tarefa.

Iniciemos pela letra (d)

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{sen3x}{5x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{sen3x}{5x}.\frac{3x}{3x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{sen3x}{3x}.\frac{3x}{5x}\right)$$

Nessa primeira parte da resolução, trabalha-se algebricamente e depois se calcula o limite do produto: $\lim_{x\to 0}\left(\frac{sen3x}{3x}.\frac{3x}{5x}\right) = 1.\frac{3x}{5x} = \frac{3}{5}$

Na letra (a), o processo é similar.

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x} = \frac{\frac{senx}{cosx}}{x} = \frac{senx}{cosx}.\frac{1}{x} = \frac{senx}{x}.\frac{1}{cosx} = 1.\frac{1}{cosx}$$

Como $\lim_{x\to 0}\frac{1}{cosx} = 1$, chega-se ao resultado: $\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x} = 1$

No quadro 17 apresentamos as diferentes tarefas, tecnologias e a teoria presentes nessas situações.

Teoria	Tecnologia
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{x} = 1$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{senx}{x}\lim\limits_{x\to 0}\frac{cosx-1}{x}$
Tarefa	Técnica
Calcule	- substituir as funções trigonométricas da função por funções equivalentes às que compõem os limites fundamentais.

Quadro 17 - Os 4T na tarefa 4 – (Rogério e outros autores, 1992, p.65)

Fonte: autores deste artigo

Quando há a solicitação para que o aluno justifique o porquê de certos resultados percebemos a combinação de mais de um registro de representação, que é algo essencial para melhor compreensão do objeto em estudo. É o caso da primeira tarefa analisada. Além de explorar os aspectos teóricos relacionados aos limites laterais e a condição de existência do limite da função para determinado ponto do domínio. O aluno poderá apelar para a construção do gráfico, o que o ajudaria na compreensão da inexistência do domínio no ponto considerado.

Ao propor, na segunda tarefa, a análise dos expoentes para determinar o "valor" do limite da função, corre-se o risco da interpretação se constituir apenas na aplicação da regra. Se houvesse o trabalho com outros registros combinados, acreditamos que isso facilitaria a compreensão por parte dos alunos.

A terceira tarefa nos chamou a atenção porque não encontramos tarefas similares nos outros livros analisados. A grande maioria dos livros apresenta as propriedades para o cálculo do limite das funções como uma "receita" e nem sempre alerta para o cuidado necessário ao aplicá-las.

A quarta tarefa é um trabalho essencialmente procedimental. Os autores demonstram os limites clássicos o que – de certa forma – justifica a utilização dos mesmos. Todo o trabalho a ser realizado consiste em transformarmos o que temos em algo semelhante aos limites clássicos porque com relação a esses já sabemos, de antemão, o valor do limite.

No livro de Guidorizzi (2001)

1ª TAREFA - Exercício 3.1 (4): Utilizando a ideia intuitiva de limite, calcule $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$.

Para resolver esse tipo de tarefa, o aluno deverá se pautar na ideia intuitiva de limite porque até esse momento foi apenas com isso que o autor trabalhou. Substituindo valores convenientes em *x*, ele poderá ver para qual valor o limite tende. Outra maneira poderia ser a construção do gráfico que, conjuntamente com os cálculos, faria com que o aluno percebesse porque x = 2 não pertence ao domínio da função e no que isso influencia/implica no cálculo do limite no entorno desse ponto (quadro 18).

Teoria	Tecnologia
Limite de função (de maneira intuitiva)	$\lim_{x\to p} f(x) = L$
Tarefa	Técnica

Calcule	- determinar o valor do limite da função para valores próximos a 2, tanto maiores quanto menores. Verificar para qual valor tende o limite.

Quadro 18 -Os 4Ts na tarefa 01 - Guidorizzi (2001, p.59)
Fonte: autores deste artigo

2ª TAREFA Exercício 3.3 (1) – letras b e l

Calcule e justifique: b) $\lim_{x\to 1}(3x+1)$ e l) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x+3}$

Como anteriormente, o aluno deverá trabalhar os cálculos se utilizando da ideia intuitiva de limite. A única diferença é que há a aplicação de propriedades operatórias do limite – que Guidorizzi (2001) apresenta em um quadro, entre exemplos, avisando que "por enquanto, vamos admitir tais propriedades e usá-las" (p.75). Por meio de resoluções de exemplos, o leitor entende qual o procedimento a ser tomado. O autor tem o cuidado de mostrar qual propriedade se aplica e qual não poderia ser aplicada, justificado o motivo (quadro 19).

