



O Ensino de Perspectiva para Alunos do Ensino Médio num Ambiente de Geometria Dinâmica

Perspective Teaching for High School Students in a Dynamical Geometry Environment

Lucas Cunha Bastos¹

Maria Elisa Esteves Lopes Galvão²

Vera Helena Giusti de Souza³

RESUMO

Apresentam-se resultados de uma proposta de ensino de Geometria para alunos do Ensino Médio, ampliados a partir do trabalho apresentado no VII SIPEM. A partir do desenvolvimento histórico de técnicas para a representação plana de figuras espaciais, procurou-se suporte teórico para essas representações em Parzys e Gutiérrez para elaborar atividades que exploram técnicas de construção de imagens em perspectiva com Geometria Dinâmica. A análise dos dados evidencia que usar um software pode despertar interesse por construções geométricas e Geometria e embora mostre limitações no aprendizado de conceitos que dependem de conhecimentos prévios, alguns foram assimilados pela maioria, mostrando que um trabalho dessa natureza pode promover aprendizagem em Geometria.

PALAVRAS-CHAVE: Perspectiva, Geometria Dinâmica, Geometria de Posição.

ABSTRACT

It is presented results of a proposal using perspective ideas for Geometry's teaching, with High School students. Based on historical development of bidimensional representations of spatial figures techniques and supported by Parzys's and Gutiérrez's studies on those representations, activities were developed, to explore techniques for constructing images in perspective, in a Dynamic Geometry environment. Data analysis shows that using a software may provoke interest on geometric constructions and Geometry, and although there was restricted apprenticeship of concepts that depend on previous ones, some were more frequently assimilated, which shows that a work of this nature may promote learning in Geometry.

KEYWORDS: Perspective, Dynamic Geometry, Geometry.

¹ Rede Estadual do Ceará – Brasil. lucascbastos@gmail.com

² Universidade Anhanguera de São Paulo – Brasil. elisa.gal.meg@gmail.com

³ Instituto de Matemática e Estatística – USP – Brasil. verahgsouza@gmail.com

Introdução

As origens das técnicas de perspectiva para a representação plana de figuras espaciais remontam ao século XV e estão presentes em muitas obras de arte desde então. Tivemos por objetivo organizar um conjunto de atividades que possibilitassem a alunos do Ensino Médio uma iniciação às ideias geométricas relacionadas às técnicas de perspectiva, levando em conta um percurso histórico do desenvolvimento dessas técnicas. Como as imagens em perspectiva podem ser identificadas com representações planas de figuras tridimensionais, consideramos que conhecer aspectos e princípios adotados nessas representações pode colaborar para o desenvolvimento de habilidades de visualização.

Encontramos nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (BRASIL, 2015) referência às relações entre visualização e representação.

[...] as habilidades de visualização, desenho, argumentação lógica e de aplicação na busca de soluções para problemas podem ser desenvolvidas com um trabalho adequado de Geometria, para que o aluno possa usar as formas e propriedades geométricas na representação e visualização de partes do mundo que o cerca (BRASIL, 2015, parte III, p. 44).

De acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017),

Estabelecer relações entre vistas ortogonais e representações em perspectiva de figuras geométricas espaciais e de objetos do mundo físico e aplicar esse conhecimento em situações relacionadas ao mundo do trabalho (BRASIL, 2017, p. 565).

Na análise de cinco coleções de livros didáticos de Matemática do ensino fundamental, aprovadas pelo Programa Nacional do Livro Didático (BRASIL, 2014), portanto anteriores à BNCC, somente encontramos referência às técnicas de perspectiva no volume do nono ano de uma delas. No capítulo “Como aprender a desenhar em 3D”, os autores analisam pinturas que destacam a noção de profundidade e explicam a construção de um quadrado ou um retângulo com a perspectiva cônica com base nos conceitos de ponto de fuga e linha do horizonte. Considerando as recomendações citadas e a carência de material didático sobre o assunto no ensino de Geometria na Educação Básica, propusemo-nos a investigar se aspectos relacionados à perspectiva podem contribuir para desenvolver habilidades de visualização e, ao mesmo tempo, propiciar uma oportunidade de pôr em prática os conhecimentos sobre as propriedades estudadas no âmbito da Geometria de Posição no Ensino Médio. Neste artigo, trazemos alguns dos resultados obtidos com essa investigação, cujo objetivo foi introduzir e apresentar a um grupo de alunos do Ensino Médio algumas propriedades da geometria projetiva por meio de

ideias iniciais da perspectiva e um conjunto de atividades com recursos que possibilitem a transição de uma abordagem estática (figuras, pinturas, papel e lápis) para um contexto dinâmico (propiciado pelo uso de software de geometria dinâmica). O trabalho com o auxílio do software nos permitiu resgatar o contexto da prática de Dürer⁴ para a cópia da imagem a ser representada numa tela, fixando a posição do desenhista. A partir da reprodução dessa prática, no ambiente de Geometria Dinâmica, elementos da Geometria de posição podem possibilitar a compreensão dos elementos e das primeiras regras de representação formuladas por Alberti (1991). Desta forma, revisitamos as técnicas da prática e da teoria de representação do século XV com o auxílio da tecnologia, numa atividade desenvolvida em sala de aula.

Considerações gerais sobre a pesquisa

As ideias históricas introdutórias sobre as técnicas de representação plana de figuras espaciais se apoiaram no trabalho de Alberti (1991) e na técnica de representação de Dürer. Foram relevantes também as pesquisas de Souza (2010), Miranda (2006), Kodama (2006) e Meneguzzi (2009), dentre outros. Encontramos no trabalho de Souza (2010) uma investigação sobre o uso de imagens para o desenvolvimento de habilidades de visualização. Miranda (2006) estudou as secções planas de um cubo que podem ser visualizadas com o uso de Geometria Descritiva, com suporte num software de geometria dinâmica e identificou relações entre uma figura e suas representações na Geometria Espacial e na Geometria Descritiva. Kodama (2006) estudou a perspectiva cavaleira e Meneguzzi (2009) explorou uma sequência histórica, que nos leva a Dürer, criador das máquinas de perspectiva – os perspectógrafos – aliando a história da perspectiva a conhecimentos empregados em técnicas de desenho.

