REVISTA DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL (UFMS)

PERSPECTIVAS DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Volume 12, número 28 – 2019
ISSN 2359-2842

Conceitos e teoremas-em-ação de estudantes do sétimo ano em problemas de configuração retangular

Concepts and theorems-in-action of seventh-year students in rectangular configuration problems

Gabriela dos Santos Barbosa[1]

RESUMO

Neste artigo analisamos o desempenho e as estratégias de estudantes do 7º ano do Ensino Fundamental na resolução de situações do campo multiplicativo identificadas como situações de configuração retangular. Classificamos os níveis de raciocínio e descrevemos os conceitos e teoremas-em-ação empregados por eles. Estes são termos empregados na Teoria dos Campos Conceituais para designar os conhecimentos presentes nos esquemas mobilizados pelos estudantes numa situação problema. Coletamos os dados por meio da aplicação de um teste para estudantes de uma escola pública do Rio de Janeiro, e entrevista com os mesmos. Os resultados apontam para as dificuldades dos estudantes ao lidarem com tais situações. Os índices de erros são altíssimos e se elevam quando a situação requer uma divisão para sua solução. Todavia reconhecemos que, mesmo errando, os estudantes possuem conhecimentos que podem servir de base para a superação de ideias equivocadas e construção de conceitos associados às operações.

PALAVRAS-CHAVE: Teoria dos Campos Conceituais. Campo Multiplicativo. Configuração Retangular. Ensino Fundamental.

ABSTRACT

In this article we analyze the performance and strategies of students of the 7th year of elementary school in the resolution of situations of the multiplicative field identified as situations of rectangular configuration. We classify the levels of reasoning and describe the concepts and theorems-in-action employed by them. These are terms used in Conceptual Field Theory to designate the knowledge present in the schemes mobilized by students in a problem situation. We collect the data through the application of a test for students of a public school in Rio de Janeiro, and interview with them. The results point to students' difficulties in dealing with such situations. The error rates are very high and rise when the situation requires a division for its solution. However, we recognize that, even if students are wrong, they have knowledge that can serve as a basis for overcoming misconceptions and constructing concepts associated with operations.

KEYWORDS: Conceptual Field Theory. Multiplicative Field. Rectangular Configuration. Elementary School.

[1] Faculdade de Educação da Baixada Fluminense da Universidade do Estado do Rio de Janeiro/UERJ-FEBF. gabrielasb80@hotmail.com.

Introdução

As ideias discutidas neste artigo têm origem na pesquisa apresentada no GT2 (Educação Matemática nos anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio) do VII Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, sob o título *O desempenho de estudantes de sétimo ano do ensino fundamental em situações de configuração retangular*. Aprofundando as reflexões presentes ali, neste artigo descrevemos e analisamos as estratégias empregadas por estudantes do 7º ano para lidar com problemas pertencentes ao campo multiplicativo, mais especificamente aqueles que envolvem a configuração retangular, procurando desvelar conceitos e teoremas-em-ação (VERGNAUD, 1990). Para tanto, optamos por aplicar um teste composto por 14 situações problema do campo multiplicativo em uma turma de 7º ano de uma escola da zona norte do Rio de Janeiro. Além da configuração retangular, as situações propostas no teste também se filiam aos eixos proporção simples, proporção dupla, proporção múltipla e comparação multiplicativa. Trata-se de uma classificação das situações do campo multiplicativo elaborada por Magina, Merlini e Santos (2012) à luz da Teoria dos Campos Conceituais.

Os dados coletados nesse estudo dialogam com outros estudos como, por exemplo, aqueles desenvolvidos por Magina, Merlini e Santos (2014), Souza (2015), Milagre (2017), Luna (2017) e Barbosa e Oliveira (2018). O primeiro, semelhante a este, focou nas estratégias empregadas por estudantes do 3º e do 5º ano do Ensino Fundamental, só que em problemas de proporção simples, e apontou para uma evolução limitada da competência dos estudantes ao lidarem com problemas multiplicativos. O último, também focado nos estudantes, investigou as estratégias de estudantes do 7º ano para lidar com problemas relacionados ao produto de medidas e ofereceu uma classificação para tais estratégias. Já os três últimos, que focaram na formação de professores, revelaram o desconhecimento dos professores da possibilidade de se classificar as situações multiplicativas, o que os levava a privilegiar apenas um ou dois tipos de situação. Dessa forma, destacam a necessidade de formação continuada para os professores que ensinam matemática para que estes revejam suas práticas de ensino do campo multiplicativo.

