



## **A Geometria Espacial no Ensino Médio: contribuições da utilização de uma Unidade de Ensino e Aprendizagem (UEA)**

### **Spatial Geometry in High School: contributions of the use of a Teaching and Learning Unit (UEA)**

Danielle dos Santos Rodrigues<sup>1</sup>

Carmen Teresa Kaiber<sup>2</sup>

#### **RESUMO**

O presente artigo destaca uma pesquisa realizada junto a estudantes do Ensino Médio que teve por objetivo investigar contribuições da utilização de uma Unidade de Ensino e Aprendizagem, com recurso às tecnologias digitais, para o desenvolvimento de conceitos da Geometria Espacial. A investigação, de base qualitativa, tomou como referência o modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico de Van Hiele. Resultados apontam que o recurso às tecnologias digitais, particularmente a utilização do *software* GeoGebra, possibilitou a visualização, construção e movimentação de diferentes objetos geométricos permitindo identificar propriedades, analisar, conjecturar e propor soluções. A análise permitiu perceber um avanço dos estudantes do nível de visualização para o nível de análise e indícios da transição desse nível para o de dedução informal.

**PALAVRAS-CHAVE:** Geometria Espacial, Modelo de Van Hiele, Tecnologias Digitais, Software GeoGebra.

#### **ABSTRACT**

This article presents a research carried out with high school students that aimed to investigate contributions of the use of a Teaching and Learning Unit through digital technologies for the development of spatial geometry concepts. Based on a qualitative approach, the study took as reference the Van Hiele model of development of geometric thinking. The results show that the use of digital technologies, especially of GeoGebra software, enabled the visualisation, construction and movement of different geometric objects, helping students to identify properties, analyse, conjecture and propose solutions. The analysis made it possible to perceive students' progress from the level of visualisation to the level of analysis, and indications of the transition from the level of analysis to the level of informal deduction.

**KEYWORDS:** Spatial Geometry, Van Hiele Model, Digital Technologies, GeoGebra Software.

---

<sup>1</sup> Universidade Luterana do Brasil - ULBRA. danielle\_santosrodrigues@hotmail.com.

<sup>2</sup> Universidade Luterana do Brasil - ULBRA. carmen\_kaiber@hotmail.com.

## Introdução

O ensino da Geometria nas escolas brasileiras, em todos os níveis, passou por diferentes fases nas últimas décadas, de acordo com Pires (2008). A autora destaca três marcos curriculares que influenciaram a organização dos currículos no que se refere à Geometria: o chamado Movimento Matemática Moderna (1965 a 1980), o estabelecimento de diretrizes que buscavam contrapor-se ao Movimento Matemática Moderna, liderado por Secretarias Estaduais e Municipais de Educação (1980 a 1994) e, por fim, o projeto nacional de reforma curricular que se refere aos Parâmetros Curriculares Nacionais (a partir de 1995). Porém, considera-se que, atualmente, as discussões em torno da constituição da Base Nacional Comum Curricular – BNCC inauguram um novo período de reflexões sobre o currículo escolar de modo geral e, particularmente, em relação à Geometria.

A Base Nacional Comum Curricular - BNCC (BRASIL, 2018), assim como já era destacado nos Parâmetros Curriculares (BRASIL, 1998), aponta para a importância de os conceitos geométricos constituírem o currículo de Matemática, uma vez que o desenvolvimento do pensamento geométrico propicia ao estudante um tipo de visão e entendimento que lhe permite compreender, de forma organizada, o mundo em que vive. Ainda, de acordo com o documento, os estudantes da Educação Básica devem saber fazer e validar conjecturas, recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades, que ajudem a estruturar o pensamento e o raciocínio indutivo e dedutivo, o que pode ser potencializado a partir do desenvolvimento dos conceitos geométricos e da aplicação dos mesmos na resolução de situações problema. Assim, a Geometria desenvolvida ao longo do Ensino Fundamental pode e deve ser retomada no Ensino Médio, uma vez que as habilidades previstas para o Ensino Médio “[...] irão aprofundar e ampliar as habilidades propostas no Ensino Fundamental” (BRASIL, 2018, p. 522).

Apesar da destacada importância da Geometria na Educação Básica, pesquisas como as de Pavanello (1993), Pereira (2001), Lorenzato (2006) e Barbosa (2011) apontam para uma quase ausência do processo de ensino e aprendizagem da Geometria na Educação Básica. Os autores discutem sobre a questão, especialmente buscando identificar as causas que têm levado a presença limitada da Geometria nas salas de aula. Tais causas estão em parte relacionadas, de acordo com os autores, à influência do chamado Movimento Matemática Moderna e do entendimento de que os próprios professores de Matemática têm dificuldades

sobre o tema. Barbosa (2011) pondera que o professor, muitas vezes, não trabalha Geometria em sala de aula porque possui dificuldades com o conteúdo, posto que, talvez, não tenha se apropriado do mesmo, adequadamente, durante a sua formação. Lorenzato (2006) já destacava a existência de um círculo vicioso apontando que a geração que não estudou Geometria não sabe como ensiná-la.

Por outro lado, há um movimento crescente de se investigar, discutir e refletir sobre a Geometria a ser trabalhada na escola, e como o seu ensino pode ser conduzido. Andrade e Nacarato (2004), a partir de pesquisa realizada nos anais do Encontro Nacional de Educação Matemática no período de 1987 a 2001, apresentam como tendências emergentes nas investigações um trabalho que envolva a Geometria em uma perspectiva experimental, bem como desenvolvida em ambientes computacionais, o que foi corroborado pela pesquisa realizada por Petry (2013), a partir de uma análise similar, embora com metodologia distinta, no período de 2004-2010.

Nesse contexto, concorda-se com Valente (1999), quando afirma que o chamado ensino tradicional não vem produzindo resultados satisfatórios, principalmente por não adequar métodos de ensino à realidade do cotidiano do aluno e, nesse contexto, considera-se que o recurso à tecnologia pode criar possibilidades para o trabalho com a Matemática, particularmente com a Geometria, que não se apresenta em outros ambientes. Todas essas questões, discussões, reflexões e indagações sobre o ensino e aprendizagem da Geometria na Educação Básica levaram a traçar a questão que moveu a investigação aqui apresentada, a qual se refere a identificar possibilidades da utilização de tecnologias digitais nas aulas de Matemática e suas contribuições para o ensino e aprendizagem da Geometria Espacial no Ensino Médio.

