REVISTA DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL (UFMS)

Volume 8, Número Temático – 2015 – ISSN 2359-2842

Hermenêutica e Geometria Não Euclidiana: Imre Toth e os instrumentos específicos de uma filologia matemática

Hermeneutics and Non-Euclidean Geometry: Imre Toth and the specific instruments of a mathematical philology

Gustavo Barbosa [1]

Resumo

Este artigo tem como objetivo destacar alguns dos elementos hermenêuticos e metodológicos empregados por Imre Toth em sua pesquisa. O foco deste estudo encontra-se em sua obra *Aristotele e i fondamenti assiomatici della geometria*, onde são apontados e examinados os trechos das obras de Aristóteles que segundo Toth discutem a existência de uma geometria heterodoxa na Academia de Platão. Dispondo diferentes autores e momentos da história da geometria não euclidiana em um mesmo plano, e confrontando sempre a história e a filosofia da matemática moderna com a antiga, Toth traça uma via alternativa para compreender o desenvolvimento da matemática em período anterior a Euclides.

Palavras-chave: Imre Toth. Geometria Não Euclidiana. Hermenêutica. Metodologia

Abstract

This article aims to emphasize some heuristic and methodological elements used by Imre Toth in his research. The focus of this study is in his work *Aristotele e i fondamenti assiomatici della geometria* where are shown and examined the places in Aristotle's works that argue the existence of a heterodox geometry in the Plato's Academy according to Toth. Setting different authors and moments of the history of non-euclidean geometry in a same plane and always confronting the modern history and philosophy of mathematics with the ancient one Toth draws an alternative way to comprehend the development of mathematics in the earlier time of Euclid.

Keywords: Imre Toth. Non-Euclidean Geometry. Hermeneutics. Methodology.

Sobre a vida do personagem:

[1] Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" – campus Rio Claro. gvbarbosa@gmail.com

Imre Toth (1921-2010) foi um historiador e filósofo da matemática pouco conhecido no âmbito da pesquisa brasileira. É certo que contribui para isso o fato de não haver em nosso país um único livro seu publicado. Toth foi um pensador prolífico, tendo escrito em diversos idiomas, como o alemão, o francês, o húngaro, o inglês, o italiano, o romeno e o russo, e sempre sobre a relação simbiótica entre a Filosofia e a Matemática. Ensinou filosofia da matemática nas universidades de Bucareste (1949-1968), Frankfurt (1969-1971), Bochum (1971-1972) e Ratisbona (onde conseguiu um posto fixo como professor em 1972). Ministrou também cursos na École Normale Supérieure de Paris (1975-1976) e na Princeton University (1976-1977) – vindo a se tornar membro do *Institute for Advanced Studies* entre 1980 e 1981.

Nascido em Satu Mare, na região norte da Transilvânia, situada na divisa entre a Romênia e a Hungria, Toth teve sua infância e juventude marcadas por episódios dramáticos comuns a diversos outros judeus que sobreviveram à perseguição nazista[2]. Na ocasião de seu nascimento, a família encontrava-se fugindo dos tantos *pogrom* antissemitas dos anos 20 com o objetivo de transferir-se para os EUA, seus planos foram frustrados pela Grande Crise e permaneceram bloqueados na Hungria. Adolescente rebelde, inclusive contra a própria cultura judaica, que aos seus olhos aceitava a perseguição com calma resignação, Toth foi preso, processado e condenado à prisão em 1940. A acusação foi a de pertencer a um grupo de resistência comunista, cujos maiores atos de subversão teriam se resumido a ler o *Manifesto do Partido Comunista* e pichar em um muro "abaixo o fascismo, abaixo a guerra, morte aos fascistas" (TOTH, 1992)[3]. "Durante o período na prisão, tive muito tempo para estudar", revela em uma entrevista, "era como um roedor, ávido em aprender"[4]. Em 6 de junho de 1944, já a bordo de um trem com destino a Auschwitz, foi salvo por um oficial húngaro antinazista, que tendo ouvido pela Radio de Londres notícias do desembarque dos aliados telefonou para o diretor da prisão ordenando a volta do trem com os prisioneiros judeus.

---

[2] Cf. Toth (2004).
[3] No original: "abbasso il fascismo, abbasso la guerra, morte ai fascisti". Todas as traduções são de responsabilidade do autor, logo, por questões de economia de espaço na redação deste artigo e fluência na sua leitura, optou-se pela supressão deliberada das ocorrências individuais da expressão "tradução nossa". Do mesmo modo, os trechos originais seguem em notas de rodapé, evidenciando os casos em que os grifos pertencem às fontes ou se são escolha estilística do autor.
[4] Id. No original: "Durante il periodo di prigionia ho avuto molto tempo per studiare. Ero come un roditore, avido di imparare".

O seu interesse pela matemática começou cedo e durante sua vida escolar esteve sempre entre os primeiros na disciplina, o que o tornava diferente dos demais colegas, todavia, era o seu fascínio pela dimensão metafísica da ciência ao invés do gosto pelo desafio. Enquanto seus colegas despendiam suas energias na solução de problemas difíceis, Toth refletia sobre as experiências do pensamento que a ciência lhe proporcionava, julgando mais importante a estrutura interna da ciência em si. Era aquele tipo de aluno que não se dava por convencido com as justificações de seus professores a questão: *por que menos multiplicado por menos dá mais?* Ou pelo modo como eram introduzidos os números imaginários. Sendo assim, resolveu buscar respostas mais convincentes nos autores clássicos, e se dedicou à leitura de Leibniz, Cardano, Euler, Lambert e outros (TOTH, 2004, p. 44). Sua sede de conhecimento, apoiada em sua inclinação epistemológica e determinação polímata o levaram a considerar os clássicos da filosofia em grau de igualdade, cotejando sempre esses dois aspectos – o científico e o filosófico – com a literatura, e expondo o seu pensamento segundo a manifestação artística pela qual tinha um apreço especial: o *collage*.