Orientamos a intervenção pelas ideias do “*Design Experiment*” (COBB et al., 2003) pela natureza avaliativa e reflexiva, pois o entendimento da compreensão dos alunos é parte essencial de nossos objetivos. Avaliar o que se ensina numa etapa e, na seguinte, retomar o que foi ensinado, com base nos resultados obtidos e assim por diante, como sugerem Cobb et al., trouxe benefícios para esta pesquisa.

⁴ <http://www.uh.edu/engines/epi138.htm>

Buscamos, como na pesquisa original, responder, dentre outras, à seguinte questão: “A utilização de um software de Geometria Dinâmica para trabalhar com projeções de figuras facilita o entendimento dessas técnicas de projeção?”

Para a coleta de dados, elaboramos um conjunto de atividades que foram realizadas em três encontros, com dez alunos do 2º ano do Ensino Médio da rede pública estadual do Ceará. No primeiro encontro, discutimos aspectos históricos da evolução das técnicas de perspectiva e os conceitos geométricos que embasam essas técnicas, tais como paralelismo, pontos médios e diagonais, a partir de obras de arte de diferentes períodos. Introduzimos na sequência, as noções de “ponto de fuga” e de “linha do horizonte”, com o suporte de elementos da Geometria de posição, a partir da recriação das estratégias da prática de representação e refazendo, no ambiente de geometria dinâmica um percurso que vai dessa prática às regras estabelecidas por Alberti em “Della Pintura” (ALBERTI, 1991). No segundo encontro, após a construção em perspectiva de um paralelogramo, os participantes usaram papel, lápis e régua para construir e explorar propriedades da representação em perspectiva de paralelogramos. No terceiro e último encontro, apresentamos e discutimos outros exemplos de estratégias básicas de construção, reproduzidas num ambiente de Geometria Dinâmica. Os participantes responderam algumas questões sobre a influência do uso do recurso computacional na compreensão dos conceitos introduzidos pelos modelos apresentados. Traremos para análise, nesse artigo, um recorte das atividades realizadas nos encontros.

A análise dos dados foi conduzida à luz dos estudos de Parzysz (1998) e Gutiérrez (1998) sobre representações planas de figuras espaciais.

Parzysz (1998) investiga a perda de informação nas representações e traça um paralelo entre o conhecimento e a percepção, com o conflito entre o *polo do visto* e o *polo do sabido*. Segundo Parzysz, o polo do visto é caracterizado pela representação visual de um ambiente ou objeto, podendo apenas descrevê-lo pelos elementos que são ali apresentados; o polo do sabido refere-se ao que se conhece de um objeto ou ambiente, não vinculado ao que está representado, mas sim a características e propriedades. Por exemplo, numa representação em perspectiva, “vemos” que as retas que representam o piso não são paralelas – pólo do visto – se nos limitamos ao que a imagem nos revela, mas “sabemos” que representam retas paralelas – pólo do sabido – se a interpretamos pelas propriedades que conhecemos do ambiente e não apenas pelo que se vê na representação.

Gutierrez (1998) propõe um conjunto de habilidades necessárias para fazer ou interpretar representações planas de figuras espaciais e, como Parzysz (1998), considera que as representações planas podem gerar dificuldades, que resume em duas: interpretar a representação plana de modo a compreender a figura tridimensional original, o que Parzysz considera decodificar a representação e compreender o objeto tridimensional de maneira adequada para construir a representação plana, ou seja, codificar a figura, segundo Parzysz.

Entendemos que o uso de um *software* de geometria dinâmica pode auxiliar o entendimento da perspectiva e das diferenças e semelhanças entre ambientes reais e ambientes de representação. Nossas atividades buscam mostrar como funcionam “na prática” representações planas de ambientes e objetos tridimensionais, com o objetivo de gerar um conhecimento que sirva para a compreensão de situações da vida real.

As primeiras técnicas de perspectiva

Surgiram na Itália no século XV, mas desde o século XIII artistas buscavam criar imagens mais fidedignas à realidade, por meio de recursos como cores e posicionamento dos elementos.

Figura 1 - Albrecht Dürer

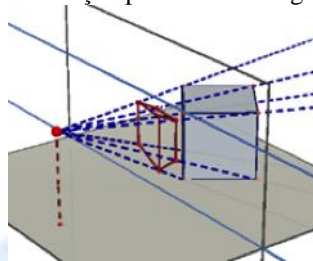


Fonte: <http://venetianred.net/2010/03/06/hans-holbein-tricks-of-the-trade/>

A Figura 1 reproduz a prática utilizada pelo artista alemão Albrecht Dürer (1471-1528) para esboçar a representação de uma imagem na tela; essa prática foi discutida pelos participantes ao analisarem as estratégias de representação contidas em um conjunto de obras de arte de diferentes épocas. Como mostra a Figura 1, o pintor, com a cabeça mantida num apoio fixo, reproduzia a imagem na tela transparente colocada entre ele e a cena a ser pintada.

A Figura 2 nos mostra como podemos reproduzir, com o auxílio do software, a prática das representações feitas com o equipamento de Dürer. Consideramos um cubo apoiado num plano horizontal e sua projeção num plano vertical.

