



Contextualizações de transformações geométricas na Educação Infantil

Contextualizing geometrical transformations for Early Childhood education

Joaquin Giménez¹

Yuly Vanegas²

RESUMEN

En este estudio se busca describir el valor que futuros docentes de educación infantil otorgan a ciertos contextos en la construcción de la noción de transformación. Se analizan las producciones de los participantes a una tarea profesional en la que se pide una mirada reflexiva de dos narrativas de experiencias escolares realizadas con niños de 2 – 8 años sobre transformaciones geométricas. Los resultados muestran un conocimiento débil de las propiedades y definiciones matemáticas de las transformaciones. De los contextos analizados se valora más la motivación que los objetos matemáticos que pueden ser contruidos a partir de ellos. Los futuros docentes tienen dificultades en el reconocimiento de fenómenos adecuados para contextualizar las transformaciones y no consiguen justificar de forma argumentada el valor de las experiencias para fomentar el razonamiento geométrico.

PALABRAS-CLAVE: Formación de profesores, educación Infantil, transformaciones geométricas

RESUMO

Este estudo procura descrever o valor que os futuros professores da educação infantil dão a determinados contextos na construção da noção de transformação. As produções dos participantes são analisadas para uma tarefa profissional em que se requer uma visão reflexiva de duas narrativas de experiências escolares feitas com crianças de 2 a 8 anos sobre transformações geométricas. Os resultados mostram um conhecimento fraco das propriedades e definições matemáticas das transformações. Dos contextos analisados, a motivação é mais valorizada do que os objetos matemáticos que podem ser contruídos a partir deles. Os futuros professores têm dificuldades no reconhecimento de fenômenos adequados para contextualizar as transformações e não justificam o valor das experiências para promover o raciocínio geométrico.

PALAVRAS-CHAVE: Educação Infantil, Transformações geométricas, Formação de professores

¹ Facultad de Educación de la Universitat de Barcelona, Barcelona, España. quimgimenez@ub.edu.

² Facultad de Educación de la Universitat de Barcelona, Barcelona, España. ymvanegas@ub.edu.

ABSTRACT

This study seeks to describe the value that future preschool teachers grant to certain contexts in the construction of the notion of transformation. It is analyzed a professional task in which a reflexive view of two narratives of school experiences is requested carried out with children from 2 - 8 years old about geometric transformation. The results show a weak knowledge of the properties and mathematical definitions of the transformations. From the contexts analyzed, motivation is valued more than mathematical constructed objects. The future teachers have difficulties in the recognition of adequate phenomena to contextualize the transformations and fail to justify the value of the experiences in order to promote the geometric reasoning.

KEYWORDS: Early Childhood Education, Geometric transformations, Prospective Teacher Training

Introducción

Los planteamientos curriculares actuales centrados en el desarrollo de competencias así como diversas investigaciones han señalado la relevancia que tiene el estudio y análisis de contextos en la construcción de significados matemáticos y científicos en diferentes niveles. Autores como, Davis & The Spatial Reasoning Study Group (2015) argumentan que esto es clave el desarrollo del pensamiento geométrico, particularmente cuando se estudian las transformaciones geométricas. Sin embargo, también apuntan que el estudio de estas nociones en edades tempranas no suele tenerse en cuenta.

En el ámbito de la formación de docentes, se considera necesario clarificar la naturaleza de los conocimientos matemáticos y didácticos sobre transformaciones geométricas (GENKINS, 1975) como un paso previo al análisis de las dificultades en la enseñanza y aprendizaje de las mismas. Respecto a la geometría, Espinoza, Barbé y Dinko (2007), señalan que los profesores tienden a postergar su enseñanza debido a la escasa formación matemática y didáctica que tienen sobre dicho tópico. Asimismo, Sarama y Clements (2009, 2011), argumentan que la geometría y los conceptos espaciales a menudo son ignorados o minimizados al inicio de la formación escolar, y esto puede explicarse, por la concepción de los docentes, que suponen que los niños no pueden aprender ciertos contenidos por su complejidad y nivel de abstracción, o porque los docentes tienen dificultades para construir oportunidades de aprendizaje geométrico.

Por otra parte, Canals (1997); Hoffer (1981); Clements & Battista (1992); Battista (2007); Giménez y Vanegas (2007) y Alsina, Novo y Moreno (2016) plantean que es importante potenciar desde las primeras edades procesos cognitivos como la visualización, el razonamiento y la representación de objetos geométricos, para poder llevar a cabo una formación de calidad. En este mismo sentido, Harper (2003) alude a la necesidad que en la

Perspectivas da Educação Matemática – INMA/UFMS – v. 12, n. 28 – Ano 2019

formación de profesores de educación primaria se desarrollen experiencias de geometría informal apoyadas en visualizaciones mediante ordenador. Mientras que Thaqi y Giménez (2014) señalan la relevancia y necesidad de considerar contextualizaciones que impliquen aspectos culturales.