Assim, esse artigo apresenta resultados de uma pesquisa realizada no âmbito de uma dissertação de mestrado, que teve por objetivo investigar as possíveis contribuições do uso de uma Unidade de Ensino e Aprendizagem (UEA), com recurso às tecnologias digitais, no desenvolvimento de conceitos de Geometria Espacial junto à um grupo de estudantes do terceiro ano do Ensino Médio. Trata-se de uma ampliação do artigo “Contribuições de uma Unidade de Ensino e Aprendizagem (UEA) para o ensino de Geometria Espacial” apresentado no VII Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEM), no ano de 2018, em Foz do Iguaçu no Paraná.

## Tecnologias Digitais e o Ensino da Geometria

Nos últimos anos a utilização de tecnologias digitais na Educação Matemática tem influenciado pesquisas relativas ao desenvolvimento do pensamento geométrico dos estudantes, bem como a postura e ação dos professores. Kaiber, Vecchia e Scapin (2010) destacam que a exploração de recursos computacionais se faz necessária para que a educação cumpra seu papel, em um contexto que a tecnologia se mostra cada vez mais presente. Os autores se mostram favoráveis à utilização destes recursos por proporcionarem aos estudantes interação com um espaço de aprendizagem diferenciado, com acesso a diferentes mídias como *softwares*, vídeos, objetos de aprendizagem, *chats*, os quais, como já apontado, não se apresentam em outros ambientes.

Sobre o uso de tecnologias digitais e, particularmente, no que se refere aos chamados *softwares* de geometria dinâmica, Zulatto (2002) e Fernandes (2008) já destacavam que o uso de tais ferramentas fomenta o espírito de investigação, possibilitando aos estudantes explorar e manipular objetos se constituindo em um ambiente dinâmico, o qual favorece situações de aprendizagem.

Segundo Pinto (2016), os *softwares* de geometria dinâmica permitem potencializar a aprendizagem, pois por meio das construções geométricas, os estudantes têm a possibilidade de materializar visualmente os conceitos. Nessa mesma linha de pensamento Fainguelernt (1999) já afirmava que a utilização do computador propicia ao estudante simulações de situações, construções de procedimentos, além de possibilitar análise dos erros cometidos, correções, retomadas e adequações.

Concordando-se com os autores, pondera-se que estes *softwares* apresentam recursos com os quais os alunos podem realizar construções geométricas, que são feitas usualmente com régua e compasso, aliadas à movimentação, o que abre possibilidades de lançar diferentes olhares para o mesmo objeto, experimentar, conjecturar, lançar hipóteses e testá-las, manipulando os objetos buscando extrair características, propriedades e relações. Além disso, é possível realizar construções que com uma mídia tradicional, por vezes, seria complexo.

Assim, com o objetivo de apresentar aos estudantes, a possibilidade de construir objetos geométricos sob diferentes perspectivas e formas de representação, modificando e transformando os mesmos, permitindo, também, acompanhar visualmente as alterações

realizadas, o *software* GeoGebra foi escolhido para o trabalho a ser desenvolvido na investigação.

Porém, entende-se que proporcionar um ambiente favorável à construção do pensamento geométrico ao longo da trajetória escolar não está somente atrelada a utilização de recursos para manipulação e experimentação com a utilização de tecnologias digitais ou outras. É necessária uma perspectiva de desenvolvimento curricular que incorpore uma tomada de decisão sobre porque ensinar Geometria, o que ensinar e como ensinar considerando a natureza dos objetos geométricos e as especificidades do desenvolvimento do pensamento geométrico. Nesse sentido encontra-se no modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico de Van Hiele possibilidades de articulação do que ensinar e como ensinar Geometria motivo pelo qual se passa a destacar aspectos desse modelo.

### **Modelo de Van Hiele e o Desenvolvimento da Geometria Espacial**

O modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico de Van Hiele foi desenvolvido pelo casal Dina van Hiele-Geldof e Pierre van Hiele, na Holanda, em 1957 (CROWLEY, 1994), e tomou-se tal modelo como referência para o trabalho com a Geometria Espacial desenvolvido na investigação aqui apresentada. Assim, se coloca em destaque aspectos do modelo tentando estabelecer ou apontar características dos níveis do pensamento geométrico a serem desenvolvidos no âmbito do pensamento geométrico espacial. Já as propriedades e fases de aprendizagem do modelo, foram tomadas tais como estão postas no modelo de van Hiele, pois, entende-se, são orientações que podem ser utilizadas para o ensino de temas diversos.

No que segue, apresentam-se no quadro da Figura 1, os níveis preconizados pelo modelo de van Hiele, tendo como referência a Geometria Espacial a ser trabalhada no Ensino Médio. Tal adequação foi realizada tomando como referência os níveis de van Hiele apresentados em Crowley (1994) e habilidades descritas em Hoffer (1981), a saber: habilidades visual, verbal, gráfica, lógica e de aplicação.

Figura 1 - Geometria Espacial na perspectiva dos níveis de compreensão do modelo de van Hiele