Figura 2 - Representação plana de uma figura no Software

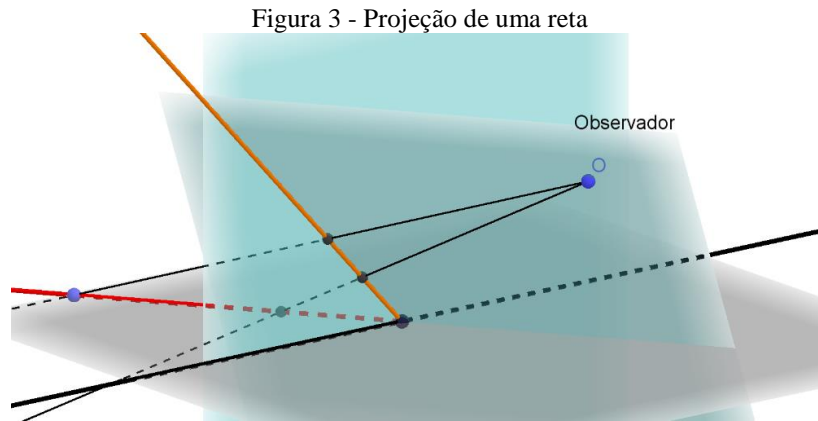


Fonte: Acervo pessoal

A partir de um ponto fixo, o “observador”, traçam-se semirretas com origem nesse ponto, que passam por pontos escolhidos na figura a ser representada; marcam-se os pontos de intersecção dessas semirretas com o plano vertical de projeção, formando a representação plana da figura tridimensional. Na Figura 2, o polígono formado pelos segmentos no plano vertical, denominado “plano de projeção”, representa as partes que o observador vê, por isso mostra apenas três das seis faces do cubo a ser representado, que está apoiado num plano horizontal, que chamaremos “espaço real”, e contido num dos quadrantes determinados por esse plano e pelo plano de projeção. A intersecção dos dois planos é uma reta, denominada “linha de terra” e vamos designá-la por t .

Usamos o software para investigar, com os estudantes, algumas propriedades importantes que ficam evidentes ao realizarmos as projeções de retas paralelas contidas no plano horizontal.

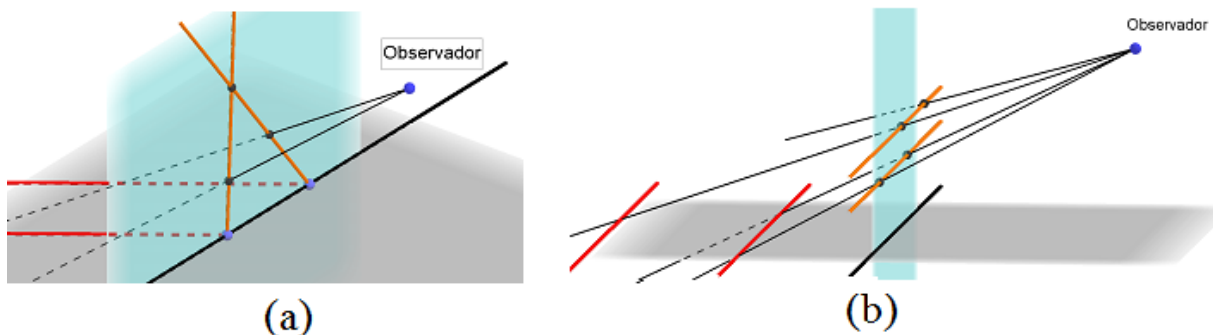
Observamos inicialmente que, fixado o ponto O , que representa o observador, a projeção de uma reta contida no plano horizontal pode ser obtida pelas projeções de dois pontos distintos da reta original, ou ainda como a reta de intersecção do plano determinado por essa reta e o ponto O , que chamamos plano auxiliar de projeção, e o plano vertical de projeção, como na Figura 3. Vale observar que os planos auxiliares de projeção formam um feixe de planos, cuja intersecção é uma reta que passa por O .



Fonte: Acervo pessoal

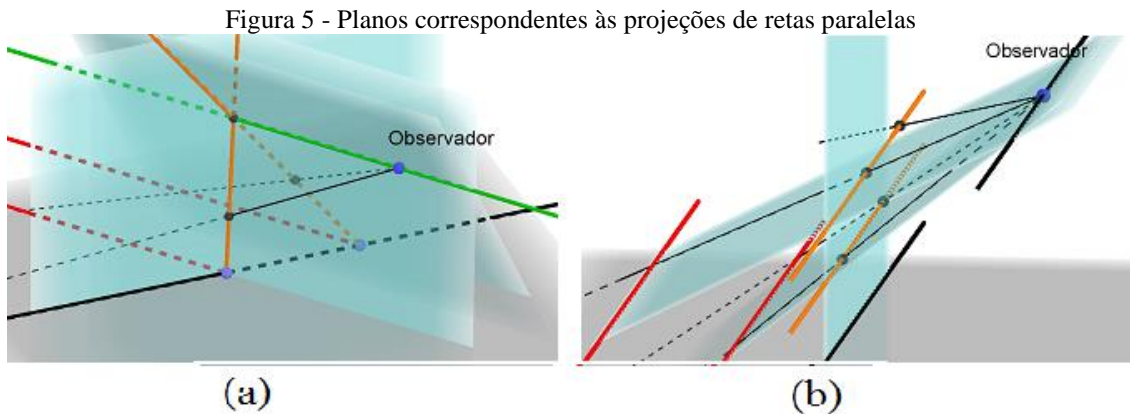
Em seguida, com a dinamicidade do software, pudemos observar que dadas duas retas paralelas no plano real, suas projeções ou são retas concorrentes, se elas interceptam a linha de terra (Figura 4, (a)), ou retas paralelas à linha de terra, como na Figura 4, (b).