Sobre a sua obra

A maior obra de Toth é de 1967 e intitula-se *Das Parallelenproblem im Corpus Aristotelicum* (O problema das paralelas no Corpus Aristotelicum), publicada no *Archive for History of Exact Sciences*, volume 3, p. 249-422, no qual demonstra a existência de significativos vestígios de geometria "não euclidiana"[5] nas obras de Aristóteles. Na época, Toth acreditava que a natureza dessa geometria *heterodoxa* contida nos textos do Estagirita fosse algo bem conhecido dos estudiosos, e que por isso, não estava fazendo nada de novo. Posteriormente, aprofundando suas pesquisas, Toth se deu conta de não encontrar nada semelhante ao que havia feito em suas fontes – que incluíam as principais traduções, edições críticas, comentários e artigos a respeito do papel da geometria na filosofia de Aristóteles. Esse trabalho de Toth abriu um novo caminho para o campo de pesquisa que procura nos textos filosóficos dos séculos IV e V a.C. informações que

[5] Preferimos colocar a expressão entre aspas por não poder negligenciar a ironia do anacronismo que ela encerra no contexto aqui tratado, pois estamos lidando com a geometria na época de Platão e Aristóteles, e, portanto, antes do próprio Euclides.

possam complementar as escassas fontes históricas a respeito da matemática no mesmo período. E se a qualidade de uma pesquisa pode ser avaliada, em parte, pelas reações positivas que gera na comunidade científica, o arquivo epistolário de Toth é prova do entusiasmo com que o seu texto foi acolhido por pesquisadores da estatura de Kurt Von Fritz (1900-1985), Evangelos Stamatis (1898-1990), B. L. van der Waerden (1903-1996), Imre Lakatos (1922-1974), Karl Popper (1902-1994) e Hans Freudenthal (1905-1990), para ficarmos em poucos exemplos.

Em meados dos anos 90, o filósofo italiano Giovanni Reale (1931-2014) pediu a Toth que escrevesse uma introdução geral à tese central do *Das Parallelenproblem*. Sua intenção era tanto a de oferecer a um público maior um quadro histórico, doutrinal e metodológico do tratamento diferenciado dedicado por Toth aos textos de Aristóteles e à geometria, quanto o de proporcionar a Toth uma oportunidade de apresentar o estado da arte de sua pesquisa. Para que se possa compreender melhor esse segundo escopo, basta dizer que o próprio Toth afirmava jamais ter abandonado o problema da existência de uma geometria *heterodoxa* na filosofia de Aristóteles. Além disso, não deixa de ser divertido o relato das dificuldades que Reale enfrentou em obter de Toth uma versão final do livro, uma vez que este ampliava continuamente as suas pesquisas. Reale narra, em sua introdução, a paixão e o espírito artístico que faziam de Toth um autor da estirpe daqueles que nos apresenta sempre uma obra interrompida, nunca acabada.

No ano de 1997 veio a lume *Aristotele e i fondamenti assiomatici della geometria: prolegomeni alla comprensione dei frammenti non-euclidei nel «Corpus Aristotelicum» nel loro contesto matematico e filosofico* (Aristóteles e os fundamentos axiomáticos da geometria: prolegômenos à compreensão dos fragmentos não-euclidianos no "Corpus Aristotelicum" em seu contexto matemático e filosófico), publicado pela editora *Vita e Pensiero*, na coleção *Temi metafisici e problemi del pensiero antico* (Temas metafísicos e problemas do pensamento antigo), com prefácio e introdução de Reale. Para que se possa ter uma ideia da amplitude e profundidade dos estudos a que Toth se dedicou, em 1998 foi publicada outra obra sua com o título *No! Libertà e verità, creazione e negazione. Palimsesto di parole e immagine raccolto e ordinato da Imre Toth* (Não! Liberdade e verdade, criação e negação. Palimpsesto de palavras e imagens reunido e organizado por Imre Toth), em que trata praticamente da mesma tese que nos *fondamenti*, porém em dimensão dramatúrgica. Não que o espírito artístico do autor não possa ser reconhecido na primeira, contudo, sua prioridade reside nos cânones do rigor científico, ainda que se debruçando sobre um tema clássico sob uma perspectiva diferenciada. Já no segundo prevalece um estilo passional, em que o cientista dá lugar ao poeta em um jogo de personagens históricos, alguns grandes, outros nem tanto, que atuam e interagem entre si em um mesmo plano. Duas obras que se complementam como resultado de um espírito especulativo indivisível, onde matemática, filosofia, literatura e pintura são suas partes integrantes[6].

Objeto de análise e considerações metodológicas

É dos *fondamenti assiomatici della geometria* que nos ocuparemos majoritariamente nas páginas a seguir, buscando destacar alguns dos elementos metodológicos utilizados por Toth que se estabeleceram, ao longo dos anos, como sua característica distintiva. Dividindo a obra em duas partes, Toth expõe e contextualiza os seus princípios mediante os quais se fundamenta a sua hermenêutica na primeira, para depois, na segunda, expor o complexo de instrumentos matemáticos adotados na interpretação dos trechos geométricos no *corpus aristotélico*. Para decodificar os fragmentos, como o próprio autor nos explica, são necessários apenas os conceitos e propriedades geométricas clássicas, como *perpendicularidade*, *paralelismo*, *ângulo reto*, *soma dos ângulos do triângulo*, *incomensurabilidade da diagonal do quadrado*, *transitividade* e *congruência* (TOTH, 1997, p. 409).