<b>Nível/Descritor</b>	<b>Pensamento Geométrico Espacial/Habilidades</b>
<p style="text-align: center;"><b>Visualização</b></p> <p>Percepção de espaço como algo que existe no entorno; conceitos geométricos vistos como entidades totais, e não como entidades que têm componentes ou atributos; identificação de formas específicas e sua reprodução; aprendizagem de um vocabulário básico.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Identifica figuras geométricas espaciais em objetos ou construções do seu entorno e em representações.               <ul style="list-style-type: none"> <li>• Identifica figuras geométricas no espaço e planificadas.</li> <li>• Constrói sólidos geométricos em cartolina, canudinhos, ou outros materiais.</li> </ul> </li> <li>• Descreve figuras geométricas utilizando linguagem não padronizada (um cubo parece uma caixa), por exemplo.</li> </ul>
<p style="text-align: center;"><b>Análise</b></p> <p>A partir da observação e experimentação os alunos começam a perceber características das figuras geométricas e a identificar as propriedades; reconhecem as figuras por suas partes. Todavia, neste nível, os estudantes ainda não conseguem explicar as relações entre propriedades, e fazer a inclusão de classes.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Identifica, classifica e compara os sólidos segundo suas características e propriedades.</li> <li>• Identifica e desenha um sólido no espaço, a partir de uma descrição oral ou escrita de suas propriedades.               <ul style="list-style-type: none"> <li>• Identifica o sólido de diferentes vistas.</li> <li>• Faz deduções superficiais a partir de exemplos.</li> <li>• Utiliza vocabulários e símbolos apropriados.</li> </ul> </li> <li>• Resolve problemas geométricos que requeiram o conhecimento das propriedades dos sólidos no espaço e das relações geométricas.</li> </ul>
<p style="text-align: center;"><b>Dedução Informal</b></p> <p>Conseguem fazer inter-relações de propriedades entre diferentes figuras; são capazes de deduzir propriedades e reconhecer classes de figuras; fazem inclusão de classes, compreendem o significado das definições; acompanham uma prova informal, mas não tem condições de fazê-la.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Demonstra compreensão do significado do conceito, definições, propriedades, características de cada figura geométrica espacial.</li> <li>• Desenvolve e usa definições para descrever os sólidos.               <ul style="list-style-type: none"> <li>• Faz inclusão de classes.</li> <li>• Apresenta argumentos informais, a partir de construções de sólidos ou desenhos.</li> </ul> </li> <li>• Resolve problemas considerando as propriedades e inter-relações entre as figuras.</li> <li>• Identifica informações implícitas em determinado sólido espacial ou em alguma informação.</li> </ul>
<p style="text-align: center;"><b>Dedução Formal</b></p> <p>Conseguem deduzir novas informações a partir de informações dadas; fazem provas formais; tem domínio do processo dedutivo; fazem inter-relações entre axiomas, postulados, definições, teoremas e demonstrações; são capazes de construir demonstrações de diferentes formas.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Identifica o que é dado e o que deve ser provado em uma situação ou problema.</li> <li>• Prova as relações desenvolvidas no nível anterior (Dedução Informal).               <ul style="list-style-type: none"> <li>• Utiliza diferentes técnicas de demonstração.</li> <li>• Compara diferentes demonstrações utilizando argumentação de uma para realizar outra.</li> </ul> </li> </ul>
<p style="text-align: center;"><b>Rigor</b></p> <p>Conseguem compreender e utilizar diferentes sistemas axiomáticos, assim como, compreender a Geometria não euclidiana.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Faz provas formais.</li> <li>• Comparação de sistemas baseados em diferentes axiomas.</li> <li>• Neste nível as geometrias não euclidianas são compreendidas.</li> </ul>

Fonte: Rodrigues; Kaiber (2017).

Com base nos descritores e habilidades indicados nos níveis do modelo adaptado, foram desenvolvidas as atividades para a Unidade de Ensino e Aprendizagem proposta na investigação. Tais descritores e habilidades também foram utilizados para a elaboração dos instrumentos de pesquisa, bem como, referência para as análises realizadas.

Destaca-se que as atividades elaboradas na UEA não foram além do nível de dedução informal do modelo, porém, as habilidades propostas por Hoffer (1981) foram enfatizadas sempre que possível. No âmbito do modelo de Van Hiele além dos níveis, as fases de aprendizagem também foram consideradas no planejamento do trabalho desenvolvido junto aos estudantes.

### **Aspectos Metodológicos**

A pesquisa aqui apresentada é de base qualitativa, porém a utilização de dados quantitativos permitiu destacar aspectos os quais trouxeram elementos importantes à análise. Foi desenvolvida junto a um grupo de quarenta estudantes do terceiro ano do Ensino Médio da Escola Estadual Marechal Rondon<sup>3</sup>, localizada no município de Canoas, Rio Grande do Sul, no primeiro semestre do ano de 2017. O grupo participante da investigação foi constituído de 60% de estudantes do gênero feminino e 40%, do masculino. A idade variava entre 15 e 18 anos, sendo que 85% dos estudantes tinham entre 16 e 17 anos.

A investigação foi organizada em três etapas. Na primeira, estruturou-se a UEA, constituída por um conjunto de atividades a serem desenvolvida em sala de aula, com forte recurso às tecnologias digitais. A unidade foi organizada em três eixos: Geometria de Posição, Noções Primitivas e Conhecimentos Básicos, Poliedros: Prisma e Pirâmide.

Nessa primeira etapa foram constituídos, ainda, os seguintes instrumentos de investigação: Questionário Perfil, Instrumento de Investigação Inicial, Instrumentos de Investigação Intermediários e o Instrumento de Investigação Final, todos aplicados ao longo da investigação.

Na segunda etapa, ocorreu a aplicação da UEA junto a turma participante da pesquisa, bem como os diferentes instrumentos de investigação. Já na terceira etapa, foram organizados e analisados os dados.

### **Análise e Discussão dos Resultados**

No início do trabalho buscou-se, com o Instrumento de Investigação Inicial, identificar aspectos dos conhecimentos prévios dos estudantes participantes da pesquisa, quanto à

---

<sup>3</sup> Pesquisa aprovada no Comitê de Ética em outubro de 2016, número 59898416.9.0000.5349

linguagem padrão, definições de objetos geométricos espaciais e planos, semelhanças e diferenças entre os mesmos, relação de posição entre retas, entre planos e entre plano e reta, bem como noções primitivas.

Para análise das atividades propostas nos instrumentos de investigação foram consideradas três categorias, para se emitir um juízo de valor sobre o desempenho dos estudantes na realização de atividades e tarefas, considerando o modelo de Van Hiele: insatisfatório, percentual de acertos menor que 50%, satisfatório, percentual de acertos entre 50% e 70% e muito satisfatório, percentual de acertos maior ou igual a 70%.

O Instrumento Inicial era composto por oito questões classificadas de acordo com os níveis do modelo de Van Hiele (níveis de visualização, análise e de dedução informal), conforme destacado no quadro da Figura 2, o qual apresenta o desempenho da turma em cada questão do referido instrumento.