Consideramos por tanto pertinente analizar cómo futuros docentes de educación infantil reconocen el conocimiento matemático asociado a determinados fenómenos, particularmente cómo relacionan diferentes contextos con ciertas nociones geométricas. Asumimos que si los futuros docentes reconocen las características de buenos contextos y las ideas matemáticas que involucran, podrán ser conscientes de su potencial modelizador y, por ende, diseñar actividades ricas y apropiadas para que los niños desarrollen su pensamiento geométrico.

En este estudio buscamos por una parte describir qué ideas matemáticas asocia un grupo de futuros docentes de educación infantil a experiencias escolares desarrolladas y narradas por profesores en ejercicio y por otra, reconocer qué valor se otorga al contexto de dichas experiencias escolares en la construcción de la noción de transformación.

Este texto está organizado en cuatro bloques, esta breve introducción, un segundo bloque en el que se reflexiona sobre qué fenómenos son adecuados para ser asociados a la noción de transformación, un tercero en el que se explican algunos rasgos importantes del estudio exploratorio realizado con futuros docentes de educación infantil y, finalmente, en el cuarto bloque se presentan algunos resultados y las consideraciones finales.

Fenómenos naturales y contextos para trabajar las transformaciones

Desde la educación matemática realista, se considera relevante asociar los fenómenos con las ideas matemáticas que le subyacen (FREUDENTHAL 1983, 1991) Y, esto tal y como lo plantean Alsina, Novo y Moreno (2016) es clave, para identificar y usar buenos contextos en Educación infantil. Contextualizar es importante ya que para desarrollar el pensamiento geométrico es necesario partir inicialmente de la realidad y posteriormente llegar a la abstracción. El trabajo a partir de contextos de la vida cotidiana puede ser un camino adecuado para construir nociones matemáticas con los niños de las primeras edades. Estos contextos pueden motivar a los alumnos; pueden ayudarles a comprender por qué las matemáticas son útiles y necesarias; y pueden contribuir al hecho que los alumnos entiendan de qué forma se usan las matemáticas en la sociedad y en su entorno (REEUWIJK, 1997).

Consideramos tal y como lo propone Heuvel-Panhuizen (2002) que el valor del contexto es ser fuente para la matematización, y que este proceso puede ser entendido como una actividad de búsqueda y de resolución de problemas, pero también como fuente de organización de un tema como proceso de reinención.

En el caso de las transformaciones, diversos fenómenos del mundo real nos evocan la idea de simetría y de proyección. Así, la observación del espacio se constituye en un proceso fundamental a ser desarrollado en Educación Infantil para iniciar y promover la construcción de las ideas matemáticas de los niños. Itacarambi y Berton (2008) señalan la importancia de reconocer las transformaciones en entornos próximos. Asimismo, Veloso, Bastos y Figueirunhas (2009) resaltan la necesidad del uso de materiales manipulativos para estudiar la simetría, la rotación y traslación.

Una mirada a los contextos artísticos puede ser un escenario apropiado para estudiar las características de los objetos y empezar a reconocer las propiedades de las transformaciones. Dos ejemplos concretos de ello son: las banderolas de las Fiestas de San Juan de Volpi, en el que pueden apreciarse diversas simetrías, y las esculturas de Claes Oldenburg donde pueden apreciarse procesos de ampliación o reducción de objetos que mantienen su forma pero cambian de tamaño (Ver figura 1).

Figura 1 - Ejemplos de dibujos de niños inspirados en las obras de Volpi (izquierda). Escultura “La gran barrida” de Oldenburg en el museo de arte de Denver (derecha)



Fuente: los autores

Barbosa (2008) plantea que la contextualización establece un diálogo con las obras de arte facilitando la lectura de imágenes para reconocer transformaciones geométricas. En nuestro caso, en estudios anteriores, hemos usado el contexto artístico para trabajar diferentes nociones geométricas con estudiantes de 11-12 años (BADILLO, GIMÉNEZ, VANEGAS, 2011). Consideramos que sería apropiado usar estos contextos con niños en edades iniciales

para fomentar procesos como la visualización. La mirada a las transformaciones debería iniciarse con una exploración en la que los niños describan qué ven y qué reconocen que se repite en diferentes obras.

Villarroel, Nuño, Anton, Zuazagoitia (2016) muestran que ya antes de los siete años los niños expresan habilidades pictóricas entre las que se encuentra la representación espontánea de simetrías. En el mundo real pueden considerarse relaciones de equilibrio físico y estético, propias de muchos fenómenos naturales como los espejos naturales o la observación de la simetría de los cuerpos de algunos animales o plantas. Dichos fenómenos deberían tener una influencia significativa en los procesos de enseñanza y aprendizaje infantil en donde la exploración de los fenómenos biológicos se asocie con el estudio nociones geométricas que permitan y mejoren su comprensión.

Como ya se ha mencionado un contexto adecuado que permite evidenciar la transformación entre un elemento y su homólogo es el uso de espejos. En estos casos la no inmediatez del fenómeno hace pensar en una idea inicial y final visualmente independientes. En educación infantil esta idea puede combinarse con la introducción de cuentos en donde se deben buscar personajes u objetos, para lo cual pueden usarse herramientas como los espejos (ver Figura 2). La acción de dibujar aquello que se descubre, aquello que se ve, ofrece la oportunidad de *materializar* la transformación.