Delineamos a seguir os parâmetros fundamentais de um espaço de imersão que possa ser útil a pesquisadores e estudantes que se ocupam de temas envolvendo a História e a Filosofia da Matemática (ou ainda a articulação dessas disciplinas no interior da Educação Matemática). Vale dizer que o estudo aqui apresentado não tem a pretensão de servir como um repositório estratégico a ser tomado *aprioristicamente* como uma *forma* a ser preenchida com um *conteúdo*. Trata-se, por sua vez, de um ensaio teórico sobre uma

[6] A lista completa das passagens é a seguinte: *Analíticos Primeiros* (II 16, 65 a 4-7; II 17, 66 a 11-15); *Analíticos Segundos* (I 12, 77 b 16-28; I 24, 85 b 38-86 a 3; II 2, 90 a 12-14; II 2, 90 a 31-34; II 8, 93 a 32-35; *Confutações Sofísticas* (11, 171 a 12-16); *Física* (II 9, 200 a 15-30); *Sobre o Céu* (I 12, 281 b 3-6); *Sobre a Alma* (I 1, 402 b 16-22); *Problemas* (956 a 15-27); *Metafísica* (E 2, 1026 b 10-14; Θ 10, 1052 a 4-7); *Ética a Nicômaco* (VI 5, 1140 b 11-20); *Grande Moral* (I 9, 1187 a 29-10, 1187 b 20); *Ética a Eudemo* (II 6, 1222 b 15-42).

metodologia específica mobilizada para a compreensão das relações entre a História e a Filosofia da Matemática na antiguidade e o seu desenvolvimento conjunto por uma ótica que valoriza, sobretudo, a hermenêutica. O próprio Toth não especifica os seus pressupostos metodológicos, mas nos faz conhecê-los subjacentes em seu texto pela maneira como interpreta cada fenômeno da longa e intrincada história da geometria não euclidiana. Ele não nos fornece recomendações procedimentais, apenas nos oferece histórias que se imbricam. Em vista disso, tudo o que apresentaremos aqui são histórias, isto é, narrativas de percursos que se delineiam de modo mútuo e simultâneo como resultado de outras histórias, acumulando-se todas elas no presente como um *palimpsesto na alma* (emprestando aqui uma metáfora cara a Toth). O que oferecemos são fios condutores que todo pesquisador deve, a exemplo de Penélope à espera de Odisseo, desatar e entrelaçar ao sabor de seus interesses e necessidades.

O papel de Euclides enquanto balizador historiográfico da matemática

Reale recorda em sua introdução ao livro de Toth (1997, p. 23-24) que no passado os trechos matemáticos nos textos aristotélicos eram lidos a partir do panorama euclidiano, ou seja, buscava-se compreender os problemas matemáticos que apareciam em textos filosóficos projetando sobre eles os *Elementos*. Pode-se conjecturar que isso se deva ao fato de não haver um grande intervalo de tempo entre Aristóteles e Euclides, além de os *Elementos* serem a obra mais antiga da matemática a chegar completa até nós. Considerando o anacronismo como o *pecado original* do historiador, reputa-se passível de aceitação que esse pesquisador siga adiante com suas pesquisas e conjecturas até que novas fontes e procedimentos possam surgir no horizonte. O próprio Toth reconhece que praticamente todos os estudiosos que examinaram o *corpus* de Aristóteles estão de comum acordo de que não é possível qualquer traço de uma proposição que seja por ele indicada como um postulado da geometria. Toth considera também que mesmo que não seja possível para ele desassociar-se dessa *communis opinio*, é igualmente difícil ignorar os *estratos geológicos* da geometria não euclidiana quando se estuda o seu pleno desabrochar no século XIX.

A estrutura axiomático-dedutiva euclidiana é, em muitos aspectos, devedora dos esforços aristotélicos de organização científica, separação e hierarquização dos princípios. O lado negativo da perspectiva canônica é que considera a matemática como praticada na *Academia* de Platão, por exemplo, consolidada em grande parte, talvez com poucas diferenças, em relação ao texto posterior de Euclides, que pudessem ser negligenciadas em favor do entendimento. Proclus, filósofo e matemático do século V d.C., contribui com essa concepção ao dizer que Euclides teria "[...] arranjado muitas das coisas de Eudoxo [...]" e "[...] aperfeiçoado muitas das coisas de Teeteto, e ainda tendo conduzido as coisas demonstradas frouxamente pelos predecessores a demonstrações irrefutáveis [...]" (EUCLIDES, 2009, p. 41), na introdução de seu *Comentário ao Primeiro Livro dos Elementos de Euclides*.