Figura 4 - Projeções de retas paralelas



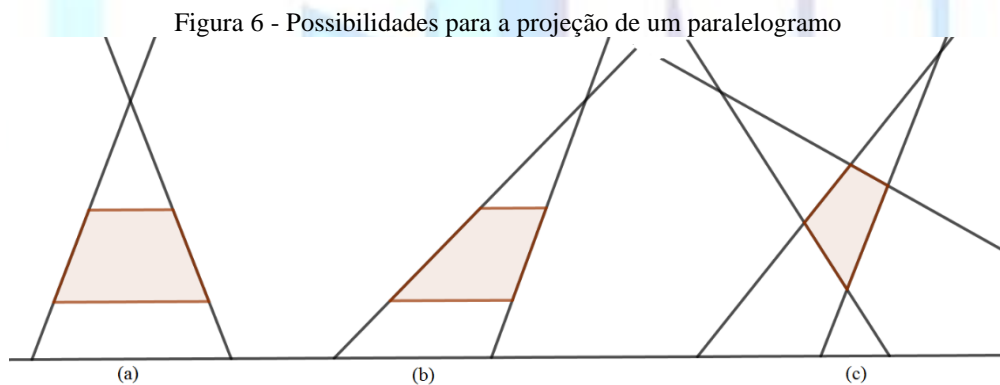
Fonte: Acervo pessoal

O software permitiu a visualização dos planos auxiliares que geram as projeções concorrentes (Figura 5(a)) ou paralelas (Figura 5(b)). No primeiro caso, os planos auxiliares formam um feixe de planos cuja intersecção é uma reta paralela às retas reais e que passa pelo ponto O e o ponto de concorrência das retas projetadas. Esse ponto é o chamado “ponto de fuga”. No segundo caso, os planos formam um feixe cuja intersecção é uma reta que passa por O e é paralela ao plano vertical de projeção. Se as retas originais são perpendiculares à linha de terra, a reta de intersecção dos planos auxiliares será perpendicular ao plano de projeção.



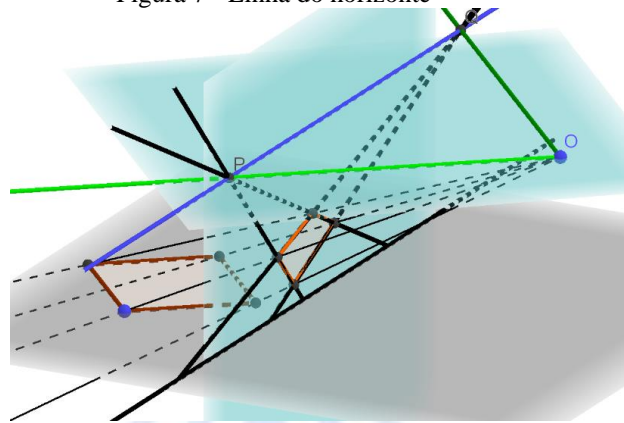
Fonte: Acervo pessoal

Depois de analisar as situações possíveis para a projeção de duas retas paralelas, foram discutidas as possibilidades para a projeção de um paralelogramo (Figura 6). Na Figura 6 (a), temos a projeção de um quadrado com um dos lados paralelos à linha de terra; em (b), a projeção de um paralelogramo com um dos lados paralelos à linha de terra. Em (c), a projeção de um paralelogramo cujos lados não são paralelos à linha de terra. Neste caso, temos duas retas concorrentes no ponto O , cada uma delas paralela à reta suporte dos lados do paralelogramo. Essas retas formam um plano que intercepta o plano de projeção segundo uma reta que passa pelos pontos de fuga P e Q (Figura 7). Essa reta é a chamada “linha do horizonte”.



Fonte: Acervo pessoal

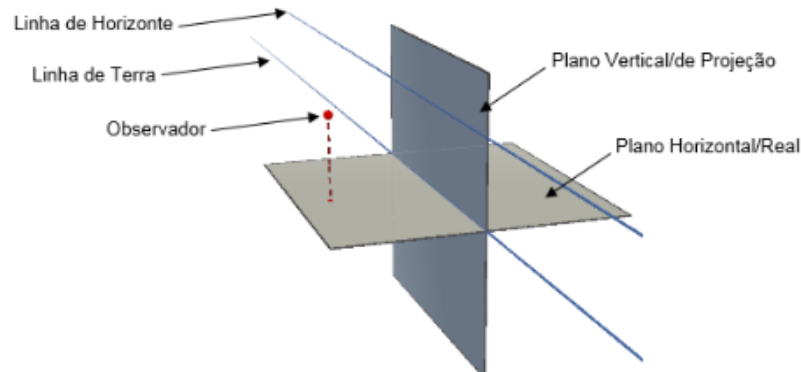
Figura 7 - Linha do horizonte



Fonte: Acervo pessoal

A revisita às práticas do século XV com o auxílio do software permitiu identificar alguns dos elementos fundamentais da representação em perspectiva, que resumimos a seguir. A *linha de terra* é a intersecção do *plano vertical de projeção* com o plano horizontal também chamado *plano real*. Os pontos de intersecção das projeções de retas paralelas, concorrentes com a *linha de terra* são chamados *pontos de fuga*. A reta que passa pelos *pontos de fuga* é chamada *linha do horizonte*, como resumido na Figura 8.