Figura 2 - Un cuento con espejos (izquierda) y niña dibujando con el espejo mágico (derecha)



Fuente: los autores

En las situaciones cotidianas con espejos, los niños pequeños en general están atentos a la repetición y el cambio, más que en el propio fenómeno (algo que pongo frente al espejo, se ve dentro del espejo; si movemos un brazo, se mueve el brazo también en el espejo, etc.). Pero, debemos ir más allá y usar las posibilidades que ofrece este recurso para trabajar y

plantear otro tipo de preguntas, por ejemplo: ¿Dónde se puede poner el espejo para obtener algo que no vemos? Con este tipo de experiencias no sólo se facilita profundizar en la noción de repetición, sino que se busca el reconocimiento del valor del eje de simetría (WALTER, 1985).

Dos Santos y De Melo (2012) señalan el doblado de papel como otro contexto interesante para evocar la simetría. En esta misma línea Thaqi, Giménez, Aljimi (2015) exponen una experiencia usando doblado de papel en la formación docente. En efecto, doblar con sucesivos ejes paralelos, sirve para visualizar que dada una figura inicial (recortada o dibujada) al desplegar la hoja de papel (que parece un acordeón), permite ver las repeticiones, entre las que unas figuras aparecen al revés, y otras en el mismo sentido. Esto también se muestra en tareas de análisis de movimientos con letras. Sin embargo, debe considerarse el problema de motricidad que subyace a este tipo de actividades cuando lo desarrollamos con niños pequeños. Lo que se suele hacer como actividad en las clases de educación infantil al doblar una hoja, casi siempre por la mitad, para “constatar” si una figura es simétrica, no apoya la mirada sobre las propiedades de esta noción, más aún, sino se realiza con un enfoque exploratorio y acompañado de buenas preguntas.

Un fenómeno asociado a aspectos culturales poco usado en las clases con niños de 3 a 6 años es el uso de rodillos o sellos cilíndricos que utilizaban antiguamente diferentes comunidades indígenas para la pintura corporal o el estampado de textiles. En esta actividad es donde quizás se puede reconocer más claramente un módulo que se repite. Claro está, si se pone en evidencia que lo que aparece es una traslación. En el caso de la simetría, podrá reconocerse solamente si la figura grabada en el rodillo es simétrica.

Figura 3 - Diferentes clases de rodillos / sellos cilíndricos usados por comunidades indígenas colombianas



Fuente: los autores

En el caso del rodillo de la parte izquierda en la Figura 3, se puede reconocer una simetría vertical si se toma y usa el rodillo en forma horizontal. Y se puede observar una simetría horizontal si se utiliza el rodillo en vertical. Pensamos que este es un contexto

interesante, especialmente en Latinoamérica, en donde además de acercarnos al estudio de algunas tradiciones de las comunidades indígenas, podemos analizar sus diseños y la matemática involucrada en ellos.

Una tarea con futuros docentes de Educación Infantil

Siguiendo a Ponte Segurado y Cunha (2003), se propone una tarea profesional para analizar y observar el contenido de dos experiencias escolares que son narradas en formato de artículo. La primera de estas narrativas se trata de un dossier explicativo de una experiencia escolar, la cual es elaborada por una maestra con experiencia de 20 años en educación infantil. En la segunda narrativa la maestra que desarrolla la experiencia comparte el escrito con un investigador en educación matemática.

Se realiza un estudio de caso etnográfico, el cual se centra en el análisis de contenido sobre las producciones escritas de un grupo de futuros docentes. Se sigue una metodología semejante a la usada por Atherton, et al. (2018), en efecto, en este caso se realiza un análisis descriptivo, en donde los investigadores reconocen características de las respuestas dadas por los participantes a una tarea profesional. Este análisis se realiza como un primer paso a un análisis explicativo que se realiza posteriormente y que no se detalla en este artículo.

Desde el punto de vista de la formación, se pretende promover en los futuros maestros su competencia de análisis didáctico, particularmente en los aspectos relacionados con el reconocimiento y análisis de buenas prácticas docentes. Se busca que identifiquen (en las dos narrativas) ideas clave sobre las situaciones de enseñanza y aprendizaje desarrolladas, y que valoren el potencial de las mismas.

Se seleccionaron estas narrativas porque cada una de ellas describe una historia que reconoce una cierta dificultad o desafío de aprendizaje; se evidencian los propósitos de formación de los autores, y se explica cómo se resuelve el desafío inicial. Al ser presentadas en formato de artículo, las narrativas seleccionadas nos permiten “entrar” en una práctica de clase que ha sido analizada y en la que se destaca información importante. Además, las dos experiencias descritas se constituyen en una fuente de aprendizaje de lo que queremos que también en algún momento puedan realizar los futuros docentes en su vida profesional.

Se recogen datos con un grupo de 46 futuros maestros de la asignatura: Matemáticas, Ciencias Experimentales y Educación del Grado de Educación Infantil de la Universitat de

Barcelona. Esta asignatura corresponde al segundo año de formación y es de tipo pluridisciplinar.