O problema que se coloca então diz respeito à transcendência desse paradigma euclidiano: como proceder quando se deseja investigar as etapas do desenvolvimento anterior da matemática, quando o que estava em pauta eram justamente as coisas de Eudoxo, Teeteto e outros não beneficiados pela axiomatização e estruturação dessa ciência? A favor dessa questão temos o fato de que há passagens nos textos de Platão e Aristóteles que se ajustam melhor à matemática contida nos fragmentos e comentários de pensadores anteriores ou contemporâneos a aqueles, e, portanto, pré-euclidianos. Não se trata, em absoluto, de uma desconsideração do papel de Euclides como referencial historiográfico da matemática, mas de uma busca por conexões com reflexões filosóficas a respeito de uma matemática em estado fragmentário e magmático. O que emerge dessa perspectiva diversificada é uma dinâmica recíproca de impulsos e contenções entre matemática e filosofia na história do pensamento. Segundo Toth:

> Cada texto é parte orgânica constitutiva do contexto na complexidade de todos os textos: do presente, do passado, do futuro. Todos os textos falam, mas nenhum texto é um solilóquio. Os textos falam *uns com os outros*. Por esta razão parece-me tarefa da hermenêutica ler e interpretar o texto em relação ao sistema de coordenadas da inteira massa do contexto: e isso quer dizer descobrir aqueles textos que podem ou devem ser levados em consideração como interlocutores do texto dado. (1997, p. 189)[7]

[7] No original: "Ogni testo è parte organica costitutiva del contesto complessivo di tutti i testi: del presente, del passato e del futuro. Tutti i testi parlano, ma nessun testo è un soliloquio. I testi parlano *l'uno con l'altro*. Per questa ragione, mi sembra compito dell'ermeneutica leggere ed interpretare il testo in rapporto al sistema di coordinate dell'intera massa del contesto: e ciò vuol dire scoprire quei testi, che possono o devono esseri presi in considerazione come interlocutori del testo dato".

Hermenêutica, liberdade, negação e criação

De fato, o que torna o trabalho de Toth transformador é o olhar diferenciado que lança sobre um tema há muito investigado, discutido e rediscutido, com uma longa e sólida tradição hermenêutica. E é propriamente falando a respeito da *interpretação* como uma manifestação de liberdade que Toth inicia o seu livro, ainda que se refira ao sinônimo mais tradicional no meio filosófico: o *comentário*. Para Toth, o comentário é um diálogo com o autor e, simultaneamente, um solilóquio do espírito que o pratica. "O comentário examina a obra, impõe questões a ela, disputa com ela, expõe a ela as suas dúvidas, levanta contradições, lhe diz "Não"" (TOTH, 1997, p. 45-46)[8]. Nessa conversação da alma consigo mesma, o seu trabalho é o de partejar a si própria, tornar-se autoconsciente, uma atividade continuamente inconclusa de vir a ser do espírito que constitui o conteúdo da filosofia[9].

Como é dito em diversos momentos de seu trabalho, às vezes explicitamente, outras implicitamente, a interpretação deve proporcionar ao pesquisador um exercício de liberdade e criatividade. O exemplo por ele fornecido versa sobre a configuração particular em que organiza suas referências, buscando romper com paradigmas e pressupostos, a fim de conceber uma imagem holística do problema das paralelas. Em meio à totalidade amorfa de textos de onde parte a sua pesquisa, Toth os considera diferentemente da "taxonomia alfabética de uma enciclopédia", e também de uma "sequência cronológica de um manual de história", e ainda "segundo a articulação sistemática das disciplinas" (TOTH, 1997, p. 64). Na tessitura de sua narrativa, Toth recusa todas essas compartimentações para dispor em uma "simultaneidade sem tempo"[10] Aristóteles e Lobachevsky com Euclides e Bolyai, Platão e Dedekind com Eudoxo e Nicolau de Cusa, Zenão e Saccheri com Hegel e Cantor, Plotino e Mallarmé com Hilbert e Franz Rosenzweig[11].

Um exemplo de que esse horizonte interconectado atemporalmente busca uma unidade de pensamento que perpassa os problemas encontra-se no confronto que Toth

---

[8] No original: "Il commento esamina l'opera, le pone domande, disputa con lei, le espone i suoi dubbi, solleva contraddizioni, le dice "No"".
[9] Idem, p. 46.
[10] Idem.
[11] Idem.

(1997, p. 72) faz entre o axioma pitagórico da indivisibilidade da mônada com os axiomas de Peano (1858-1932). O quarto axioma, aquele que diz que existe um número, *um*, que *não é sucessor* de nenhum número, representa o início absoluto da sequência numérica, e assim cumpre o mesmo papel da indivisibilidade da mônada. Além disso, dado que na teoria de Peano todos os outros números possuem um *predecessor* e um *sucessor*, Toth reflete se o seu correspondente pitagórico não teria sido a dualidade *pequeno-grande*, que pode ser interpretada como *falta* e *excesso*. A diferença é que enquanto Peano precisou decretar o estatuto do *um* como número, mesmo não satisfazendo a dupla propriedade *predecessor-sucessor*, os gregos não hesitaram em não considerar o *um* como número justamente por ele, sendo o elemento gerador dos números, não possuir a dupla propriedade comum a todos os outros números.

A partir dessa perspectiva poliédrica em que o moderno não apenas dialoga com o antigo, mas o projeta, carregando-o de modo subjacente e remodelado pelas contínuas inscrições que o pensamento imprime sobre si, Toth encontra os primeiros acenos à necessidade de fundamentação axiomática da geometria em Aristóteles. É um comentário, considerado como metodologia de pesquisa da matemática antiga, e tomando como objeto o texto sagrado da geometria, a saber, os *Elementos* de Euclides, que dá início a um movimento revolucionário. Nesse molde foi elaborada a famosa obra do jesuíta italiano Giovanni Girolamo Saccheri (1667-1733), considerado o pai da geometria não euclidiana, *Euclides ab omni naevo vindicatus* (Euclides livre de toda mácula), em 1733. Muito embora se tratasse de um comentário ao texto euclidiano, a intenção de Saccheri não era a de construir um sistema não euclidiano, mas ao contrário, destruir qualquer possibilidade de uma estrutura geométrica alternativa. Muito antes disso, Proclus formulou uma proposição que contradiz o postulado das paralelas em seus *Comentários* ao primeiro livro dos *Elementos*. Não obstante, apesar da suspeita e da negação, o comentário de Proclus é pontual, uma observação isolada que em nenhum momento flerta com ambições maiores, como a possibilidade de instaurar um sistema a partir da negação.