Não nos deteremos nessa tarefa por ela ser muito semelhante às que já apresentamos anteriormente. A maneira que o autor apresentou as mesmas é que foi diferente. Novamente, chamamos a atenção para o fato do autor não explorar os gráficos. Acreditamos que a utilização de mais um registro contribuiria para a melhor compreensão do que está sendo feito.

Teoria	Tecnologia
Limite de função (de maneira intuitiva)	$\lim\limits_{x\to p} f(x) = L$ Se $\lim_{x\to p} f(x) = L_1$ e $\lim_{x\to p} g(x) = L_2$, Então $\lim\limits_{x\to p}[f(x)+g(x)] = L_1 + L_2 = \lim\limits_{x\to p} f(x) + \lim\limits_{x\to p} g(x)$ $\lim\limits_{x\to p}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}, desde\ que\ L_2 \neq 0$
Tarefa	Técnica
Calcule e justifique	- já que não há nenhuma restrição com relação ao domínio, substituir o valor de x na lei da função para calcular o limite da função. - verificar se a substituição do valor não função geraria uma

	indeterminação. - manipulação algébrica da lei da função para sair da situação de indeterminação. - substituição de valor na lei da nova função para a determinação do limite da função.

Quadro 19 -Os 4Ts na tarefa 04 - Guidorizzi (2001, p.80)
Fonte: autores deste artigo

3ª TAREFA Exercício (2)

A afirmação

"$\lim_{x \to p^+} f(x) = \lim_{x \to p^-} f(x) \Rightarrow f\ contínua\ em\ p$" é falsa ou verdadeira? Justifique.

Aqui temos um exercício de natureza teórica. Uma afirmação relacionada aos limites laterais e sua relação com a continuidade da função naquele ponto determinado. Com esse tipo de tarefa há reforço da teoria estudada. Mais uma vez, chama-se a atenção para o fato de que o conceito de limite é algo local.

Para concluir que a afirmação é falsa o aluno deverá recordar elementos importantes da condição de existência do limite e da continuidade (quadro 20).

Teoria	Tecnologia
Limites laterais e continuidade	Teorema: Sejam *f* uma função e *p* um número real, suponhamos que existam *a* e *b* tais que $]a, p[$ e $]p, b[$ estejam contidos em D_f. Então $\lim_{x \to p} f(x) = L \Leftrightarrow f\ admite\ limites\ laterais$ à $direita\ e$ à $esquerda\ em\ p\ e$ $\lim_{x \to p^+} f(x) = \lim_{x \to p^-} f(x) \Rightarrow L$
Tarefa	Técnica
Julgar e justificar	O aluno deverá se lembrar de que o fato dos limites laterais existirem não significa necessariamente que a função é contínua no ponto considerado. O ponto considerado pode ser o único que não pertence ao domínio da função. O limite existirá embora o ponto não pertença ao domínio; o que significa que há uma ruptura nesse ponto implicando na não continuidade da função no mesmo.

Quadro 20 - Os 4Ts na tarefa 03 - Guidorizzi (2001, p.85)
Fonte: Autores deste artigo

4ª TAREFA Exercício 3.4 (3)

Dada a função $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x-1}$, verifique que $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x)$. Pergunta-se: f é contínua em 1? Por quê?

O autor já havia trabalhado o fato de que toda função polinomial e racional é contínua, antes de chegar nesse exercício. Sendo assim, a atividade se concentra mais nos cálculos para a verificação se o valor do domínio anularia ou não o denominador. Em caso positivo, o levantamento da indeterminação para a efetuação do cálculo.

A escolha dessas duas últimas tarefas foi feita porque Guidorizzi (2009) foi o único autor por nós analisado que estabeleceu essa relação entre o limite e a continuidade.

F não é contínua em *x = 1*, pois f não está definida em 1. O ponto *x = 1* não pertence ao domínio da função. No entanto, após levantarmos a indeterminação, concluímos que existe o limite da função quando *x* tende a *1* e o valor do mesmo é *-1*.