Assim como Magina, Santos e Merlini (2014) e Barbosa e Oliveira (2018), que tiveram os estudantes como sujeitos de suas pesquisas, priorizamos nesse estudo o desempenho dos estudantes de 7º ano em situações de configuração retangular. Dando prosseguimento ao estudo de Barbosa e Oliveira (2018), utilizamos a classificação das estratégias proposta por estes autores, porém avançamos procurando identificar os conhecimentos presentes nos esquemas mentais empregados pelos estudantes, os ditos conceitos e teoremas-em-ação (VERGNAUD, 1990).

A configuração retangular é uma das classes do eixo produto de medidas tanto na classificação das estruturas multiplicativas proposta por Vergnaud (1990) quanto na classificação proposta por Magina, Merlini e Santos (2012). Ela abarca problemas cujos dados contínuos ou discretos se distribuem em linhas e colunas. Os problemas que envolvem o cálculo de áreas são exemplos. Trata-se de uma classe pouco explorada pelos professores do Ensino Fundamental, como sinalizam os estudos que mencionamos anteriormente, e de difícil compreensão para os estudantes. Semelhantemente a todas as pesquisas que citamos, fundamentamo-nos na Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud.

Teoria dos Campos Conceituais

A Teoria dos Campos Conceituais foi desenvolvida na década de 1970, pelo psicólogo francês Gérard Vergnaud. Para ele, um campo conceitual é "um conjunto de situações cujo tratamento implica esquemas, conceitos e teoremas em estreita relação, assim como representações linguísticas e simbólicas que podem ser utilizadas para simbolizá-los" (VERGNAUD, 1990, p. 147). O domínio de um campo conceitual não ocorre em dois meses, nem mesmo em alguns anos. Ao contrário, novos problemas e novas propriedades devem ser estudados ao longo de vários anos para que o aluno o domine em sua totalidade. Nessa perspectiva, um conceito não pode ser reduzido a uma definição, sobretudo se estivermos interessados em seu ensino e em sua aprendizagem.

É por meio das situações a resolver que um conceito adquire sentido para a criança. Segundo Vergnaud (1990), um conceito está associado à terna *Situações (S), Invariantes (I) e Representações (R),* em que S, I e R são conjuntos definidos da seguinte maneira: S é o conjunto das situações que tornam os conceitos significativos (combinação de tarefas), I é o conjunto dos invariantes (objetos, propriedades e os conhecimentos contidos nas estratégias empregadas para lidar com as situações) e R é o conjunto das representações simbólicas que podem ser usadas para pontuar e representar esses invariantes e, portanto, representar as situações e os procedimentos.

Cabe esclarecer que Vergnaud (1990) define situação no sentido de tarefa. Em cada campo conceitual, existe uma grande variedade de situações e os conhecimentos das crianças são, então, moldados pelas situações que encontram e progressivamente dominam. Em síntese, frente a uma situação nova, o sujeito adapta seus conhecimentos prévios e desenvolve novas competências, cada vez mais complexas. Assim, revelando as influências da teoria piagetiana, são as situações que dão sentido ao conceito. A compreensão de um conceito não surge apenas de um tipo de situação e uma simples situação sempre abarca mais de um conceito.

Na sequência da terna de sustentação do conceito, temos os invariantes. De acordo com Magina *et al*. (2001, p. 12):

> Os invariantes são componentes cognitivos essenciais dos esquemas. Eles podem ser implícitos ou explícitos. São implícitos quando estão ligados aos esquemas de ação do aluno. Neste caso, embora o aluno não tenha consciência dos invariantes que está utilizando, esses podem ser reconhecidos em termos de objetos e propriedades (do problema) e relacionamentos e procedimentos (feito pelo aluno). Os invariantes são explícitos quando estão ligados a uma concepção. Nesse caso, eles são expressos por palavras e/ou outras representações simbólicas.