El objetivo de la tarea profesional es reconocer el conocimiento matemático especializado de los futuros docentes sobre las transformaciones. Nos interesa identificar si los participantes reconocen el valor del fenómeno asociado a las ideas matemáticas que se presentan al alumnado de Educación Infantil en cada una de las experiencias. Se propone a los futuros docentes leer las dos narrativas con el objetivo de observar su capacidad para reconocer como ciertos contextos y tareas contribuyen al desarrollo de la noción de transformación.

La primera narrativa titulada: *“Aparición espontánea de construcciones simétricas durante el juego libre en Educación Infantil”* (DE CASTRO, 2012) describe una experiencia escolar desarrollada con niños de 2 a 6 años. En esta propuesta a partir de actividades de exploración libre, se estudian situaciones de equilibrio y construcción en las cuales se identifica el reconocimiento intuitivo de la simetría. En efecto, se explica una actividad de construcción con las maderas de Froebel, realizada con grupos de niños organizados en distintas franjas de edades (2 a 3 años, 3 a 4 años, 4 a 5 años y 5 a 6 años). En dicho relato se muestra la evolución de las diferentes actividades escolares y se describen las acciones realizadas por los niños en cada una de ellas.

Figura 4 - Ejemplos de las construcciones realizadas por los niños en la experiencia de la primera narrativa



Fuente: De Castro (2012)

La segunda narrativa denominada: *“Les ombres a l’escola bressol i al parvulari”*, (DOLCI, 1984) describe una experiencia escolar desarrollada con niños de 5-6 años, en la que

se experimenta con sombras (producidas por el sol y una lámpara) y se evoca la noción de transformación homotética o proyección. En esta narrativa se realiza una descripción de lo que ocurre en el proceso y se resaltan las posibilidades prácticas de este tipo de actividades.

Figura 5 - Ejemplos de acciones realizadas por los niños en la experiencia de la segunda narrativa



Fuente: Dolci (1984)

Consideramos que poder observar y estudiar este tipo de narrativas en la formación inicial de docentes de educación infantil es relevante, ya que muestra, como es posible abordar en edades iniciales, situaciones cotidianas en las que se estudian fenómenos del mundo físico y las transformaciones.

Para guiar la reflexión sobre las narrativas, se pide a los futuros docentes responder por parejas, un cuestionario que se estructura en cuatro preguntas fundamentales. A continuación se presentan dichas preguntas:

- Antes de iniciar el análisis de las experiencias escolares, busca qué propiedades matemáticas se asocian a las nociones de simetría y proyección. Posteriormente, identifica cuáles de estas propiedades se trabajan en cada una de las dos experiencias. Justifica tu respuesta con argumentos sólidos.
- ¿Qué fenómenos físico-naturales se ponen en juego en las experiencias descritas en cada uno de los artículos para trabajar con los niños en educación infantil la idea de transformaciones? Explica algún fenómeno que no se mencione en las dos experiencias, y que se podría tener en cuenta para el trabajo con simetría y proyecciones.
- Explica qué aspectos de la contextualización se observan en las tareas desarrolladas en cada una de las experiencias.

- ¿Cómo justificarías a un colega que con estas actividades se promueve el razonamiento geométrico?

Entre las propiedades esperables de ser observadas y/o utilizadas en el caso de la simetría, se encuentra que las simetrías son movimientos inversos (cambian la orientación de las figuras y los movimientos rígidos mantienen las propiedades métricas de las figuras). Nuestra hipótesis es que hay una falta de conexión entre la concepción personal de los futuros docentes acerca de las transformaciones y la concepción institucional, lo que contribuye, tal y como lo plantean Blanco, Godino y Diego-Mantecón (2018), a que no se haga una buena asociación entre el contexto real y el objeto matemático abordado.

Algunos hallazgos de la tarea de formación

A continuación mostramos algunos de los resultados obtenidos en el estudio organizados en base a las preguntas propuestas en la tarea profesional. Se inicia comentando aspectos del contenido y propiedades de las transformaciones reconocidos por los futuros docentes; luego se muestran algunas de las interpretaciones que hacen de los contextos; asimismo se describen elementos clave de las relaciones fenómeno - objeto matemático identificadas; y, finalmente se describen los elementos que los futuros docentes aluden cuando discuten sobre el potencial de razonamiento geométrico de las experiencias.

a) Contenido y propiedades de las transformaciones

Consideramos importante mencionar que los futuros docentes reconocen sus debilidades sobre el conocimiento matemático involucrado en las experiencias. En efecto, algunos de ellos solicitaron explicaciones ante una tarea que consideraron difícil. Inicialmente deciden hacer búsquedas en internet (en páginas como Wikipedia) y en otras fuentes de información para “refrescar” sus ideas matemáticas o buscar las que no conocían. Esto se evidencia en comentarios como el siguiente:

“Tenemos lagunas fuertes en cuanto muchos aspectos de las matemáticas como es el tema de las transformaciones. Nos dimos cuenta de que no sabemos de las propiedades de la simetría. Nunca oímos hablar de homotecia. No entendíamos muchas cosas que leíamos en Internet. Y no sabíamos si estábamos respondiendo bien a algunas preguntas que nos hiciste.