Ao passo que os *Elementos* envelheciam o interesse em comentá-lo diminuía, observa Toth[12], em especial no período entre os séculos XVII, XVIII e XIX. Sua

[12] Id. p. 51-52.

explicação é a mudança de prioridades marcada pelo desenvolvimento científico e tecnológico que marcou aquela época. Novos problemas, e mais importantes na ordem do dia, chamavam a atenção dos matemáticos e requeriam o seu empenho, tais como aqueles surgidos em virtude de interesses monetários, a balística, a navegação, a construção de pontes e máquinas, a mecânica celeste, transmissão de calor, etc. Essas questões favoreceram o progresso da matemática, munindo-a de novos instrumentos metodológicos e abrindo as portas para um vasto campo a ser explorado. Em meio a esse contexto, Toth[13] ressalta que palavras como originalidade, criatividade e produtividade passaram a conduzir o meio matemático. Disputas em torno de problemas formulados de modo astuto e sofisticado estimulavam as ambições, relegando as sutilezas semânticas a um segundo plano. Parte desse desinteresse dava-se também como forma de negação de um espírito de disputas prolixo, sufocante e vazio que marcou, sobretudo, o período Medieval.

A partir do século XVIII a atenção dos matemáticos começou a voltar-se, pouco a pouco, para o postulado das paralelas de Euclides, porém, sem o intento de discuti-lo ou perscrutar as alternativas que podem emergir diante de sua negação, mas com a ambição de demonstrá-lo. Por trás dessa ambição há um fundo metafísico, que é a negação *ab initio* de quaisquer argumentos que pudessem modificar a ordem da esfera celeste da geometria. Não interessava instaurar suspeitas a respeito de um dos pilares euclidianos, sob o risco de fazer ruir o edifício todo. Na nova tradição que se estabeleceu, Toth dá destaque ao que podemos chamar de “dialética da confutação” (ele próprio não emprega essa expressão), segundo a qual cada novo comentário dos *Elementos* era uma análise *crítico-destrutiva* de seu precursor, ao mesmo tempo em que se propunha a substituí-lo com algo melhor, último, definitivo. Contudo, esse “fluxo diacrônico das confutações recorrentes” (TOTH, 1997, p. 57)[14] serviu para manter vivo o interesse pelo problema. Não obstante esse trabalho de *conservação*, cada novo comentário trazia imanente em si um retrato da vanguarda do desenvolvimento teórico, o que nos fornece um importante registro da dilatação do universo geométrico.

Sendo assim, havia já no início do século XIX um *palimpsesto* de comentários a Euclides, no qual os fundadores Gauss (1777-1855), Bolyai (1775-1856) e Lobachevsky

---

[13] Id., p. 53.
[14] No original: “flusso diacronico delle confutazioni ricorrenti”.

(1792-1856) "puderam ler sobre a superfície todos os teoremas fundamentais da futura geometria não euclidiana"[15]. Nesse caso, a inovação ocorreu na forma de percepção de que era possível erigir um sistema a partir do postulado das paralelas sem que isso abalasse a consistência da geometria euclidiana. O que começava a se esboçar naquela época é que seria a própria consistência da geometria euclidiana que tornaria possível a geometria alternativa derivada da negação do postulado das paralelas. Em suma, a força propulsora para o advento da geometria não euclidiana provinha do texto de Euclides, auxiliada por uma imposição filosófica do espírito, como observa Toth:

> O texto não euclidiano foi redigido na ritual língua materna da geometria, isto é, no idioma euclidiano dos *Elementos*, e, portanto, o sistema não euclidiano foi construído com o auxílio da mais rigorosa metodologia euclidiana, e em seu pleno respeito. Nada de técnicas demonstrativas nunca vistas, nem a formulação ou a demonstração de um qualquer teorema fundamental, mas foi a novíssima, inesperada, hermenêutica do presente texto geométrico a conduzir à revolucionária instauração não euclidiana. E a *interpretação* não pertence ao âmbito de competência do intelecto computacional. A hermenêutica é trabalho unicamente da especulação filosófica. (TOTH, 1997, p. 59)[16]

Voltando o seu foco hermenêutico para a discussão envolvendo as paralelas, Toth[17] encontra passagens nos textos aristotélicos que podem muito bem representar discussões matemáticas de seu próprio tempo, dentro e fora da *Academia*. Nos *Analíticos Primeiros* (65 a 4-7) há uma crítica àqueles (Aristóteles não os nomeia) que supõem construir linhas paralelas, ou seja, pessoas que assumem como verdadeiro algo que necessita ser demonstrado[18]. Nem o Estagirita, nem outros autores de seu tempo, nos transmitiram informações sobre a maneira como se organizava a geometria que lhes era contemporânea. Em vez disso, nos fazem saber quais temas eram vivamente discutidos, como por exemplo, no trecho acima aludido, do qual Toth entende que o texto de geometria à disposição de Aristóteles era incompleto quando comparado aos *Elementos*

---

[15] Id., p. 58. No original: " avrebbero potuto leggere sulla sua superficie tutti i teoremi fondamentali della futura geometria non euclidea".
[16] No original: "Il testo non euclideo fu redatto nella madrelingua rituale della geometria, cioè nell'idioma euclideo degli *Elementi*, e quindi il sistema non euclideo è stato costruito con l'ausilio della più rigorosa metodologia euclidea, e in suo pieno rispetto. Non techniche dimostrative mai viste, nè la formulazione o la dimostrazione di un qualche fondamentale teorema, ma fu la nuovissima, inaspettata, ermeneutica del presente testo geometrico a condurre alla rivoluzionaria instaurazione non euclidea. E l'*interpretazione* non appartiene all'ambito di competenza dell'intelleto computazionale. L'ermeneutica è lavoro unicamente della speculazione filosofica".
[17] Id., p. 60.
[18] Para mais detalhes dessa *petição de princípio* no tocante às paralelas, indicamos Heath (1970, p. 27-30).

de Euclides. Haveria ainda proposições a serem submetidas a um exame minucioso, sobretudo levando-se em consideração a possibilidade de dependência de conceitos mais simples.