Não há resolução de problemas sem que se coloquem em jogo os invariantes operatórios (que são a parte oculta da conceitualização) e as representações simbólicas. É importante destacar também que há conhecimentos matemáticos envolvidos nos invariantes. Estes conhecimentos estão implícitos nas ações dos estudantes ao lidarem com as situações e, na maioria das vezes, eles não conseguem explicitá-los. São conhecimentos que Vergnaud (1990) nomeia *conhecimento-em-ação* e, pelo fato de terem sentido para os estudantes, a partir deles, o professor pode dar início ao processo de conceitualização. Por isso pesquisas como a que apresentamos neste artigo são relevantes. Nessa direção, Barbosa e Oliveira (2018, p. 3) afirmam:

> Ao observarmos as estratégias empregadas pelos estudantes para lidarem com determinadas situações problema do campo multiplicativo e inferirmos sobre os conhecimentos envolvidos nelas, oferecemos elementos que podem orientar o trabalho do professor e a elaboração de intervenções de ensino que promovam a aprendizagem deste campo.

Em resumo, o trabalho do professor é, conhecendo os esquemas mobilizados pelos estudantes, favorecer a revisão e a construção de novos esquemas. Assim, Vergnaud chama de esquema a organização invariante do comportamento para uma determinada classe de situações (1990, p. 136; 1993, p. 2; 1994. p. 53; 1996, p. 201; 1998, p. 168) e afirma que é nos esquemas que se devem pesquisar os conhecimentos-em-ação do sujeito, isto é, os elementos cognitivos que fazem com que a ação do sujeito seja operatória. Há muito de implícito nos esquemas. Muitos esquemas podem ser evocados sucessivamente, e mesmo simultaneamente, em uma situação nova para o sujeito (1990, p. 140). As condutas em uma dada situação repousam sobre o repertório inicial de esquemas que o sujeito dispõe e o desenvolvimento cognitivo pode ser interpretado como consistindo, sobretudo, no desenvolvimento de um vasto repertório de esquemas afetando esferas muito distintas da atividade humana.

As expressões conceito-em-ação e teorema-em-ação designam os conhecimentos contidos nos esquemas. Estes são também designados, por Vergnaud, pela expressão mais global invariantes operatórios. Mais especificamente, Vergnaud (1990) divide os invariantes operatórios em fundamentalmente dois tipos lógicos: proposições e funções proposicionais. Os invariantes do tipo proposições são suscetíveis de ser verdadeiro ou falso. Os teoremas-em-ação são invariantes deste tipo. Para esclarecer este tipo lógico, Vergnaud (1990) dá como exemplo a descoberta por crianças entre 5 e 7 anos de que não é necessário contar tudo para obter o cardinal de $A \cup B$ se já se tiver contado A e B. Pode-se exprimir este conhecimento por um teorema-em-ação:

$$Card\,(A \cup B) = Card\,(A) + Card\,(B) \quad \text{desde que} \quad A \cap B = \emptyset.$$

Vergnaud (1990) propõe ainda outro exemplo ao lembrar o momento quando a criança compreende que, numa situação de comércio, se a quantidade de objetos é multiplicada por 2, 3, 4, 5,10, 100 ou um número simples, então o preço é 2, 3, 4, 5, 10, 100 vezes maior. Para ele, pode-se expressar este conhecimento pelo teorema-em-ação

$$f\,(nx) = nf\,(x)$$

Vale ressaltar, porém, que situações diferentes, que envolvem um mesmo conceito, podem apresentar graus de dificuldade variados por exigirem da criança, em sua resolução, diferentes teoremas-em-ação. Restringindo esta ideia à aprendizagem das operações, Franchi (1999, pp. 159-160) acrescenta:

> Pesquisas na área têm amplamente constatado que o tipo de operação matemática mobilizada no processo de resolução de problemas não se constitui no fator essencial de dificuldade para as crianças. Esses fatores situam-se na ordem de grandeza e na natureza dos números (naturais, racionais...), na estrutura textual, no tipo de referentes numéricos (km, km/h, m); mas situam-se essencialmente nas operações de pensamento necessárias para estabelecer relações pertinentes entre os dados do problema. Pode haver uma grande defasagem no domínio pelo aluno de duas situações envolvendo as mesmas operações matemáticas e variáveis diferentes.