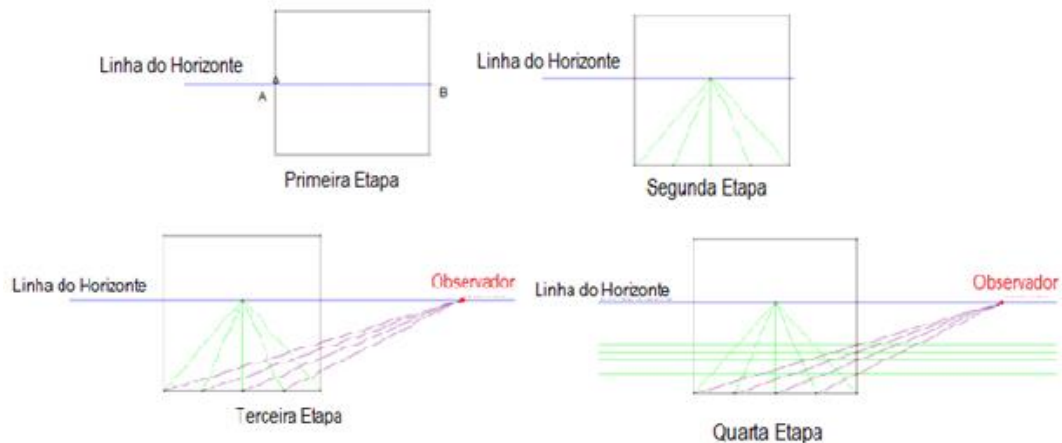
Figura 8 - Elementos da Perspectiva



Fonte: Acervo pessoal

Essa revisita também possibilitou o entendimento das primeiras regras para a representação plana de figuras tridimensionais, que foram descritas como etapas por Leon Battista Alberti (1404 —1472), em sua obra *De Pictura*, traduzida para o inglês como *On Painting* (ALBERTI, 1991). Alberti traz uma explicação simples e direta dessas técnicas, dividindo-as em quatro etapas (Figura 9), que descrevem os recursos usados à época e seguimos esses passos para a representação de um piso quadriculado, cuja base se apoia na *linha de terra*.

Figura 9 - Regras de representação de Alberti



Fonte: Acervo pessoal

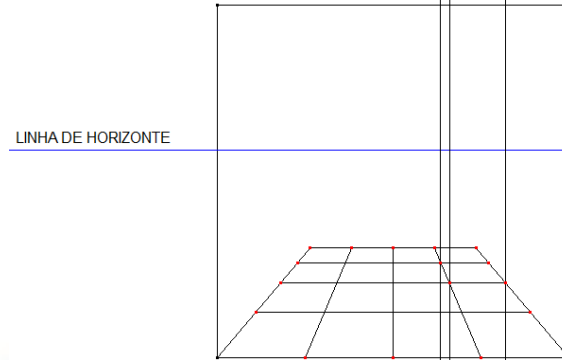
Na primeira etapa, fixa-se a “linha de horizonte”, no caso \overline{AB} , à altura do observador em relação à figura a ser representada e paralela à *linha de terra*. Na segunda, a *linha de terra*, base da figura, é dividida no número de partes que corresponde à quantidade de peças do piso e o ponto médio do segmento \overline{AB} da linha de horizonte é o “ponto de fuga” das retas que são perpendiculares ao plano da figura. São traçados os segmentos que unem os pontos da base da figura ao “ponto de fuga” (ALBERTI, 1991, p. 55) e que irão formar a projeção das linhas do piso que são perpendiculares ao plano de projeção. Na terceira, escolhe-se a posição do observador na linha de horizonte, “ponto de fuga” das retas do piso que são paralelas e traçam-se segmentos de reta entre o observador e os pontos da base da figura, na linha de terra. As intersecções desses segmentos com a linha lateral da tela de pintura servem para o traçado das retas paralelas ao plano da figura e que dão a noção de profundidade das peças do piso na imagem. Na quarta etapa, traçam-se as retas paralelas à linha de terra, definindo o piso da imagem. Com esta técnica, Alberti conseguiu mostrar aos pintores da época como criar a imagem de um piso em perspectiva e com pontos de fuga. Utilizamos também os passos de Alberti para orientar a introdução às técnicas de perspectiva em nossas atividades.

Alberti ressalta, em seu livro, que o método deveria ser compreendido à primeira vista, dada a simplicidade do processo

Expus brevemente o contexto geral e, acredito, de uma forma não totalmente obscura, mas percebo que o conteúdo é tal que, enquanto não posso exigir elogio para eloquência em exposição, o leitor que não entende no primeiro contato, provavelmente nunca irá compreendê-lo não importa quanto tente.” (ALBERTI, 1435, *On Painting* (1991), p. 58-59, Tradução Livre).

Em seguida, explica como criar objetos que possuam a face frontal paralela ao plano da tela, utilizando o piso criado anteriormente, o ponto de fuga utilizado na criação do piso e retas verticais, paralelas às margens laterais da tela de pintura (Figura 10).

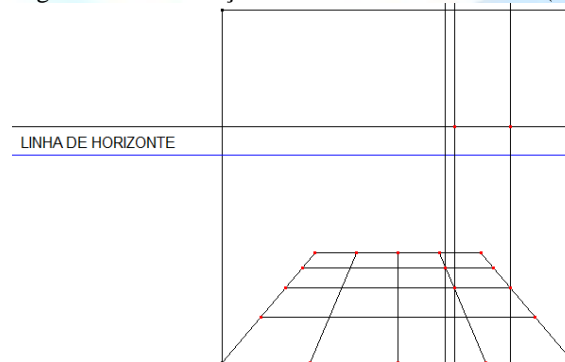
Figura 10 - Construção de uma coluna proposta por Alberti (1)



Fonte: Acervo pessoal

Traçadas essas retas, define-se a altura do objeto a ser desenhado com uma reta paralela à linha de terra (Figura 11).