Teníamos claro que las experiencias nos gustaron mucho al leerlas, pero nunca habíamos analizado unas ideas así en Infantil” (Pareja 2).

En algún caso expresaban que se les estaba pidiendo demasiada teoría, y que lo que se hacía estaba lejos de la práctica que ellas veían que se desarrollaba en las escuelas.

Respecto las propiedades de las transformaciones, un 40% de las parejas describen correctamente que la sombra conserva el número de lados de las figuras pero cambia los tamaños. El hecho de utilizar material como los cubos o piezas de madera iguales puede crear simetría casualmente por el simple hecho de que el niño ponga una pieza encima de otra. Los materiales utilizados influyen mucho en el hecho de crear simetría, piezas iguales, bloques de madera, formas simétricas, etc. Otro ejemplo sería una construcción hecha con piezas iguales de madera. En muchas construcciones podemos observar simetría bilateral y rectangular, y eso nos lleva a pensar que no es una simetría casual sino intencionada. En efecto los futuros docentes mencionan: *“Encontramos muchas piezas colocadas respetando la simetría”* o *“hay demasiados elementos respetando la simetría como para considerarla accidental”* (Pareja 2).

Una de las parejas de futuros docentes, es capaz de establecer correspondencias entre las propiedades de la simetría (que encontraron y listaron) y algunos aspectos descritos en las narrativas. Así, en el caso de la narrativa 1 afirman: *“Por ejemplo, cuando los niños juegan de manera libre con los cubos, dividen una figura con un triángulo, cuya base es un cuadrado, formando así dos cuadrados iguales (propiedad 1 de que en la simetría, una línea recta puede dividir las figuras u objetos en dos figuras iguales); en la figura 8, el centro del cuadrado es el centro de la simetría (propiedad 10), y en la misma, podemos ver como el centro de la figura está entre el punto A y A’ (propiedad 4 que dice que el punto O, centro de simetría, está entre el cualquier punto A y su simétrico A’ a la misma distancia. El simétrico de O es el mismo)”* (Pareja 4).

Por otra parte, respecto a la experiencia sobre sombras (narrativa 2) reconocen la propiedad de conservación de la forma. Esto se evidencia en comentarios como: *“Por sí mismos son capaces de reconocer que, acercándose o alejándose del punto de luz (proyector), su sombra cambia de tamaño y por lo tanto las sombras pueden representar proyecciones que no representan la realidad, pueden ver una mano gigante pero en realidad solo es una mano de tamaño normal”* (Pareja 22).

b) Interpretación sobre los contextos

Analizando las explicaciones de los futuros docentes podemos afirmar que mayoritariamente asocian al contexto con el “lugar” en que ocurren las actividades. Hay muy pocas alusiones al contexto como escenario que permite concretizar el objeto matemático. En efecto encontramos expresiones como *“Se realiza en el aula, por lo que ya contextualiza a los niños y las niñas en un espacio conocido y limitado”* (Pareja10). También afirmaciones en la que se interpreta la contextualización como un proceso metodológico de gestión en el aula, por ejemplo, *“En la segunda actividad, no vemos contextualización, sino un proceso de descontextualización y desinformación, ya que en ningún momento el profesor hace un planteamiento de la actividad”* (Pareja11). Alguna pareja alude a que el contexto posibilita el reconocimiento de propiedades. Así, por ejemplo, señalan que *“...los apilamientos horizontales y verticales influyen en las propiedades de simetría. Por ejemplo, en las construcciones de los apilamientos horizontales, la tendencia a añadir piezas iguales a uno y otro lado de una estructura, evoca la igualdad respecto al eje”* (Pareja 13). Confunden los procesos de contextualización y conexión, en efecto, al indagar sobre aspectos del contexto identificados en las experiencias escolares mencionan: *“Se asocian a conectar conocimientos previos con nuevos. De esta manera, pueden ver que no hay separaciones muy grandes en los diversos bloques de contenido”* (Pareja 8). Por otra parte, algunas parejas de futuros docentes, aluden (aunque no de manera directa) que lo interdisciplinar está mediado por los contextos. Esto puede evidenciarse en respuestas del tipo: *“Además, en estas dos experiencias se relacionan situaciones cotidianas, sociales o culturales, con los conocimientos matemáticos”* (Pareja 7). Otros futuros docentes tratan de concretar la matemática que se promueve con dichos contextos: *“aparecen la simetría, la proporción y la geometría”* (Pareja 7). Pero en la mayoría de las explicaciones, no se explicita adecuadamente cómo se trata el significado de estas nociones matemáticas en relación al fenómeno estudiado en cada experiencia. Más bien, se yuxtapone el significado al contexto sin relacionarlos.