Figura 2 – Desempenho da turma no Instrumento Inicial

Desempenho da Turma (%)						
Questão	Nível do modelo	Muito Satisfatório	Satisfatório	Insatisfatório	Não responderam	Total
1	Visualização	100	0	0	0	100
2	Visualização	62,5	22,5	15,0	0	100
3	Análise	82,5	14,0	0	3,5	100
4	Análise	27,5	31,0	18,5	23,0	100
5	Dedução Informal	35,0	0	46,5	18,5	100
6	Dedução Informal	53,0	0	37,5	9,5	100
7	Análise	25,0	57,5	12,5	5,0	100
8	Dedução Informal	10,0	32,5	37,5	20,0	100

Fonte: Rodrigues (2018).

A análise deste instrumento possibilitou observar que o desempenho da turma, em questões envolvendo o nível de visualização foi de 92,5%, apresentando desempenho muito satisfatório. Considera-se esse resultado compatível com um desempenho de estudantes do terceiro ano do Ensino Médio, no que se refere a conteúdos da Geometria Espacial. Quanto às questões pertencentes ao nível de análise, o desempenho ficou em torno de 79% (média dos desempenhos satisfatório e muito satisfatório). Já nas questões que exigiam conhecimento das habilidades relacionadas ao nível de dedução informal, os estudantes apresentaram maior dificuldade de compreensão e resolução das atividades, sendo que a média dos desempenhos satisfatório (10,83%) e muito satisfatório (32,66%) ficou em torno de 21,7% sendo que, cerca de 15,5% dos estudantes, não responderam as atividades pertinentes a este nível.

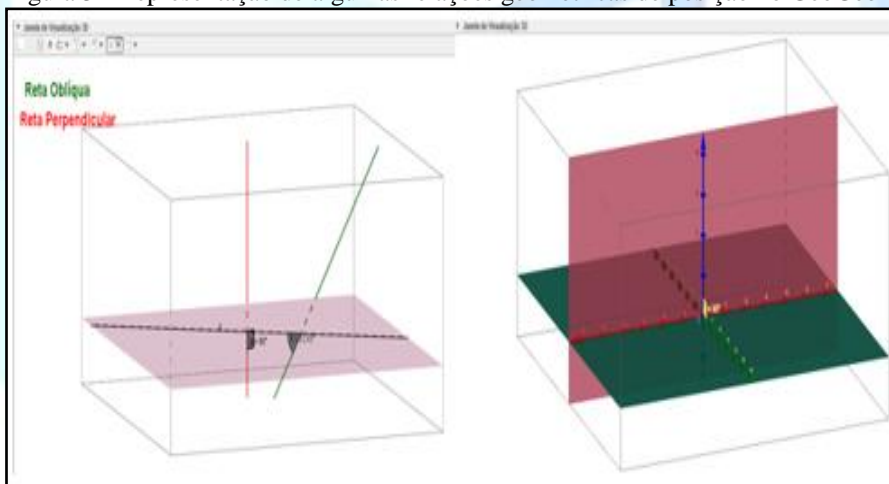
Assim, a partir dos resultados da aplicação do Instrumento Inicial, os materiais da Unidade de Ensino e Aprendizagem (UEA) que estavam em processo de elaboração foram



aperfeiçoados e adequados. Conforme já destacado a UEA foi organizada em três eixos temáticos: Geometria de Posição, Noções Primitivas e Conhecimentos Básicos, Poliedros: Prisma e Pirâmide e, ao longo da aplicação da mesma, foram desenvolvidas diversas atividades com os estudantes sendo que, determinadas atividades foram utilizadas como instrumentos de investigação (no caso faziam parte dos Instrumentos de Investigação Intermediários). Tais instrumentos foram elaborados e aplicados para um acompanhamento e análise do desenvolvimento dos conhecimentos dos estudantes ao longo da aplicação da UEA. No que segue, apresentam-se algumas das atividades selecionadas para compor os chamados Instrumentos de Investigação Intermediários.

No eixo Geometria de Posição abordaram-se as relações de posição, no plano e no espaço, entre retas, entre planos e entre retas e plano, buscando proporcionar ao estudante a compreensão destes conceitos. Ao longo da aplicação, trabalhou-se com o *software* GeoGebra, buscando oportunizar situações a partir das quais pudessem visualizar, relacionar, modificar, comparar as relações geométricas de posição e, assim, conjecturar a respeito das características e propriedades do conceito estudado, conforme exemplificado na Figura 3.

Figura 3 - Representação de algumas relações geométricas de posição no GeoGebra



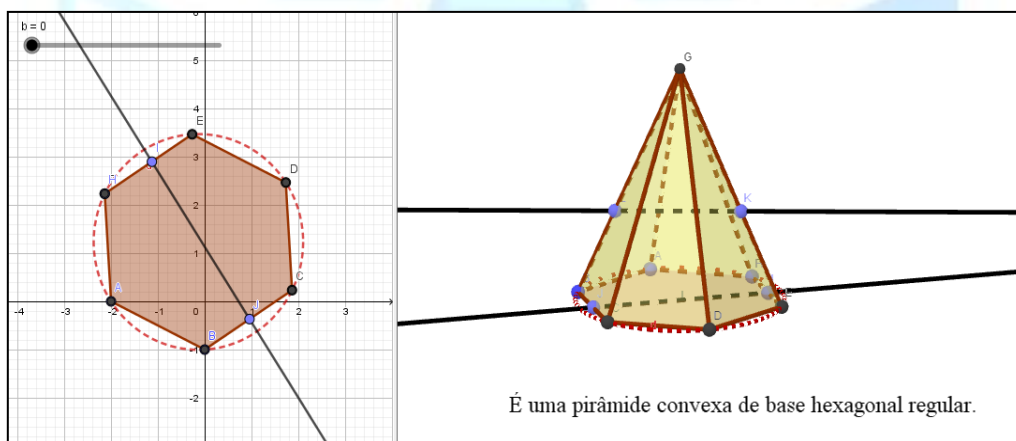
Fonte: Rodrigues (2018).

Os resultados apresentados pela turma foram muito positivos, confirmando o que Giraldo, Caetano, Mattos (2012) destacam quanto ao uso de *software* de geometria dinâmica, uma vez que tal utilização permite que os estudantes interajam com os objetos de forma dinâmica a partir das propriedades e relações estabelecidas, o que potencializa as aprendizagens. A discussão realizada a partir da apresentação de soluções propostas pelos estudantes permitiu que fossem encaminhadas sínteses de ideias que foram sendo articuladas para a formação de um determinado conceito e do entendimento de propriedades.