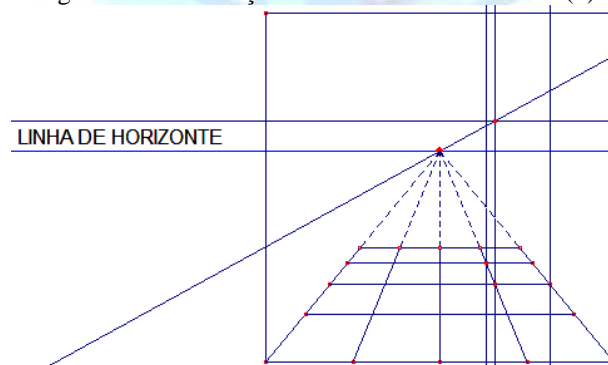
Figura 11 - Construção de uma coluna de Alberti (2)



Fonte: Acervo pessoal

Traça-se uma reta do ponto de fuga, passando pelo ponto de interseção das retas verticais e da reta paralela à linha de terra, formando o topo do objeto (Figura 12).

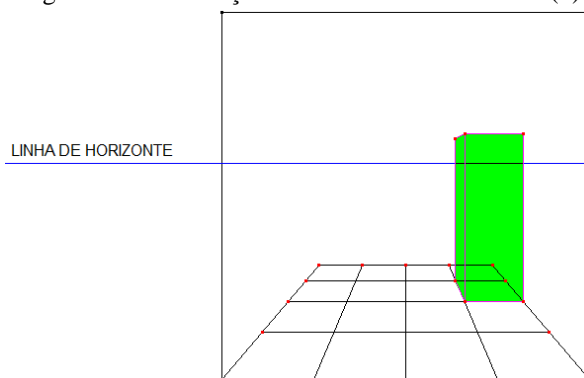
Figura 12 - Construção de uma coluna de Alberti (3)



Fonte: Acervo pessoal

Por fim, desenha-se o objeto desejado, a partir das intersecções das retas traçadas, como vemos na Figura 13.

Figura 13 - Construção de uma coluna de Alberti (4)



Fonte: Acervo pessoal

Com esses passos, Alberti trouxe ao mundo da pintura um conjunto de técnicas que revolucionariam o conceito de arte. Utilizamos, para essa pesquisa, os conceitos de Alberti para mostrar aos alunos a evolução das técnicas de projeção e de perspectiva, desde os aparelhos utilizados para a pintura com noção de profundidade até os conceitos geométricos que surgiram com Brunelleschi e foram aperfeiçoados por Alberti. Com os conhecimentos e técnicas expressos por Alberti, pudemos discutir e reconstruir com o auxílio do software os elementos envolvidos nas etapas detalhadas no livro, para mostrar aos alunos como funciona, na prática, essa criação de um ambiente projetado, e explorar as propriedades geométricas subjacentes a essas etapas.

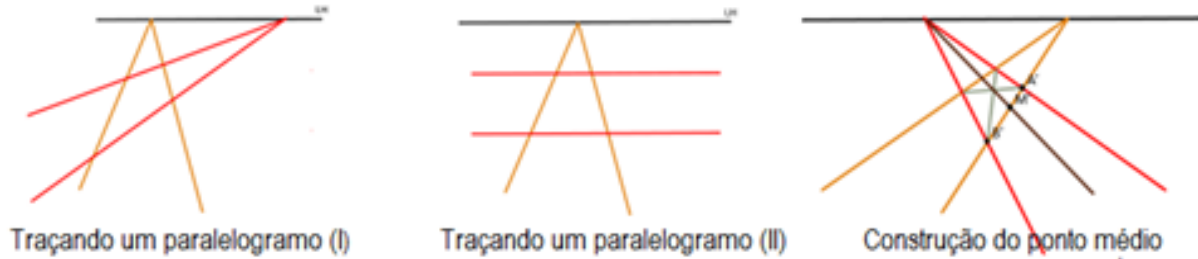
As discussões, ao longo das atividades do primeiro encontro, possibilitaram estabelecer as relações entre o “polo do visto e o polo do sabido” nas representações planas obtidas por meio das construções básicas executadas. Permitiu, também, explicitar as regras de codificação estabelecidas nas representações introdutórias em perspectiva.

Análise dos dados

A apresentação de aspectos históricos relacionados à perspectiva propiciou traçar um paralelo entre o que se vê e o que se sabe, aguçar a percepção dos participantes e verificar se os polos do “visto” e do “sabido” estavam em harmonia; também pudemos observar se estabeleceram a relação figura-percepção, pela percepção de relações espaciais e de posicionamento, como proposto por Gutiérrez. Poucos souberam usar os elementos das imagens para perceber a noção de profundidade e constatamos que esta percepção é mais fácil se a

imagem é construída com base na perspectiva cônica. Ao final do encontro, apresentamos as técnicas de projeção e de perspectiva utilizando a “Linha do Horizonte” e o “Ponto de Fuga”, como base para nossas construções. Mostramos como construir a projeção de um paralelogramo, em duas situações: I. os dois pares de lados opostos não são paralelos à linha de terra (Figura 4 - I); II. um dos pares é paralelo à linha de terra (Figura 4-II).

Figura 14 - Traçando um paralelogramo e o ponto médio das diagonais



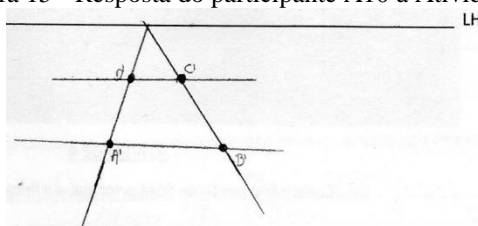
Fonte: Acervo pessoal

Discutimos como encontrar, na representação com lápis e régua, o ponto correspondente ao ponto médio de um dos lados do paralelogramo (Figura 4, à direita), trazendo à tona que a reta que une os pontos médios de lados opostos de um paralelogramo é paralela aos outros dois lados e passa pelo ponto de encontro das diagonais, que se interceptam nos pontos médios. Ainda no segundo encontro, propusemos atividades para trabalharem com essas técnicas, que trazemos no que segue.