A preocupação filosófica que Aristóteles direcionava para a geometria era a pesquisa das causas, uma busca pela origem, pelo princípio, pela *arche*. As proposições fundamentais, os *archai*, formavam a base irredutível a partir da qual os teoremas eram deduzidos. No entanto, os caminhos trilhados por Toth o levaram a concluir que o *axioma das paralelas* não era reconhecido, em época pré-euclidiana, como um dos *archai* da geometria[19]. Além disso, Toth chama a atenção para um fato imprescindível para a compreensão da feitura daquilo que nós hoje chamamos *matemática*, que é a construção do seu léxico. Uma análise cuidadosa do significado dos termos e a que exatamente eles estariam se referindo, nos auxilia a precisar, tanto quanto possível, o estado das coisas[20]. Termos como *definição*, *hipótese*, *arche* e *postulado* eram usados com significados diversos, dependendo do contexto[21]. Um problema que Aristóteles enfrenta desde o início de seus *Analíticos Segundos*. Antes disso, nos *Analíticos Primeiros* (76 b 16-22), Aristóteles adverte que "não é necessário enumerar explicitamente todos os *archai*: o que é evidente, simples, universalmente notado e aceito, pode ficar sem menção" (TOTH, 1997, p. 71)[22]. Considerando-se essa a posição dominante de Aristóteles, é possível ter uma boa ideia das dificuldades por ele enfrentadas, uma vez que em nenhum lugar de seu

---

[19] Por uma questão óbvia de tempo, espaço e objetivo deste artigo não pudemos acessar diretamente as fontes indicadas por Toth, porém deixamos aqui as referências completas, como as encontramos. São elas: "A. Seidenberg. *Did Euclid's Elements, Book I, develop geometry axiomatically?*, «Archive for History of Exact Sciences», 10 (1974-75), pp. 263-295"; e, contemporaneamente a este, mas escrito independentemente a ele: "B. L. van der Waerden. *Die Postulate und Konstruktionen in der frühgriechischen Geometrie*, «Archive for History of Exact Sciences», 14 [1978], pp. 342-357" (TOTH, 1997, p. 83).

[20] Na obra em que trata do problema geométrico no *Mênon* de Platão (TOTH, 1998b), Toth avalia a maneira como os termos *inefável* (*arreton*) e *irracional* (*alogon*) foram incorporados à geometria para designar uma perturbação em meio à ordem das relações numéricas em que os pitagóricos interpretavam a natureza. No vocabulário vernacular, essas palavras estavam relacionadas a reações emotivas, como alterações de estado de espírito, consternação, loucura, demência, e, ao mesmo tempo primitivas, diante de situações incompreensíveis, como exaltação, euforia. Nesse trabalho, Toth insere a famoso episódio da *lição de geometria* feito por Sócrates com um jovem escravo no contexto maior da discussão a respeito da incomensurabilidade e seus desdobramentos na filosofia.

[21] Quanto a isso, as conclusões de Toth foram obtidas mediante "o trabalho clássico de Kurt von Fritz: *Die ARXAI in der grieschischen Mathematik*, «Archiv für Begriffsgeschichte», 1 (1955), pp. 13-103" (TOTH, 1997, p. 83-84, n. 5).

[22] No original: "non è necessario enumerare esplicitamente tutte le *archai*: ciò che è evidente, semplice, universalmente noto e accetto, può restare senza menzione".

corpus encontram-se critérios objetivos para estabelecer o que possa ser considerado *evidente*.

Incorporada aos procedimentos metodológicos indispensáveis para a compreensão do problema das paralelas no contexto aristotélico, essa análise filológica levada a cabo por Toth o leva a encontrar sugestões de imposição da proposição das paralelas ao *status* de *arche* da geometria como uma saída plausível para o círculo vicioso das tentativas de demonstração. Aristóteles explica que uma *arche* é um enunciado que não é possível demonstrar[23]. Por conseguinte, não é possível decompô-lo em *elementos* (*stoicheia*)[24], sendo portanto necessário constatar que se tratava de um enunciado *irredutível*. Restava examinar os procedimentos inferenciais envolvidos nas tentativas de demonstração, e o fato de que todas elas caiam, inevitavelmente, em círculos viciosos era ainda insuficiente para alçar a proposição à condição de *arche*. A questão epistemológica de fundo permanece, segundo Toth (1997, p. 90), ganhando uma nova roupagem e sendo rebatizada por David Hilbert (1862-1943) de *axiomática*, também conhecida em nossos tempos como *metamatemática*.