Os problemas a seguir apresentados por Magina (2002) nos permitem exemplificar a afirmação de Franchi:

Problema A: Márcio convidou três amigos para sua festa de aniversário. Para cada amigo ele quer dar 5 bolas de gude. Quantas bolas de gude precisa comprar?

Problema B: Carlos vai fazer aniversário. Cada amigo que vier a sua festa vai ganhar 3 balões. Ele comprou 18 balões. Quantos amigos ele pode convidar?

Os conceitos relevantes são os mesmos para as duas situações, mas a situação B é bem mais difícil para alunos de sete ou oito anos porque implica raciocinar para trás e achar o estado inicial. Tal raciocínio depende de um forte teorema-em-ação:

$$I = T^{-1}(F),$$

onde I é o estado inicial, F o estado final, T a transformação direta e T^{-1} a transformação inversa.

Moreira (2002) discute um exemplo que pode esclarecer ainda mais as ideias sobre conceitos-em-ação e teoremas-em-ação. Ele sugere que se considere a seguinte situação proposta por Vergnaud (1994, p. 49) a alunos de 13 anos: *O consumo de farinha é, em média, 3,5 kg por semana para dez pessoas. Qual a quantidade de farinha necessária para cinqüenta pessoas durante 28 dias? Resposta de um aluno: 5 vezes mais pessoas, 4 vezes mais dias, 20 vezes mais farinha; logo, 3,5 x 20 = 70 kg*.

Citando Vergnaud, Moreira (2002) afirma que é impossível dar conta desse raciocínio sem supor o seguinte teorema implícito na cabeça do aluno: $f(n_1x_1, n_2x_2) = n_1n_2\ f(x_1,x_2)$, ou seja, Consumo (5 x 10, 4 x 7) = 5 x 4 Consumo (10, 7). E ainda acrescenta:

> Naturalmente, este teorema funciona porque as razões de 50 pessoas para 10 pessoas e 28 dias para 7 dias são simples e evidentes. Ele não seria tão facilmente aplicado a outros valores

> numéricos. Portanto, seu escopo de aplicação é limitado. Ainda assim, é um teorema que pode ser expresso, por exemplo, em palavras: O consumo é proporcional ao número de pessoas quando o número de dias é mantido constante; e é proporcional ao número de dias quando o número de pessoas é mantido constante. Pode também ser expresso pela fórmula C = k.P.D. onde C é o consumo, P o número de pessoas, D o número de dias e k o consumo por pessoa por dia (MOREIRA, 2002, p. 11).

Percebemos claramente que as maneiras de expressar o raciocínio expostas acima são diferentes e, quanto à cognição, elas apresentam diferentes níveis de dificuldade. Sobre isso, Moreira (2002, p. 11) conclui que é *claro que essas diferentes maneiras de expressar o mesmo raciocínio não são cognitivamente equivalentes. A segunda é mais difícil. São maneiras complementares de explicitar a mesma estrutura matemática implícita em diferentes níveis de abstração.*