ATIVIDADE 1. Um paralelogramo $ABCD$ está situado no plano horizontal. Dada a linha do horizonte (LH), construir sua perspectiva no plano vertical, correspondente à folha de papel; nomear as perspectivas dos pontos A , B , C e D , respectivamente, A' , B' , C' e D' .

Buscamos avaliar se as técnicas de traçado de paralelas e de paralelogramos eram suficientes para que os participantes as reproduzissem e resolvessem o problema proposto, com base em uma das hipóteses de Parzys, de que o conhecimento das técnicas e métodos é de fundamental importância para o aprendizado das representações das figuras. Todos conseguiram reproduzir as construções dos paralelogramos; alguns deles fizeram os dois tipos de paralelogramos vistos durante a discussão. Notamos que as técnicas mais simples são facilmente assimiladas e reproduzidas, permitindo variações, sem perda de informação, como visto na Figura 15.

Figura 15 - Resposta do participante A10 à Atividade 1



Fonte: Acervo pessoal

Nas atividades 1 a 3, buscamos verificar a interferência que as dificuldades conceituais e técnicas descritas por Gutiérrez tiveram nas construções não usuais.

ATIVIDADE 2. A' e B' são dois pontos de uma foto. Construir o ponto médio do segmento $\overline{A'B'}$ sendo dada a linha do horizonte.

LH



Constatamos que alguns haviam esquecido os passos da construção e apenas construíram o paralelogramo de lado $\overline{A'B'}$. Seis dos dez participantes não usaram a intersecção das diagonais para determinar o ponto médio dos lados e algumas respostas mostram que não tinham assimilado a técnica, pois utilizaram o conceito de ponto médio da geometria plana, ou seja, polo do “sabido”, na representação visual, polo do “visto”; quatro dos participantes chegaram à construção completa do ponto médio.

Nas respostas de A3 (Figura 16) e de A10 (Figura 17) temos, respectivamente, uma construção que segue os procedimentos apresentados por nós, com um acréscimo ao polo do “sabido” e uma que se apoia no polo do “visto”, ao marcar o ponto médio de $\overline{A'B'}$. A retomada das mesmas ideias deveria dar suporte à resolução da atividade 3.

Figura 16 - Resposta de A3 à Atividade 2

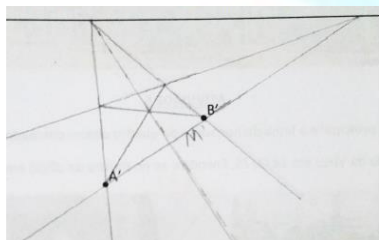
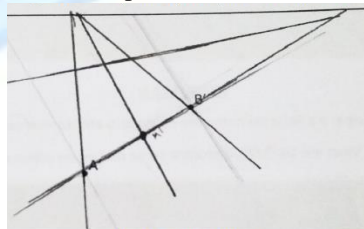


Figura 17 - Resposta de A10 à Atividade 2



Fonte: Acervo pessoal (ambas)

ATIVIDADE 3. As árvores da foto abaixo são equidistantes. Construir a árvore que falta entre 3 e 5.



Na imagem, as árvores atuam como pontos fixos e a linha de horizonte é a reta que divide o céu do deserto, na qual se deve marcar o ponto de fuga de retas paralelas. É importante ressaltar que os participantes tiveram que pensar como usariam uma das técnicas vistas, a partir do que já conheciam sobre pontos médios e análise de padrões. Constatamos que quatro deles apresentaram a solução com o uso correto e completo da técnica em questão, cinco a resolveram utilizando parcialmente a técnica e um não chegou à solução. O enunciado causou dificuldade adicional, pois além de não pedir o uso da técnica diretamente, a Linha de Horizonte fica implícita.

As respostas de A7 (Figura 18) e A1 (Figura 19) mostram a diferença entre entender o uso de uma técnica e entendê-lo parcialmente, com falha na execução.

Figura 18 - Resposta de A7 à Atividade 3

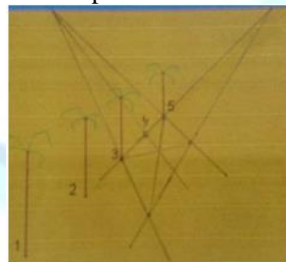
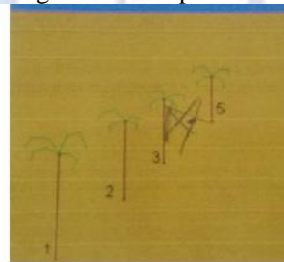


Figura 19 - Resposta de A1 à Atividade 3



Fonte: Acervo pessoal (ambas)

No terceiro encontro, apresentamos e discutimos construções com um software de Geometria Dinâmica 3D, nas quais representamos os planos de projeção e as projeções de elementos do plano horizontal (figuras planas e tridimensionais) destacando a localização de objetos reais e da imagem projetada, das linhas de terra e de horizonte e do observador. Mostramos a projeção de um quadrado e um cubo situado no plano real (Figuras 20 e 21), cujas

construções se dão pelas semirretas do observador aos vértices das figuras e que interceptam o plano de projeção, marcando os vértices das imagens projetadas.

Figura 20 - Projeção de um quadrado

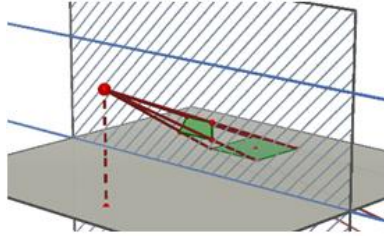
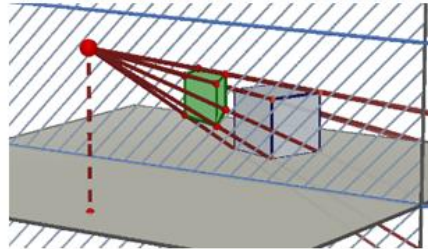


Figura 21 - Projeção de um cubo



Fonte: Acervo pessoal

Na Figura 21, temos uma representação plana de uma figura tridimensional, a partir da projeção dos vértices do cubo “visíveis” pelo observador.