Antes disso, no entanto, o matemático Eugenio Beltrami (1835-1900) atou as pontas que, conforme Toth, encontravam-se desatadas em Aristóteles, que são: (i) a independência que o postulado das paralelas tem dos princípios; e (ii) a irrefutabilidade de seu oposto, quer dizer, a constatação de que a negação do postulado comporte contradições. Beltrami, que trabalhou com Enrico Betti (1823-1892) e Riemann (1826-1866) – ambos tendo exercido grande influência sobre sua pesquisa –, mostrou que (i) somente pode ser demonstrado com o auxílio de (ii), e vice-versa, embora isso tenha sido feito após a "emancipação" de Gauss, etc. O reconhecimento dessa conexão é, de acordo com Toth, um elemento fundamental para o progresso da geometria não euclidiana, e os desdobramentos epistemológicos da evolução histórica de seus polos seguem por vias muito distintas. Por um lado, as tentativas – Toth as chama de *naufrágios* (1997, p. 96) – de demonstração da dependência do postulado (i) conduzem a uma "monotonia sem fim

[23] Cf. Aristóteles, *Analíticos Segundos,* livro I, capítulo 10.

[24] Ao escolher esse nome para o seu tratado Euclides se alinha a uma tradição, já que antes dele Hipócrates de Chios, Leon e Theudius de Magnésia haviam composto *elementos* (EUCLIDES, 2009, p. 38-39). O termo grego é também muito presente na física de Empédocles para indicar os componentes últimos em que a matéria pode ser dividida, além de seu uso geral para designar as letras do alfabeto.

de um tedioso suicídio lógico"[25], uma "esterilidade cognitiva"[26] porque não fazem surgir nenhum conhecimento novo, nada têm a acrescentar, o que segundo consta nos *Analíticos Primeiros* (65 a 4-7) já era conhecido pelos matemáticos da *Academia*. Por outro lado, os fracassos da refutação do oposto da proposição das paralelas (ii) resultam em um inesperado sucesso porque são aditivos, construtivos e produtivos no sentido em que cada tentativa mal sucedida representa uma variante de um teorema não euclidiano. Portanto, ao passo que (i) é *indecidível*, (ii) é *contraproducente*.

Aristóteles teria reconhecido as limitações de seu *método analítico* (*Analíticos Segundos*, 84 a 8) como instrumento para o reconhecimento dos *archai*, uma vez que esse reconhecimento, em um dado gênero científico deve ocorrer no interior de seu próprio âmbito. Uma via mais apropriada aos *archai* reside no *método dialético* de Platão, "a via bifurcada do conhecimento simultâneo do dado e do seu oposto"[27]. Essa ideia vem exposta com clareza nos diálogos tradicionalmente conhecidos como "tardios" ou "da velhice". Vale dizer que não há um consenso entre os estudiosos a respeito da divisão cronológica dos textos platônicos, apesar disso há concordância de que a filosofia de Platão se modifica ao longo dos diálogos e que alguns, como o *Filebo*, o *Timeu*, o *Crítias*, o *Parmênides*, o *Teeteto*, o *Sofista*, o *Político* e *As Leis* (inacabada), representam a última fase de seu pensamento. Resumida de maneira extremamente simplista, a ideia central da *dialética platônica* é a de que "*não é possível conceber o oposto sem o seu oposto* e o *conhecimento de um e do outro é o mesmo*"[28]. Glosando: a *dialética platônica* não representa, necessariamente, um rompimento com o paradigma parmenideano que afirma que "o que é não pode não ser", ou como Aristóteles (2002, p. 145) formula no terceiro capítulo do quarto livro da sua *Metafísica* (gama, 1006a): "[...] é impossível que uma mesma coisa, ao mesmo tempo, seja e não seja". Também conhecido como *princípio do terceiro excluído*, não é pouco dizer que "esse é o mais seguro de todos os princípios"[29]. Platão preferiu não desconsiderar o que não é, como se, grosso modo, para ele, investigar

[25] Id., p. 96. No original: "monotonia senza fine di un tedioso suicidio logico".
[26] Id., p. 97. No original: "sterilità cognitiva".
[27] Id., p. 93. No original: "la via biforcata della conoscenza simultânea del dato e dell'oposto".
[28] Id., p. 94. No original: "[...] *non è possibile concepire l'opposto senza Il suo opposto* e la *conoscenza dell'uno e dell'altro è la stessa*".
[29] Id.

o *ser* é conhecê-lo por seus opostos, defini-lo pelo o que ele é e em igual medida pelo o que não é[30].

Essa reflexão que Toth faz sobre os métodos de pesquisa em Platão e Aristóteles nos faz compreender como o *princípio do terceiro excluído* impede, de forma velada, o desenvolvimento da geometria não euclidiana. Sendo a realização de Euclides referente ao que é considerado verdadeiro, o que não está de acordo com ela só pode ser imediatamente falso.

Geometria more ethico em Aristóteles

O trocadilho com o título da obra de Espinoza (*Ethica more geometrico demonstrata – Ética demonstrada com método geométrico*) vem de um texto escrito por Toth em 1977 e que foi incorporado aos *fondamenti*[31]. Trata-se do estudo feito por Toth sobre o tema da *decisão de escolha* em Aristóteles, em que os exemplos fornecidos pelo Estagirita não gravitam a esfera da vida ética ou política, mas propriamente a geometria[32]. Por exemplo, quando fala sobre a *temperança (sophrosyne)*, o exemplo dado por Aristóteles é o do juízo a respeito do triângulo ter ou não a soma de seus ângulos iguais a dois retos. A interpretação elaborada por Toth reputa que a existência, tanto da geometria que posteriormente será chamada *euclidiana*, quanto da sua *oposta*, depende no fundo de uma *liberdade de escolha do espírito*. Essa tese reforça os argumentos de que o interesse de Platão e Aristóteles pela matemática consistia também nas capacidades cognitivas que as ciências dos números, das formas e dos movimentos são capazes de desenvolver. Declarada por ambos como modelo de rigor e certeza a ser perseguido pela filosofia como instrumento de obtenção e verificação da verdade, a matemática estava aquém apenas da