No eixo Noções Primitivas e Conhecimentos Básicos, foi proposto aos estudantes, uma revisão dos conceitos básicos da Geometria Plana, apresentando também, os conceitos básicos da Geometria Espacial. Além disso, solicitou-se que os estudantes, com auxílio do *software* GeoGebra, construíssem um sólido geométrico qualquer e indicassem as características e propriedades por meio de tratamentos realizados com a utilização das ferramentas disponibilizadas no *software* e da observação.

A utilização do GeoGebra permitiu os alunos realizarem construções geométricas, que não são feitas usualmente com régua e compasso. Assim, com os recursos disponíveis foi possível lançar diferentes olhares para o mesmo objeto, propiciando experimentar, lançar hipóteses e testá-las, conjecturar, buscando extrair características, propriedades e relações geométricas. Destaca-se no quadro da Figura 4, a construção realizada por um grupo de estudantes e a análise realizada pelos mesmos.

Figura 4 - Construção de uma pirâmide no *software* GeoGebra



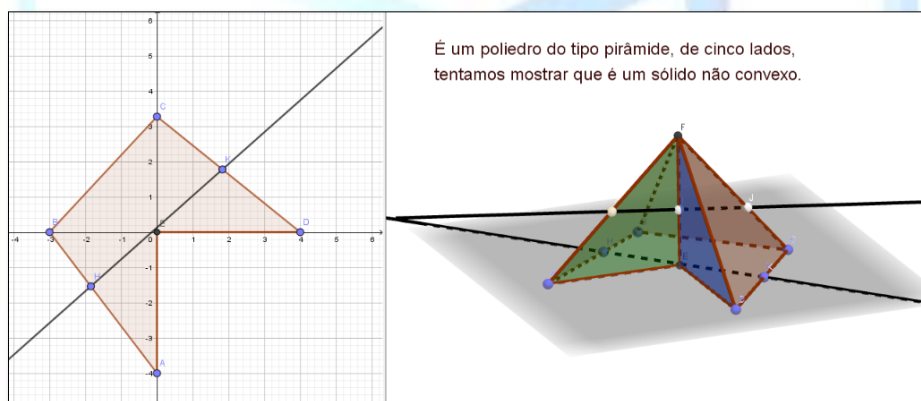
Fonte: Rodrigues e Kaiber (2018).

Observando a construção no *software* foi possível identificar que o grupo de estudantes possuía noções intuitivas e mesmo conhecimentos prévios conceitos e propriedades importantes para o desenvolvimento do pensamento geométrico. A construção da circunferência circunscrita ao polígono da base da pirâmide, quando apresentada no grande grupo, gerou uma produtiva e polêmica discussão sobre polígonos regulares uma vez que surgiu uma argumentação de que bastava um polígono ser inscrito a uma circunferência para ser considerado regular. Já para identificar se o polígono construído era convexo, os estudantes optaram por construir uma reta cortando o mesmo, e partir da movimentação da mesma, visualmente, concluíam sobre tal atributo.

Nesta atividade, também foi possível perceber que os estudantes possuíam domínio das habilidades indicadas no nível de visualização e análise proposto por Van Hiele, uma vez que apresentaram conhecimentos relacionados a propriedades e definições do sólido geométrico representado, o que permitiu identificar que os mesmos estavam desenvolvendo habilidades relacionadas ao nível de dedução informal do modelo, sendo que, a partir de construções realizadas e das análises e discussões produzidas, conseguiram identificar as características e particularidades de um polígono regular, o que levou, posteriormente, a busca por uma definição para tal objeto.

No eixo Poliedros: Prisma e Pirâmide trabalhou-se o conceito de Poliedro (classificação, elementos, propriedades), bem como os conceitos de Prisma e Pirâmide. Ressalta-se que ao longo da aplicação da UEA, foram utilizados diferentes estratégias e recursos como a utilização de construções e planificações de sólidos com material concreto, utilização de diferentes embalagens e modelos de sólidos em acrílico, bem como, construções no *software* GeoGebra, buscando oportunizar aos estudantes diferentes contextos. No quadro da Figura 5, apresenta-se exemplo de atividade desenvolvida no eixo dos Poliedros.

Figura 5 – Atividades proposta no eixo Poliedros



Fonte: Rodrigues e Kaiber (2018).

Considera-se que na construção realizada os estudantes evidenciaram habilidade e criatividade quanto ao uso do *software*, entretanto, com relação ao conhecimento apresentaram dificuldades relacionadas aos conceitos envolvidos.

É possível perceber na construção que os estudantes optaram por fazer representações de retas interceptando o polígono no plano e nas faces do poliedro, tal como tinha sido realizado na atividade anterior, buscando caracterizar o sólido como não convexo. Destaca-se, também, que o grupo utilizou variadas ferramentas do *software* para identificar as características do mesmo, fazendo movimentações que permitiam que os mesmos lançassem

diferentes olhares para o objeto, buscando identificar características e propriedades. Tais procedimentos permitiu aos mesmos identificarem que o objeto construído não era uma pirâmide devido “a base ser um polígono não convexo”, sendo o mesmo denominado de poliedro tipo “pirâmide” (mas que, de fato, não é pirâmide). A tentativa de descrição, em língua natural, do objeto representado possibilitou, ainda, a discussão sobre se figuras espaciais têm “lados” (se não seriam faces) e o que seriam as arestas.

Assim, na resolução desta atividade verificou-se que os estudantes possuíam habilidades relacionadas ao nível de visualização do modelo de Van Hiele, adaptado para a Geometria Espacial, bem desenvolvido, considerando que realizaram a atividade sem grandes dificuldades. Entretanto, destaca-se que os estudantes não conseguiam se manifestar adequadamente sobre propriedades e noções importantes para a caracterização do sólido, evidenciando, assim, que não possuíam habilidades relacionadas ao nível de análise e dedução informal do modelo, relacionado, em parte a falta de domínio de conhecimentos.