Concluimos a discussão do uso do software, no terceiro encontro, explorando a questão da determinação da posição do observador, conhecida a imagem de um paralelogramo; em seguida, os participantes responderam a um questionário final sobre as atividades desenvolvidas.

O uso do software possibilitou interagir com o ambiente de projeção de modo dinâmico e mostrar como a posição do observador altera a altura da linha de horizonte, o que tornou mais viável a compreensão e o comportamento dos elementos. Os participantes afirmaram que o uso do software despertou o interesse pelo assunto, não somente pela possibilidade de visualizar o que foi discutido nos encontros anteriores, mas também de trabalhar com essas ferramentas, no caso das reconstruções de imagens a partir de suas projeções.

Conclusões

Ficou evidente que o estudo histórico da perspectiva nas obras de arte pode ajudar a entender a importância dela nas representações e que o uso do software para entender e usar as técnicas em outras situações auxilia positivamente no interesse pela Geometria; além disso, atingimos um dos objetivos, que era o de introduzir elementos da geometria projetiva por meio das ideias iniciais da perspectiva e com o suporte da Geometria de Posição.

Assim como Souza (2010) e Bedim (2011), concluimos que a tripla – professor, material, aluno – é essencial para o entendimento das representações, pois o “sabido” do aluno pode não ser suficiente para a compreensão das várias representações. Como Miranda (2006), Kodama (2006) e Meneguzzi (2009), pudemos reconstruir os modelos que interessavam para

explorar propriedades da perspectiva e mostrar aos participantes como isso pode ser feito com papel e lápis ou com um software de geometria dinâmica. Fizemos também a ligação com os modelos de representação estudados por Gutiérrez (1998) e os polos do “visto” e do “sabido”, definidos por Parzysz (1998).

As atividades do segundo encontro deram alguns dos elementos para respondermos a segunda questão de pesquisa “A utilização do software para trabalhar com projeções de figuras facilita o entendimento de tópicos da geometria projetiva?”, pois rerepresentamos as técnicas de representação de retas e de polígonos em um plano vertical de projeção para que, na atividade, com o software, e verificamos que contribuíram para o entendimento de aspectos da geometria projetiva. Os participantes puderam compreender mais claramente como as representações funcionam e como as construções que fizeram seriam representadas em um ambiente tridimensional. Esse encontro foi fundamental para a pesquisa, pois mostrou que o uso do software despertou interesse pelo conteúdo e pelas representações. Ficou claro o que Parzysz (1988) fala sobre a perda de informação nas representações planas de figuras espaciais, pois quando eliminamos essa perda, com o uso do software, aquilo que se vê (“visto”) equipara-se ao que se conhece (“sabido”) e há um ganho no entendimento, pois o software permite que se visualizem as duas representações e deixa de existir a dificuldade de ter que associar mentalmente os dois conceitos, “visto” e “sabido”.

Ressaltamos que é necessária uma pesquisa mais aprofundada sobre a utilização de um software de Geometria Dinâmica, com situações em que os participantes sejam parte fortemente atuante das construções. O uso pleno das ferramentas geométricas do software permite que se possa aplicar o que se conhece, sem depender de habilidades de desenho e se melhore a capacidade de visualização. Acreditamos que situações desse tipo podem aumentar o interesse pela Geometria em alunos de qualquer nível de ensino

Referências

ALBERTI, L. B. **On Painting**. Trad. Cecil Grayson. England: Penguin Classics, 1991. 112 p.

BEDIM, A. A. P. **O ensino de conceitos geométricos no 2º ano do Ensino Fundamental usando a Webquest “Viajando nas Obras de Arte”**. 2011. 172f. Dissertação (Mestrado em Educação) -Faculdade de Ciências e Tecnologia, UNESP, Presidente Prudente, 2011.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros curriculares nacionais: ensino médio**. Brasília, DF, 2015. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acesso em: 23 abr. 2018.

BRASIL. MEC. Secretaria de Ed. Básica. **Base Nacional Comum Curricular**. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=79601-anexo-texto-bncc-reexportado-pdf-2&category_slug=dezembro-2017-pdf&Itemid=30192. Acesso em: 23 abr. 2018

COBB, P. et al. Design Experiments in Educational Research. **Educational Researcher**, v. 32, n. 1, p. 9-13, jan/fev 2003.

GUTIÉRREZ, A. Las representaciones planas de cuerpos 3-dimensionales em la enseñanza de la geometría espacial. **Revista EMA**, Bogotá, v. 3, n. 3, p. 193-220, jul. 1998.

KODAMA, Y. **O estudo da perspectiva cavaleira**: uma experiência no ensino médio. 2006. 192p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Faculdade de Ciências Exatas e Tecnológicas, Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2006.

MENEGUZZI, T. M. **Os perspectógrafos de Dürer na educação matemática**: história, geometria e visualização. 2009. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica) – Centro de Ciências da Educação, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2009.

MIRANDA, S. S. de. **O papel da Geometria Descritiva nos Problemas da Geometria Espacial**: um estudo das secções de um cubo. 2006. 189f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Faculdade de Ciências Exatas e Tecnológicas, Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2006.

PARZYSZ, B. “Knowing” vs “seeing”. Problems of the plane representation of space geometry figures. **Educational Studies in Mathematics**, Netherlands, v.19, n. 1, p. 79-92, fev. 1988.

SOUZA, W. R. S. de. **Representações planas de figuras tridimensionais**: um estudo envolvendo visualização. 2010. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pós-graduação em Educação Matemática, Universidade Bandeirante, São Paulo, 2010.

Submetido em Abril de 2019

Aprovado em Maio de 2019