Teoria	Tecnologia
Limite e continuidade	Teorema: Sejam *f* uma função e *p* um número real, suponhamos que existam *a* e *b* tais que $]a, p[$ e $]p, b[$ estejam contidos em D_f. Então $\lim_{x \to p} f(x) = L \Leftrightarrow f \text{ admite limites laterais à direita e à esquerda em } p \text{ e } \lim_{x \to p^+} f(x) = \lim_{x \to p^-} f(x) \Rightarrow L$
Tarefa	Técnica
Verifique, justifique	- para verificar se existe o limite da função no ponto considerado, calcula-se o limite da função nesse ponto. Como não há como substituir diretamente o valor do ponto na lei da função, é preciso fatorar a expressão que define a função do numerador e simplifica-se com a expressão que define a função do denominador. Trabalha-se com uma função “equivalente” à primeira, mas sem restrições no domínio. Com relação a continuidade, ela não existe no ponto considerado já que o mesmo nem pertence ao domínio da função analisada.

Quadro 21 - Os 4Ts na tarefa 04 - Guidorizzi (2001, p.85)
Fonte: autores deste artigo

Esse autor trabalha de maneiras variadas com relação às tarefas solicitadas (Quadro 21). Há aquelas que são essencialmente procedimentais, mas há outras tantas que envolvem maior grau de abstração e que não fizeram parte dessa análise primeira. Apresentaremos exemplos desse tipo de tarefa ao final do artigo.

Guidorizzi trabalha, também, com exercícios no quais se solicita a justificativa nas respostas, o que proporciona ao aluno condições de trabalhar com o registro em língua natural. O último exercício, em particular, foi escolhido para explicitar com o autor relacionou, na mesma tarefa, conceitos diferentes, o limite e a continuidade. Não encontramos exercícios similares a esse nos outros livros analisados.

O que ficou desse estudo dos livros didáticos

O propósito deste artigo foi o de apresentar a análise de livros de Cálculo Diferencial e Integral à luz de duas perspectivas teóricas. Enquanto Bakhtin nos dá elementos para refletirmos sobre o texto, Chevallard ajudou-nos a pensar com mais profundidade a relação entre teoria e técnica presentes no conceito de limite e nas tarefas que os autores propuseram.

Até aqui, nós realizamos uma análise vertical em que descrevemos aspectos que consideramos essenciais em cada livro. Ao procurarmos respostas para: a quem se dirige o texto? Procurávamos identificar os elementos que evidenciariam o direcionamento do discurso (O texto se dirige a especialistas ou não? A que perguntas ele responde?). Em termos bakhtianos, já sabíamos que o discurso matemático é monológico, mas é ainda assim, um discurso. Outro conceito chave de Bakhtin que fez parte da análise foi o de vozes que procuramos identificar no texto por meio de referências à história da matemática.

Quando "olhamos" para os textos dos livros didáticos em uma perspectiva bakhtiniana percebemos que o direcionamento do mesmo é – na maioria das vezes – limitado. Se no prefácio podemos identificar o destinatário do discurso, ainda assim, essa evidência é pouco sentida ao longo do texto. Em alguns momentos o autor se dirige ao professor, em outros momentos ao aluno, por exemplo, o livro de Rogério, Silva e Badan (1992). No caso de Ávila (1999) há a referência explícita de que o livro foi feito para o aluno calouro, mas essa informação é para o professor. Ao longo do texto, há poucos indicativos de um discurso que se dirija ao aluno. Boulos (1999) é que o mais se aproxima do "leitor". Encontramos elementos textuais que indicam isso. Além da linguagem, em alguns momentos, ser mais coloquial. Guidorizzi (2001) se dirige ao leitor no prefácio, mas muito pouco ao longo dos capítulos.

É claro que podemos pensar em outras "marcas" textuais para identificar a quem o discurso se dirige, mas de maneira geral, o texto é ainda para especialistas. Há passagens densas de sentido, mas que são reduzidas em explicação. Uma linguagem muito "enxuta" ou sintetizada é característica de um "diálogo" entre pares. O aluno não participa da mesma comunidade semiótica do professor, sendo assim – os sentidos e significados entre eles podem não ser partilhados o que exigiria uma explicação maior de termos, sentidos e contextos.

Não há quase nenhuma explicação/diferenciação de termos que também se fazem presentes no dia a dia e que recebem outra conotação na matemática. Supõem-se, mais uma vez, que haverá uma coincidência de sentidos. Um exemplo disso é quando os autores se utilizam do termo "ordinário" ou "intuitivamente". Há também frases do tipo "É fácil ver que".

E há, também, momentos do estudo do conceito de limite que exigiriam maiores explicações – como o estudo dos limites infinitos e limites no infinito – por serem conceitos difíceis, mas isso não ocorre. A igualdade é, no nosso ponto de vista, um elemento que dificulta e confunde a compreensão dessas definições. A “leitura” se modifica, mas não percebemos nos textos – em sua maioria – uma explicação mais detalhada sobre essa diferença.