c) Relación fenómeno – objeto matemático

Una de las relaciones que identifican los futuros docentes es la que asocia la noción de simetría con el equilibrio, por ejemplo, respecto a la primera narrativa comentan: *“Un fenómeno importante, que aparece claramente en el momento que los alumnos empiezan a realizar construcciones verticales. Llama la atención el hecho de que ellos/as mismos/as,*

coloquen las manos de manera que al quitarlas, no se mueva y por tanto, no se caiga la construcción”

En el caso de la segunda narrativa, identifican que en las experiencias con sombras se trabaja la idea de transformación, por ejemplo dicen, *“En la proyección con las sombras, se trabaja muy significativamente la simetría, porque cada movimiento que realice el niño/a se ve proyectado por la sombra”* (Pareja 1); *“cuando los niños se ponen delante de la luz en la oscuridad, la sombra es la imagen simétrica del niño”* (Pareja 5) y *“los niños ven reflejada exactamente su sombra, y ven la simetría en un plano sagital”* (Pareja 7).

Otros futuros docentes hacen afirmaciones aunque erróneas como consecuencia de no establecer una buena observación del fenómeno físico, veamos por ejemplo la siguiente afirmación: *“En el artículo de las sombras, se puede observar claramente que se trabaja la simetría bilateral, es decir, el reflejo que se produce en una pared, en este caso, cuando los niños se colocan delante y debido a la luz, se reflejan sus sombras en la pared blanca. Por ejemplo, cuando la maestra les dice que toquen la cabeza de su sombra, se produce un movimiento que se refleja inmediatamente en la sombra y en la cual, se trabaja el concepto matemático en el cuerpo humano”* (Pareja 17).

Aunque en momentos de la formación se ha comentado con los futuros docentes sobre las nociones de semejanza y homotecia, al hacer el análisis de las narrativas no llegan a asociar estos objetos matemáticos con el fenómeno sombra. Otra evidencia de este tipo de errores, la encontramos cuando afirman que *“...en el momento que un niño se sitúa delante del proyector y la pared entendemos que el centro de su cuerpo es simétrico con cada extremidad de éste propio tanto en cuerpo real como en la sombra”* (Pareja 8).

Las dificultades para establecer relaciones entre el fenómeno y objeto matemático también se pone de manifiesto cuando se alude a la primera narrativa. Por ejemplo, algunos futuros docentes hablan de proporción donde no la hay, es el caso de la Pareja 5 que afirma: *“A la vez que se trabaja la simetría, también se trabaja la proporción, es decir, en todas las construcciones que se muestran en el artículo, los niños colocan figuras geométricas de diferentes medidas, proporciones, para construir su idea, pero a medida que van creciendo, se dan cuenta que para que haya una proporción, deben de colocar las piezas que sean del mismo tamaño, para que se produzca un equilibrio y su construcción no se caiga”*. Este tipo de comentarios nos hace pensar en la necesidad de experimentar con los futuros docentes las actividades (realizadas con los niños) descritas en las narrativas, para analizar y discutir desde

la propia experiencia las afirmaciones equívocas. También nos hace reflexionar sobre la necesidad de discutir sobre el lenguaje coloquial que se usa a veces al hablar de matemáticas o viceversa.

d) Sobre el potencial de razonamiento geométrico

Cuando se les pide a los futuros docentes que expliquen por qué estas narrativas promueven el desarrollo del razonamiento geométrico, en general se alude a expresiones que evocan la observación de objetos y no se alude a procesos de razonamiento y prueba. Por ejemplo, se afirma: *“con las sombras conseguimos identificar un objeto, reconocerlo entre otros, encontrar diferencias al compararlo con otros objetos, caracterizarlo con rasgos propios, encontrar propiedades, etc.”* (Pareja 11). En otros casos, se realizan aseveraciones pero con argumentos poco relacionados al razonamiento, por ejemplo: *“Además, el análisis, la organización y la sistematización de los conocimientos espaciales da lugar a la geometría, y todo ello se potencia con estas actividades”* (Pareja 15).

Algunos futuros docentes se refieren al valor cognitivo de las tareas, pero, sin hacer énfasis en el razonamiento como se les pedía. En la actividad con sombras, reconocen que el proceso experimental permite no solo identificar el fenómeno, sino que ayuda a los niños a crear un hábito de observación, conocer el mundo que les rodea, familiarizarse con su propio cuerpo e identificar cambios y explicarlos. Ejemplo de ello, son los siguientes comentarios: *“Los niños descubren las sombras de la manera en la que las profesoras se la muestran y la entienden según las actividades que hacen y sus demostraciones”* (Pareja 7) y *“Además, al moverse o ponerse de lado han podido observar un cambio en la forma de su cuerpo en relación a su sombra y ellos mismos han sido capaces de colocarse de manera que su cuerpo pudiese observarse completamente en el papel”* (Pareja 8).

Consideraciones finales

La tarea profesional desarrollada con los futuros docentes aborda un tópico matemático relevante que usualmente no se desarrolla en las etapas iniciales, por ello contar con experiencias que permita reconocer los conocimientos intuitivos que tienen los niños al respecto, resulta fundamental para la planificación e implementación de propuestas de formación escolar centradas a la enseñanza de las transformaciones.