Sobre a realização dessas atividades, concorda-se com Moraes (2014), quando destaca a importância da visualização na Geometria, pois, segundo a autora, a visualização é um processo importante no ensino e aprendizagem argumentando que o desenvolvimento do pensamento visual é bastante complexo sendo que, por meio da utilização do *software* torna-se possível propor um trabalho que contribua para que o mesmo ocorra.

Considera-se, ainda, que os resultados obtidos no trabalho com a unidade de aprendizagem foram promissores diante do desempenho apresentado pela turma no Instrumento Inicial. Avalia-se que o desenvolvimento da UEA, juntamente com a interação dos estudantes com o *software* GeoGebra, propiciou aos mesmos, desenvolvimento das habilidades destacadas por Hoffer (1981), bem como o avanço nos conhecimentos trabalhados. Corroborando com o apontado por Fernandes (2008), Kaiber, Vecchia e Scapin (2008) e Pinto (2016), entende-se que o recurso à tecnologia, no caso a utilização de um *software* de geometria dinâmica, pode se constituir em um aliado no desenvolvimento cognitivo dos estudantes, pois permite desenvolver um trabalho que favorece diferentes ritmos de aprendizagem possibilitando um espaço de busca de soluções, análises, hipóteses e conjecturas sobre as questões e problemas propostos, explorando tanto a visualização como a movimentação proporcionada pelo *software*.

No quadro da Figura 6, apresenta-se uma síntese das análises produzidas ao longo do desenvolvimento da UEA, a partir da aplicação dos Instrumentos de Investigação Intermediários, nos diferentes eixos.

Figura 6 - Síntese das análises dos Instrumentos de Investigação Intermediários

<b>Eixos Temáticos</b>	<b>Análise/ Síntese</b>
Geometria de Posição	Os estudantes apresentaram desempenho muito satisfatório, quanto à visualização e identificação das relações de posição entre retas e planos. Já em relação às atividades que exigiam maior conhecimento por parte dos estudantes, indicando nomenclatura e características das relações geométricas indicadas, o desempenho foi satisfatório.
Noções Primitivas e Conhecimentos Básicos	As atividades tinham objetivo de identificar conhecimentos e habilidades do nível de visualização, análise e dedução informal neste eixo. No nível de visualização (nível 1) do modelo de van Hiele, os estudantes apresentaram desempenho muito satisfatório, identificando os objetos geométricos indicados tanto no espaço como no plano. Já no nível de análise (nível 2) e dedução informal (nível 3) o desempenho apresentado pela turma foi satisfatório, uma vez, que os estudantes alcançaram os conhecimentos de cada nível em parte.
Poliedros: Prisma e Pirâmide	Buscou-se trabalhar habilidades dos níveis de análise (nível 2) e de dedução informal (nível 3) do modelo de van Hiele, em ambos os níveis os estudantes apresentaram desempenho satisfatório na realização das atividades.

Fonte: Rodrigues (2018).

Diante do trabalho desenvolvido na UEA, optou-se por construir uma ferramenta de avaliação, denominada Instrumento de Investigação Final, que abrangesse assuntos abordados ao longo da UEA, possibilitando uma análise dos possíveis avanços alcançados pelos estudantes em relação aos conceitos de Geometria Espacial. Para a análise desse instrumento utilizou-se o mesmo critério adotado na análise do instrumento inicial, sendo o mesmo composto por seis questões que visavam analisar o conhecimento dos estudantes referente às temáticas desenvolvidas. Assim, como na análise inicial, apresenta-se o desempenho da turma ao realizar as atividades do Instrumento de Investigação Final (Figura 7).

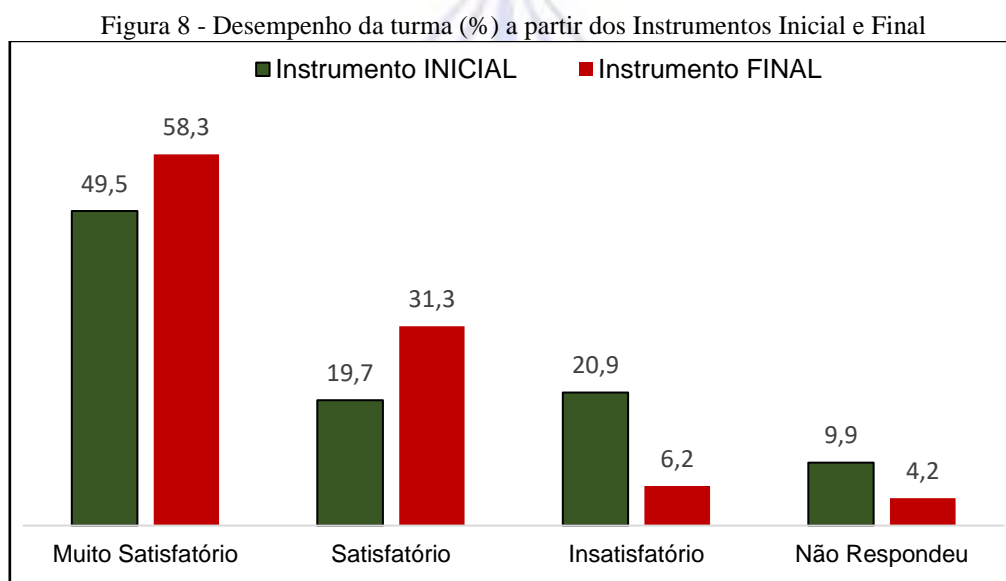
Figura 7 – Desempenho da turma no Instrumento Final

Desempenho da Turma (%)						
Questão	Nível do modelo	Muito Satisfatório	Satisfatório	Insatisfatório	Não responderam	Total
1	Visualização	75,0	25,0	0	0	100
2	Análise	50,0	43,0	7,0	0	100
3	Dedução Informal	62,0	25,0	0	13,0	100
4	Dedução Informal	55,0	32,5	0	12,5	100
5	Dedução Informal	50,0	35,0	15,0	0	100
6	Análise	57,5	27,5	15,0	0	100

Fonte: Rodrigues (2018).

Pelo critério de análise, pode-se observar que a turma apresentou desempenho que pode ser considerado muito bom, posto que, no mínimo a metade da turma apresentou

desempenho muito satisfatório em todas as questões, inclusive nas questões classificadas como nível de dedução informal do modelo de Van Hiele, diferentemente, do resultado indicado na análise do instrumento inicial. Buscando evidências as quais permitam avaliar o desenvolvimento da UEA, no que se refere ao aprendizado e desenvolvimento do pensamento geométrico dos estudantes apresenta-se, no gráfico da Figura 8, uma média de desempenho da turma em relação aos instrumentos inicial e final.