Ávila (2002) faz considerações importantes com relação aos livros para o ensino de Cálculo, segundo ele, até 1960 esses livros seguiam os moldes dos livros europeus e incorporavam conteúdos de disciplinas que hoje são ensinadas separadamente como o próprio Cálculo, a Análise, Funções de uma Variável Complexa, Equações Ordinárias, Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies – entre outros.

A partir de 1960 os livros americanos tomam o lugar dos livros europeus e, assim, surge o costume de se ensinar o cálculo primeiro e depois – em outra disciplina – a análise. Ávila (2002) destaca que apesar dessas mudanças, persistiu a insistência na apresentação rigorosa do Cálculo desde o primeiro ano por influência de professores europeus no Rio de Janeiro e em São Paulo.

Com relação às vozes, a referência que é feita explicitamente a um matemático específico ou a um período específico da história é ínfima. Os livros passam a ideia de uma ciência atemporal, desumanizada, descontextualizada. Um conteúdo pronto e que foi, desde o início, como é apresentado hoje.

Ao pensarmos sobre os 4T presentes na teoria de Chevallard, percebemos que há momentos em que os procedimentos se sobressaem como se eles fossem a razão última do estudo. A técnica é priorizada em detrimento de uma abordagem mais conceitual. A tecnologia é também explícita, mas não ajuda – pelo menos na forma em que é apresentada – no entendimento da teoria. Um exemplo disso são as propriedades operatórias do limite. Muitas vezes, há a utilização das mesmas de maneira quase indiscriminada.

Técnica e tarefa acabam, no nosso ponto de vista, sendo os elementos principais dos textos. Há livros que trazem uma quantidade expressiva de exercícios que podem, talvez, fazer com que o aluno compreenda os conceitos sem confundir o representante com o representado.

Com relação às tarefas propostas, nós podemos afirmar que há pouca exploração de mudanças de registros em uma mesma tarefa. É como se cada tarefa só pudesse lidar com um único registro. Ao se negar isso ao aluno, cabe a ele realizar – por si só – essa passagem de um registro a outro – o que não é tarefa simples. Na perspectiva de Vygotsky, formar conceito significa – também – estabelecer relações. Uma tarefa bem formulada deve exigir que o aluno pense sobre essas conexões.

Alguns exercícios poderiam ser mais bem compreendidos se fossem trabalhados em diferentes registros, mas isso não acontece. Encontramos, também, poucas tarefas onde se solicitou o registro em língua materna. Tem-se a impressão de que na matemática não há texto, ainda que todo o nosso pensamento (considerando a teoria de Vygotsky) seja estruturado e construído nesse exercício de decodificação de signos, não se dá a devida importância a isso.

Outro aspecto que chama a atenção são os que envolvem procedimentos que não são explicados de maneira detalhada. É o caso, por exemplo, do trabalho com as indeterminações. Dos quatro autores analisados, acreditamos que somente Boulos (1999) conseguiu apresentar os procedimentos com justificativas que davam sentido ao que estava sendo feito. A "troca" de funções que é realizada para resolver o problema da indeterminação não é, na nossa compreensão, algo simples de ser percebido. Em nenhum momento do trabalho com as indeterminações pudemos encontrar gráficos que mostrassem a compatibilidade quase total dos domínios das mesmas.

Dentro de tudo que foi colocado neste artigo, queríamos identificar os pontos de vistas dos autores com relação ao conceito de limite. E o que podemos concluir? Há muitos elementos convergentes, principalmente no que tange à ordem de apresentação dos conteúdos que integram o estudo desse conceito. De uma maneira geral, o limite é apresentado por intermédio de vários objetos não ostensivos – como a derivada e a continuidade. Em um primeiro momento ele surge como um conceito auxiliar para a compreensão desses outros conceitos.

Somente depois do estudo da derivada é que é apresentado o conceito de limite de uma maneira mais independente. Ávila (1999) e Guidorizzi (2001) foram os autores que trabalharam o conceito de limite vinculado ao conceito de continuidade. Acreditamos que essas relações poderiam ser mais bem exploradas. O estudo separado dos conceitos gera um aprofundamento das técnicas a ele vinculadas, mas prejudica a visão do todo.