Las narrativas seleccionadas han permitido que se cuente con diferentes tipos de ejemplos para aproximar a los futuros docentes a las comprensiones de los niños sobre diferentes nociones geométricas. Así mismo, el hecho que las experiencias estén basadas en actividades manipulativas y de exploración es importante, ya que presentan un conjunto de actividades ricas que fomentan el desarrollo del razonamiento geométrico e incorporan un enfoque globalizado y competencial, tal y como se propone en los currículos actuales. Lo cual consideramos es fundamental para la formación inicial de docentes.

La tarea profesional ha permitido a los futuros docentes advertir que en la observación y análisis de fenómenos cotidianos se pueden reconocer aspectos clave para el estudio de nociones matemáticas. Sin embargo, tal y como se ha mostrado en el apartado anterior, los futuros maestros tienen dificultades para establecer relaciones adecuadas entre acciones concretas de las experiencias escolares y argumentos o razonamientos de tipo geométrico. Por ejemplo, los participantes del estudio no perciben en la segunda narrativa, que la acción de alejarse o acercarse a la pared para ver qué ocurre con la sombra, está evocando una propiedad de la transformación. Tampoco interpretan que en la primera narrativa cuando un alumno en el juego de construcción pone piezas (de iguales características) a un lado y otro, está exhibiendo su intuición sobre la relación simetría y equilibrio, en donde asume que para que éste último se mantenga, es necesario ubicar piezas iguales a los dos lados de un eje (inmaterial).

En las producciones de los futuros docentes podemos ver que cuando aluden a los elementos matemáticos involucrados en las narrativas, en varios casos, usan un léxico y terminología erróneos, algunos de estos usos están influenciados por las búsquedas que realizan de términos en diccionarios y no en libros de matemáticas o didáctica de las matemáticas. Esto también nos lleva a pensar en la necesidad de discutir con nuestros estudiantes acerca de la pertinencia de las fuentes, ya que aunque se sugieren autores y textos a lo largo de la asignatura, ellos prefieren hacer otras consultas para resolver de forma más “inmediata” sus dudas.

De las dos narrativas analizadas los futuros docentes reconocen el valor de las propuestas didácticas desarrolladas en cada caso. Sin embargo, no logran distinguir el nivel de profundidad en la reflexión en cada una de ellas. En muy pocos casos aluden a que una de las narrativas es más descriptiva y que la otra además de explicar la experiencia hace análisis y reflexión de lo ocurrido.

Los resultados encontrados reafirman nuestra idea que es clave en la formación inicial que los futuros maestros de educación infantil conozcan experiencias y actividades geométricas interesantes. Asimismo deben tener la posibilidad de contar con ejemplos de buenos análisis de la clase, realizados por maestras investigadoras que reflexionan sobre su propia práctica. Está claro que si queremos superar la idea limitada de considerar que la importancia de un contexto radica solamente en su efecto motivador, debemos hacer un énfasis especial en esta noción y dedicar mayor tiempo a discutir y profundizar lo que implica el proceso de contextualización y cómo puede abordarse en la clase desde las primeras edades.

Agradecimientos

Este trabajo se ha desarrollado en el marco de los proyectos: EDU2015-65378-P / EDU2015-64646-P, del Ministerio de Economía y Competitividad y SGR2017-101/SGR2017-1181, de la Generalitat de Catalunya.

Referencias

ATHERTON H.; BRANT H.; ZIEBLAND S.; ET AL. The potential of alternatives to face-to-face consultation in general practice, and the impact on different patient groups: a mixed-methods case study. **Health Services and Delivery Research**, 6 (20), 2018.

ALSINA, A.; NOVO, M. L.; MORENO, A. Redescubriendo el entorno con ojos matemáticos: Aprendizaje realista de la geometría en Educación Infantil. **Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia**, 5(1), p. 1-20, 2016.

BADILLO, E.; GIMÉNEZ, J.; VANEGAS, Y. Desarrollo de competencias en un contexto artístico: construyendo significados sobre la forma. **El desarrollo de competencias en las clases de ciencias y matemáticas**. Mérida: Fondo Editorial Mario Briceño Iragorry. Universidad de los Andes, 2011, p. 331-367.

BARBOSA, A. M. Interterritorialidade na arte-educação e na arte. In: BARBOSA, A. M.; AMARAL, L. (Org.) **Interterritorialidade: mídias, contextos e educação**. São Paulo: Senac, 2008. p. 23-43.

BATTISTA, M. (2007). The Development of Geometric and Spatial Thinking. In F. K. Lester (Ed.) **Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning**. Charlotte, NC: Information Age, 2007, p. 843-908.

BLANCO, T.; GODINO, J.; DIEGO-MANTECON, J. Análisis epistémico y cognitivo de una tarea de visualización en el espacio bidimensional. **REDIMAT – Journal of Research in Mathematics Education**, 7(2), p. 251-279, 2018.