Fonte: Rodrigues (2018).

A partir do gráfico é possível perceber que o desempenho melhorou consideravelmente, chegando a 89,6% de desempenho satisfatório no instrumento final. Já o desempenho insatisfatório chegou ao final com um percentual de apenas 6,2%.

Considera-se que a utilização do *software* GeoGebra na UEA contribuiu significativamente para a apropriação dos conceitos estudados, considerando que o mesmo dispõe das janelas 2D, 3D e inúmeras ferramentas que possibilitam construções planas e espaciais com base em propriedades dos objetos bem como a possibilidade de movimentação que aumenta em muito as oportunidades de visualizar, observar características, conjecturar sobre propriedades. Assim, concorda-se com Borba (2011) quando afirma que a visualização é parte importante na aprendizagem, posto que, as variadas representações visuais podem proporcionar a apropriação de diferentes conceitos.

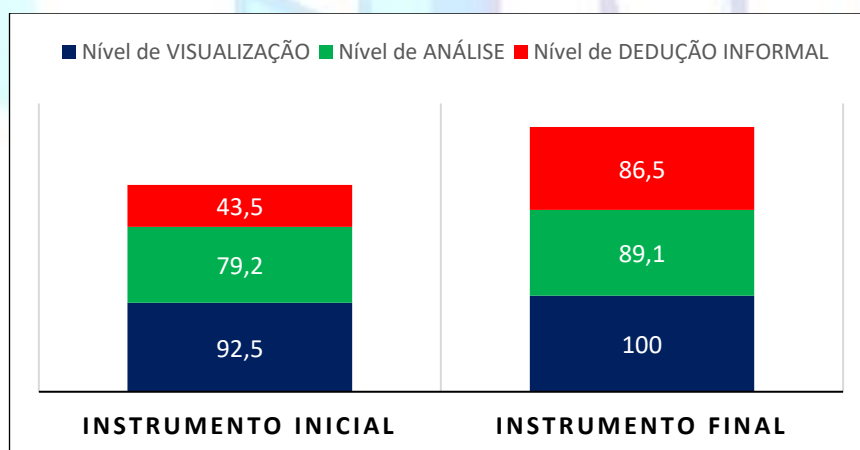
Quanto ao desenvolvimento do pensamento geométrico destes estudantes, com respaldo no modelo de van Hiele, agora aplicado à Geometria Espacial, observou-se, que os estudantes se articulavam muito bem no nível de visualização do modelo (nível 1). Percebeu-

se, também, o progresso no nível de análise (nível 2), quando os estudantes deram mostras do domínio da linguagem padrão, assim como facilidade em reconhecer características e propriedades dos objetos geométricos. Já, no nível de dedução informal (nível 3), os estudantes evidenciaram apropriação das definições e conceitos dos sólidos geométricos. Villiers (2010) afirma que quanto à transição dos níveis do modelo, a transição do nível de visualização (nível 1) para o nível de análise (nível 2) envolve uma reorganização do pensamento geométrico, agora não tanto abstrato, mas sim simbólica, porquanto, no nível de análise, os estudantes possuem domínio de uma linguagem padronizada. Já a transição do nível de análise (nível 2) para o nível de dedução informal (nível 3) os estudantes conseguem fazer relações entre os novos conceitos e os já consolidados, além de reconhecer as propriedades existentes nos objetos geométricos.

Assim, com base no modelo de Van Hiele percebeu-se o avanço da turma do nível de visualização (nível 1) para o nível de análise (nível 2), bem como indícios significativos da transição do nível de análise (nível 2) para o nível de dedução informal (nível 3). Nesse sentido, o objetivo principal da implantação da UEA foi alcançado, uma vez que a mesma visava propor atividades que pudessem promover a construção dos conceitos abordados em aula, através de diferentes estratégias e atividades, logo o resultado foi expressivo.

Nesse contexto, apresenta-se no gráfico da Figura 9, uma análise do desempenho dos estudantes nos níveis de visualização, análise e dedução informal do modelo de Van Hiele, a partir de uma comparação entre os instrumentos de investigação Inicial e Final.

Figura 9 - Desempenho da turma (%) de acordo com os níveis do Modelo de Van Hiele



Fonte: Rodrigues (2018).

Assim considera-se que houve avanço no desempenho dos estudantes nos três níveis investigados, destacando-se o avanço ocorrido no nível de dedução informal.

## Considerações Finais

A presente investigação analisou as possíveis contribuições do uso de uma Unidade de Ensino e Aprendizagem (UEA) com recurso às tecnologias digitais no desenvolvimento de conceitos da Geometria Espacial junto a estudantes do Ensino Médio. Ressalta-se, como ponto positivo a evolução do conhecimento dos estudantes ao longo do desenvolvimento da UEA.

A implementação da UEA indicou que a turma já apresentava o nível de visualização do modelo desenvolvido com referência aos conteúdos desenvolvidos. Quanto ao nível de análise, a turma indicava já possuir conhecimentos referentes ao nível, todavia foi possível perceber que, ao longo da aplicação da unidade ocorreu um avanço.

Já no nível de dedução informal do modelo foi onde ocorreu o maior avanço, visto que, no início da investigação a turma não evidenciava as habilidades necessárias para o trabalho neste nível. Porém, com o trabalho foram desenvolvidos os conceitos geométricos pertinentes e desenvolvidas as habilidades referentes a esse nível.

Cabe destacar que o *software* GeoGebra foi um importante elemento no desenvolvimento desta investigação, uma vez que viabilizou a construção e a visualização dos sólidos geométricos, propiciando aos estudantes um ambiente onde puderam analisar, discutir e conjecturar sobre os conceitos voltados a Geometria Espacial. A partir dos dados e das análises apresentados neste artigo, considera-se que os resultados obtidos na investigação foram satisfatórios.