Ávila (1999) nos dá, primeiramente, a compreensão do limite como auxiliar do conceito de derivada. Boulos (1999) deixa explícito que a ordem do estudo – primeiramente a derivada e depois o limite – teve propósitos didáticos (ele é o único autor que justifica a ordem adotada). No estudo do limite, esse autor o trata de maneira independente. Rogério, Silva e Badan (1992) motivam a compreensão do limite intuitivo através de exemplos concretos e relacionados à derivada – em um primeiro momento. Depois trabalham através de definições e teoremas as condições para a existência do limite de uma função através dos limites laterais. É interessante ressaltar que alguns autores apresentam definições e teoremas e outros não.

Em termos de formalismo, Guidorizzi (2001) é o representante primeiro. Todo o seu trabalho é feito com a utilização de épsilons e deltas. Dos quatro autores analisados, ele é o único que trabalha nessa perspectiva. A definição formal não é nem mencionada nos outros livros textos analisados.

Para finalizar as análises de tarefas específicas, ressaltamos dois exercícios propostos por Guidorizzi (2001) que são, no nosso ponto de vista, difíceis para serem resolvidos pelos alunos.

Exercício 3.2 – número 1 – letra (a) – p.68

Prove, pela definição, que a função dada é contínua no ponto dado:

a) *f(x)* = *4x – 3* em *p* = 2

Sendo a função contínua no ponto considerado, basta que façamos a substituição na definição da continuidade e determinemos o valor de δ.

$$f(x) \text{é } contínua\ em\ p \Leftrightarrow \begin{array}{c} \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 \text{ tal que, para todo } x \in D_f \\ 0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \end{array}$$

Ou seja,

$$\lim_{x \to 2} 4x - 3 = 5 \Leftrightarrow \begin{array}{c} \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 \text{ tal que, para todo } x \in D_f \\ 0 < |x - 2| < \delta \Rightarrow |(4x - 3) - 5| < \varepsilon \end{array}$$

Para determinar δ em função de ε, resolvemos o segundo termo da expressão:

$|(4x - 3) - 5| < \varepsilon$, o que pode ser escrito na $|4x - 3 - 5| < \varepsilon$ ou ainda $|4x - 8| < \varepsilon$. O tratamento dessa desigualdade permite escreve $|4(x - 2)| < \varepsilon$, ou seja, $4|x - 2| < \varepsilon$. Logo, $4\delta = \varepsilon$ e $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$.

Exercício 3.3 – número 6 (p.81)

Prove que existe δ > 0 tal que

$1 - \delta < x < 1 + \delta \Rightarrow 2 - \frac{1}{3} < x^2 + x < 2 + \frac{1}{3}$

Para resolver tarefas como essa, o aluno deverá ter domínio da definição formal de limite, bem como conseguir enxergar processos que estão implicitamente colocados na expressão. O elemento essencial para a resolução dessa tarefa é fazer um rearranjo algébrico baseado na definição formal.

A primeira parte da expressão 1 – δ < x < 1 + δ, poderá ser reescrita:

$0 < |x - 1| < \delta$, pois se retirarmos o módulo da expressão chegaremos – exatamente – na expressão inicial.

Analisando a segunda expressão, teremos que comparar essa expressão com a definição formal de limite, identificar/determinar o L e o ε na expressão e determinar qual o valor de δ (em função de ε) que satisfaça a expressão, já que está se considerando que o limite existe.

Observando a expressão 2 - $\frac{1}{3} < x^2 + x < 2 + \frac{1}{3}$, podemos reescrevê-la assim

-$\frac{1}{3} < x^2 + x - 2 < +\frac{1}{3}$, ou ainda -$\frac{1}{3} < (x^2 + x) - 2 < +\frac{1}{3}$

Comparando a expressão com a definição formal, teremos: *f(x)* = $(x^2 + x)$, L = 2 e ε = $\frac{1}{3}$. De posse de todos esses elementos, podemos escrever: $\lim_{x\to 1} x^2 + x = 2$, ou ainda:

$$\lim_{x\to 1} x^2 + x = 2 \Leftrightarrow \begin{matrix} \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 \text{ tal que, para todo } x \in D_f \\ 0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \end{matrix}$$

$$\lim_{x\to 1} x^2 + x = 2 \Leftrightarrow \begin{matrix} \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 \text{ tal que, para todo } x \in D_f \\ 0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow |(x^2 + x) - 2| < \varepsilon \end{matrix}$$

$$Fazendo\ \varepsilon = \frac{1}{3}$$

$$|(x^2 + x) - 2| < \frac{1}{3}$$

Precisamos provar que dado ε > 0, existe δ > 0 tal que $|x - 1| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(1)| < \varepsilon$