- CANALS, M. A. Geometría en las primeras edades escolares. **Suma: Revista para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas**, 25, p. 31-44, 1997.
- CLEMENTS, D.; BATTISTA, M. (1992). Geometry and spatial reasoning. In D. A. Grouws (Ed.), **Handbook of research on mathematics teaching and learning**, New York: Macmillan, 1992. p. 420-464.
- CLEMENTS, D. H.; SARAMA, J. Early childhood teacher education: the case of geometry. **Journal of mathematics teacher education**, 14(2), p.133-148, 2011.
- DAVIS, B.; SPATIAL REASONING STUDY GROUP **Spatial reasoning in the early years: Principles, assertions, and speculations**. Routledge, 2015.
- DE CASTRO, C. Aparición espontánea de construcciones simétricas durante el juego libre en Educación Infantil. **Epsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"**, 82, p. 23-40, 2012.
- DOLCI, M. Les ombres a l'escola bressol i al parvulari. **Revista In-fàn-ci-a**, 19, p. 4-12, 1984.
- DOS SANTOS, L. F.; DE MELO TELES, R. A. (2012). Pintar, Dobrar, Recortar e Desenhar: o ensino da Simetria e Artes Visuais em livros didáticos de matemática para os anos iniciais do Ensino Fundamental. **Bolema-Boletim de Educação Matemática**, 26 (42A), p. 291-310, 2012.
- ESPINOZA, L.; BARBÉ, J.; MITROVICH, D.; ROJAS, D. El problema de la enseñanza de la geometría en la educación general básica chilena y una propuesta para su enseñanza en el aula. In: **II Congreso Internacional sobre la Teoría Antropológica de lo Didáctico**. Francia: Uzès, 2007.
- FAINGUELERNT, E. K. ; NUNES, K. R. **Fazendo arte com a matemática**. Porto Alegre, Brasil: Artmed, 2006.
- FREUDENTHAL, H. **Didactical phenomenology of mathematical structures**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1983.
- FREUDENTHAL, H. **Revisiting mathematics education**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991.
- GENKINS, E. F. The concept of bilateral symmetry in young children. In M. F. Roskopf (Ed.), **Children's mathematical concepts: Six Piagetian studies in mathematics education** New York: Teachers College Press, 1975. p. 5-43.
- GIMÉNEZ, J.; VANEGAS, Y. Vivir el espacio fomentando competencias geométricas. **Novedades Educativas**, Buenos Aires, 195, p. 41-47, 2007.
- HARPER, J. Enhancing elementary pre-service teachers' knowledge of geometric transformations through the use of dynamic geometry computer software. In C. Crawford et

al. (Eds.), **Proceedings of Society for Information Technology & Teacher Education International Conference**, Chesapeake, 2003.

HEUVEL-PANHUIZEN, M. Realistic mathematics education as work in progress. En Fou-La. i Lin (Eds.). **Common sense in mathematics education. Proceedings of The Netherlands and Taiwan Conference on Mathematics Education** Taiwan: National Taiwan Normal University, 2002, p. 1-43.

HOFFER, A. Geometry is more than proof. **Mathematics Teacher Journal**, 74, p. 11-18, 1981.

ITACARAMBI, R.; BERTON, I. **Geometria, brincadeira e jogos: 1º ciclo do ensino fundamental**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2008.

PONTE, J. P.; SEGURADO, M. I.; OLIVEIRA, H. A collaborative project using narratives: What happens when pupils work on mathematical investigations? In A. Peter-Koop, V. Santos-Wagner, C. Breen, & A. Begg (Eds.), **Collaboration in teacher education: Examples from the context of mathematics education**. Dordrecht: Kluwer, 2003, p. 85-97.

REEUVIJK, M. V. Las matemáticas en la vida cotidiana y la vida cotidiana en las matemáticas. **UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas**, 12, p. 9-16, 1997.

SARAMA, J.; CLEMENTS, D. **Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for young children**. New York: Routledge, 2009.

THAQUI, X.; GIMÉNEZ, J. Trayectorias Iniciales de Formación de Profesores. El caso de las Transformaciones Geométricas. **REDIMAT-Journal of Research in Mathematics Education**, 3(3), p. 253-275, 2014.

THAQUI, X.; GIMENEZ, J.; ALJIMI, E. The meaning of isometries as function of a set of points and the process of understanding of geometric transformation. K. Krainer; N. Vondrová. **Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for research in Mathematics Education - CERME 9**, Prague, Czech Republic. 2015, p.591-597.

THAQUI, X. **Aprender a ensinar transformaciones geométricas en Primaria desde una perspectiva cultural**. Tesis Doctoral inédita, Universidad de Barcelona. Barcelona, 2009.

VELOSO, E.; BASTOS, R.; FIGUEIRINHAS, S. Isometrias e simetria com materiais manipuláveis. **Educação e Matemática**, Lisboa: APM, n. 101, p. 23-28, 2009.

VILLARROEL, J. D.; NUÑO, T.; ANTON, A.; ZUAZAGOITIA, D. Un estudio en torno a comprensión infantil del mundo vegetal a través de sus dibujos. **Ensayos: Revista de la Facultad de Educación de Albacete**, 31 (2), p. 153-168, 2016.

WALTER, M. **The mirror puzzle book**. Tarquin, 1985.

Submetido em Abril de 2019

Aprovado em Maio de 2019