Destaca-se ainda, que a investigação possibilitou o desenvolvimento do GEOE, um objeto educacional de aprendizagem para os conceitos de Geometria Espacial. O GEOE emergiu diante dos desafios enfrentados junto a turma durante a investigação, como a ausência de material didático, bem como gerenciamento do tempo para o desenvolvimento da UEA. Porém, o que inicialmente se apresentou como um problema, ao longo da investigação foi se destacando como uma possibilidade de produção de materiais os quais viessem a ser utilizados pelos estudantes em sala de aula, ou mesmo em outros espaços. Assim, diante dos desafios e experiências vivenciadas ao longo da aplicação da UEA, buscou-se desenvolver um objeto educacional com o objetivo de que o mesmo viesse a se constituir em material de apoio para os professores trabalharem em sala de aula, assim como, os estudantes utilizarem fora do ambiente escolar. Dessa maneira, elaborou-se o objeto educacional GEOE (Geometria



Espacial), o qual foi constituído ao longo da investigação e no presente está em fase de qualificação e aprimoramento.

## Referências

ANDRADE, J. A. A.; NACARATO, A. M. Tendências Didático-Pedagógicas no Ensino de Geometria: um olhar sobre os trabalhos apresentados nos ENEMs. **Educação Matemática em Revista**, n. 17, ano 11, p. 61-70, 2004.

BARBOSA, C. P. **Desenvolvimento do Pensamento Geométrico nos anos iniciais do Ensino Fundamental: uma proposta de ensino para professores e formadores de professores**. 2011. 65p. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Educação Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto) – Universidade Federal de Ouro Preto, Belo Horizonte, 2011.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular** – Documento preliminar. MEC. Brasília, DF, 2018. Disponível em: [http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/04/BNCCEnsinoMedioembaixa\\_site.pdf](http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/04/BNCCEnsinoMedioembaixa_site.pdf) >. Acesso em: 27/04/2018.

BRASIL. Secretaria da Educação Básica. **Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemática**. Brasília, DF, 2018. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/blegais.pdf>>. Acesso em: 27/04/2018.

BORBA, M. C.; VILLARREAL, M. V. **Humans-With-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking: information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization**. v. 39, New York: Springer, 2005.

CROWLEY, M. L. O modelo Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico. In: LINDQUIST, Mary Montgomery; SHULTE, Albert P. (Org.) **Aprendendo e ensinando Geometria**. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994. p.1-20.

FAINGUELERNT, E. K. **Educação Matemática: representação e construção em Geometria**. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 1999.

FERNANDES, G. G. **Avaliação ergonômica da interface humano computador de ambientes virtuais de aprendizagem**. 2008. 280 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Ceará. Faculdade de Educação, Programa de Pós-Graduação em Educação Brasileira, Fortaleza-CE, 2008.

GIRALDO, V; CAETANO, P.; MATTOS, F. **Recursos Computacionais no Ensino de Matemática**. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

HOFFER, A. Geometry is more than Proof. **The Mathematics Teachers**, vol 74, n. 1, p. 11-18, 1981. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/27962295>> Acesso em 08/06/2016.

KAIBER, C. T.; VECCHIA, R. DALLA; SCAPIN, D. K. A incorporação de calculadoras gráficas na estruturação de conceitos relacionados a coordenadas polares e equações paramétrica. In: GROENWALD; C. L. O.; ROSA, M. (Eds.). **Educação Matemática e Calculadoras – Teoria e Prática**. p.15-43, 2010.

LORENZATO, S. **Para Aprender Matemática**. Campinas: Autores Associados, 2006.

PAVANELLO, R. M. O abandono do ensino da Geometria no Brasil: causas e consequências. **Zetetiké**, Campinas, SP. V. 01, p. 7-17, março, 1993.

MORAES, L.S. **A Geometria Espacial no Ensino Médio: Um estudo sobre o uso do material concreto na resolução de problemas**. 2014. 57p. Dissertação (Mestrado em Matemática no Centro de Ciências Exatas e Tecnologia da Universidade Federal do Estado Rio de Janeiro) - Universidade Federal do Estado Rio de Janeiro, 2014.

PETRY, V.A. **O ensino da Geometria nas escolas públicas municipais de Esteio/RS: tendências didático-pedagógicas**. Dissertação (Mestrado em Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Luterana do Brasil, Canoas, 2013.

PEREIRA, M. R. O. **A geometria escola: uma análise dos estudos sobre o abandono do seu ensino**. 2001. 84p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Programa de Pós-Graduação da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2001.

PINTO, R. C. **Análise de Questões de Matemática do Enem: Uma Proposta de Utilização do Geogebra na Perspectiva Ausubeliana**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Ensino de Física) – Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2016.

PIRES, C. M. C. Educação Matemática e sua influência no processo de organização e desenvolvimento curricular no Brasil. **Bolema**, Rio Claro, SP. Ano 21. Nº 29, p.13-42, 2008

RODRIGUES, D.S.; KAIBER, C.T. **A Geometria Espacial no Ensino Médio: Uma Análise em Livros Didáticos com apoio no Modelo de van Hiele**. In: XXI Seminário Internacional de Educação, 2016, Cachoeira do Sul. **Anais do XXI Seminário Internacional de Educação**. Cachoeira do Sul, 2016. p. 1-12. Disponível em:<<https://www.dropbox.com/s/mnyq8detpm55hak/XXISieduca.epub?dl=0>>. Acesso em: 10/04/2017.

RODRIGUES, D.S. **Contribuições da utilização de uma Unidade de Ensino e Aprendizagem (UEA) para o Ensino de Geometria Espacial**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Luterana do Brasil. Rio Grande do Sul, p. 154. 2018.

SANTOS, C. S. **A produção Matemática e um ambiente virtual de aprendizagem: o caso da Geometria Euclidiana Espacial**. 2006, p. 145. Dissertação do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. Universidade Estadual Paulista. Rio Claro, 2006.

VALENTE, J. A. (org.) **O computador na sociedade do conhecimento**. Campinas, SP: UNICAMP/NIED, 1999.

VILLIERS, M. Algumas reflexões sobre a Teoria de Van Hiele. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.12, n.3, p. 400-431, 2010.

ZULATTO, R. B. A. **Professores de Matemática que utilizam softwares de Geometria Dinâmica: suas características e perspectivas**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2002.

**Submetido em Abril de 2019**

**Aprovado em Maio de 2019**