[30] Não por acaso, o *Parmênides* de Platão é considerado por muitos a sua obra mais difícil, por tratar longa e profundamente da dicotomia Eleática. Toth dedicou a ele uma monografia (2006) onde interpreta os paradoxos de Zenão – discípulo de Parmênides que também participa do diálogo – e a teoria de seu mestre sobre a ótica do procedimento conhecido como *método da subtração repetida e recíproca* (em grego: *antanairesis* ou *anthiphairesis*), que na literatura matemática moderna passou a ser chamado de *algoritmo euclidiano* (um duplo anacronismo que soa como cacofonia aos ouvidos mais rigorosos).

[31] Sua referência completa é: “*Geometria more ethico. Die Alternative: euklidische oder nichteuklidische Geometrie in Aristoteles und die Grundlegung der euklidischen Geometrie*, in AA. VV., *PRISMATA*, Festschrift für Willy Hartner, a cura di S. Maeyama e M. Schramm, Wiesbaden 1977, pp. 395-415” (TOTH, 1997, p. 16, n. 2).

[32] Os trechos arrolados são os seguintes: *Ética a Nicômaco* (VI 5, 1140 b 11-20); *Grande Moral* (I 9, 1187 a 29-10 1187 b 20); *Ética a Eudemo* (II 6, 1222 b 15-42).

dialética (para Platão) e da *ciência do ser enquanto ser* (para Aristóteles). Ponto de apoio fundamental para o confronto que eles travaram contra a erística dos sofistas, que segundo eles representava uma arte da ilusão por meio de discursos vazios, confundindo o pensamento e mesmo suscitando aversão por eles. Na qualidade de pensadores que não dividiam o conhecimento em compartimentos estanques, como nós modernos o fazemos levando ao extremo a categorização aristotélica, Platão e Aristóteles não separavam o ético do político, o lógico do epistemológico. Em vez disso, consideravam esses horizontes em uníssono, harmonizando-os pela retidão de um pensamento disciplinado por parâmetros aceitos em comum acordo entre os seus participantes, e valendo-se de um estilo linguístico que rejeita tudo o que não é essencial e que é capaz de definir seus objetos produzindo significados por meio de elipses.

As muitas vidas de Imre Toth

Para concluir nossa apresentação, enfatizamos que a tendência hermenêutica inaugurada por Toth ao longo de toda a sua vida de estudos parece-nos apenas possível graças ao seu espírito polímata. Os muitos contatos que teve e influências que recebeu, sejam na escola, na prisão e por todos os lugares por onde passou, as amizades daqueles com quem trabalhou, o peso da tradição judaica de sentir-se um apátrida onde quer que estivesse, tudo isso convergiu para uma visão ampla do conhecimento. Os caminhos que escolheu para cotejar a história da matemática com as artes e outras manifestações do espírito segue o exemplo de suas principais referências, e não aceita as divisões supramencionadas. Em seu lugar considera a linguagem como um mundo onde a existência do *ser* se torna possível, seja no caso dos *irracionais* ou dos *números negativos* e *imaginários,* seja a *geometria não euclidiana*. Uma vez desagregados os espaços, Toth aproxima ciência e literatura, afirmando em diversos momentos que, para ele, *Madame Bovary* é um exemplo de precisão tal qual como as figuras de Euclides (TOTH, 1997, 1998a, 2004, 2015). Analisando sua obra, verificamos que a técnica de *collage* aplicada à escrita como um exercício de liberdade pode ser uma forma eficaz de negação e de criação do novo.

Referências

ARISTÓTELES. **Metafísica**. Ensaio introdutório, texto grego com tradução e comentário de Giovanni Reale. Volume II. Tradução: Marcelo Perine. São Paulo: Loyola, 2002.

EUCLIDES. **Os Elementos**. Tradução e introdução de Irineu Bicudo. São Paulo: UNESP, 2009.

HEATH, T. **Mathematics in Aristotle**. Bristol: Thoemmes Press, 1970.

TOTH, I. **Aristotele e i fondamenti assiomatici della geometria: prolegomeni alla comprensione dei frammenti non-euclidei nel «Corpus Aristotelicum» nel loro contesto matematico e filosofico**. Milano: Vita e Pensiero, 1997.

______. **No! Libertà e verità, creazione e negazione. Palimsesto di parole e immagine raccolto e ordinato da Imre Toth.** Milano: Rusconi, 1998a.

______. **Lo schiavo di Menone**. Introduzione, traduzione, bibliografia e indici a cura di Elisabetta Cattanei. Milano: Vita e Pensiero, 1998b.

______. **Matematica ed emozioni.** Roma: Di Renzo Editore, 2004.

______. **I paradossi di Zenone nel Parmenide di Platone**. Napoli: Bibliopolis, 2006.

______. **A colloquio con Imre Toth**. A cura di Romano Gatto. MATEpristem. 1992. Disponível em: <http://matematica.unibocconi.it/articoli/colloquio-con-imre-toth>. Acesso em: 08 abr. 2015.

______. **Essere e non essere Riflessioni sul significato filosofico della conoscenza matematica**. A cura di Liliana Curcio. MATEpristem. 2012. Disponível em: <http://matematica.unibocconi.it/toth/toth.htm>. Acesso em: 08 abr. 2015.

Submetido em maio de 2015

Aprovado em setembro de 2015