Desenvolvendo a segunda parte da desigualdade: $|f(x) - f(1)| < \varepsilon \Leftrightarrow |(x^2 + x) - 2| < \varepsilon$

Como procuramos um delta em função de épsilon, precisamos trabalhar para chegarmos nisso, para tanto, vamos reescrever a segunda parte da desigualdade.

$$|f(x) - f(1)| < \varepsilon \Leftrightarrow |x^2 + x - 2| < \varepsilon$$

$$|f(x) - f(1)| < \varepsilon \Leftrightarrow |(x - 1)(x + 2)| < \varepsilon$$

$$|f(x) - f(1)| < \varepsilon \Leftrightarrow |(x - 1)||(x + 2)| < \varepsilon$$

Como δ > 0:

O delta que procurávamos, em função de épsilon é $\delta = \frac{\varepsilon}{|x+2|}$

Esse tipo de tarefa demanda, no nosso ponto de vista, certa maturidade matemática com relação a procedimentos algébricos, além do domínio do conteúdo formal. Há um excesso de simbolismo que faz com que o sentido do que está se fazendo não seja tão rapidamente percebido. Sem a utilização de outros registros de representação não é tarefa fácil nem resolver, nem compreender esse tipo de exercício. Acreditamos que esse tipo de tarefa possa ser trabalhado posteriormente. Mas, se for feita a opção para que eles sejam incorporados ao estudo do limite da função e da continuidade para alunos do primeiro ano da universidade – que essas tarefas sejam feitas passo a passo e bem discutidas. Voltaremos a refletir sobre a definição formal de limite em futuros artigos.

Referências

ALMOULOUD, Saddo Ag.**Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba: Editora da UFPR, 2007

ÁVILA, Geraldo.**O ensino do cálculo e da Análise** – Matemática universitária, no. 33, PP.83-95, dezembro 2002

ÁVILA, Geraldo. **Introdução ao Cálculo**, LTC, Rio de janeiro, 1998.

BAKHTIN, Mikhail. **Estética da Criação Verbal**. São Paulo: Martins Fontes, 2003.

BAKHTIN, Mikhail. **Marxismo e filosofia da linguagem**. Editora Hucite, 14ª edição, São Paulo, 2010.

BOULOS, Paulo. **Cálculo Diferencial e Integral**.Volume 1, Makron Books,São Paulo, 1999.

CHEVALLARD Y. Organiser l´étude. 3. Ecologie & regulation.**Actes de la 11 École d´Été de Didactique des Mathématiques**. France: La Pensée Sauvage. p. 41-55, 2002.

CHEVALLARD Y. **Conceptsfondamentaux de la didactique:**perspectivesapportées par une approcheanthropologique.Recherches en Didactique des Mathématiques. Grenoble: La PenséeSauvage, 1992. v. 12.1, p.73-112.

CHEVALLARD Y. L´analyse des pratiquesenseignantes en théorieanthropologique du didactique.**Recherches en Didactique des Mathématiques**. Grenoble: La PenséeSauvage-Éditions, 1999.v. 19.2, p.221-265.

DOUADY, Régine. Jeux de cadre et dialectique outil-objet**.Recherche en Didactique des Mathématiques**. Grenoble: La PenséeSauvageÉditions, 1986. v. 7.2, p.5-31.

DUVAL, Raymond –**Semiósis e pensamento humano** – registros semióticos e aprendizagens intelectuais(fascículo I), Livraria da Física Editora, São Paulo, 2009

GUIDORIZZI, Hamilton L.**Um curso de Cálculo**. Volume 1, 5ª edição, LTC editora, Rio de Janeiro, 2001.

ROGÉRIO, Mauro U; SILVA, Hélio C da; BADAN, Ana Amélia F de A. **Cálculo Diferencial e Integral –** funções de uma variável. 2ª edição, coleção didática no. 09, Cegraf – Ufg, Goiânia, 1992.

SANTOS, Maria Bethânia S. dos. **Um olhar para o conceito de limite:** sua constituição, apresentação e percepção de professores e alunos sobre o seu ensino e aprendizado. Tese de doutorado em Educação Matemática – PUC/SP, 2013.

VYGOTSKY, L.S.**Pensamento e linguagem**. 2ª edição, Martins Fontes, São Paulo, 1998.

VYGOTSKY, L.S. ***A formação social da mente: o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores***. 6ª edição, Martins Fontes, São Paulo, 1998.

Submetido em outubro de 2014

Aprovado em dezembro de 2014