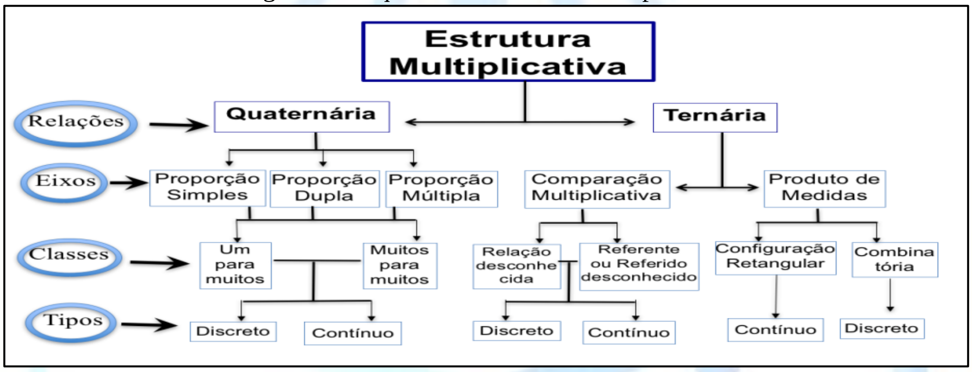
Voltando-nos agora para os invariantes do tipo função proposicional, é correto afirmar que, segundo a Teoria dos Campos Conceituais, eles não são suscetíveis de ser verdadeiro ou falso, mas constituem os "tijolos" indispensáveis à construção das proposições. Por exemplo, os conceitos de cardinal e de coleção, de estado inicial, de transformação, de relação quantificada são indispensáveis à conceitualização das estruturas aditivas e multiplicativas. Vergnaud (1990) insiste, entretanto que estes conceitos são raramente explicados pelos estudantes, mesmo sendo construídos por eles na ação. E ainda ressalta que a relação entre função proposicional e proposição, e consequentemente entre teorema-em-ação e conceito-em-ação, é uma relação dialética: *não há proposição sem função proposicional e, não há função proposicional sem proposição. Da mesma forma teorema-em-ação e conceito-em-ação se constroem em estreita interação* (VERGNAUD, 1990, p. 164).

O Campo Conceitual das Estruturas Multiplicativas

O campo conceitual das estruturas multiplicativas ou campo conceitual multiplicativo é o complexo de situações que englobam, concomitantemente, as diversas multiplicações e/ou divisões com teoremas que respaldam essas situações. Como Luna (2017, p. 51) afirma, podemos citar nesse conjunto "proporção simples e proporção múltipla, relação escalar direta e inversa, quociente e produto de dimensões, combinação linear e aplicação linear, fração, relação, número racional, múltiplo e divisor etc.".

Por ser um campo conceitual, sua apreciação e tratamento abarcam diversos tipos de conceitos, procedimentos e representações simbólicas específicos. Vergnaud (1990) classificou as relações multiplicativas em duas categorias que abrangem a multiplicação e a divisão, denominando-as como *relações ternárias* e *relações quaternárias*. As relações ternárias ligam três grandezas entre si que podem ser de natureza diversa. Já as relações quaternárias envolvem quatro grandezas, sendo duas de uma mesma classe e as outras duas pertencentes a outra classe. Magina, Merlini e Santos (2012) construíram o quadro a seguir à luz da classificação de Vergnaud.

Figura 1– Esquema da estrutura multiplicativa



Fonte – Magina, Santos e Merlini, publicado em SANTOS, 2015, p.105.

Neste artigo, enfatizamos a configuração retangular, que, como pode ser observado no quadro, é uma classe do eixo produto de medidas, que, por sua vez, corresponde a um tipo de relação ternária. No produto de medidas, uma grandeza é o produto de outras duas, no mesmo plano numérico e dimensional. Um exemplo da configuração retangular pode ser vivenciado nas situações em que são dadas as dimensões de um retângulo e se solicita sua área. Supondo-se que as dimensões estejam em centímetros, a dimensão da área será o centímetro quadrado e o número correspondente a ela será obtido pelo produto das dimensões.

O método

Para contemplar nosso objetivo, aplicamos durante 3 horas em uma turma de 7º ano (com 40 estudantes) de uma escola da zona oeste do Rio de Janeiro um teste diagnóstico e, em seguida, entrevistamos informalmente os estudantes para que estes nos explicassem seus registros e procedimentos. O teste é composto por 14 situações problema pertencentes ao campo conceitual multiplicativo. Destas, focamos nas duas situações que envolvem a configuração retangular, sendo uma em que são dados os fatores e a incógnita é o produto (fator-fator) e outra em que são dados um fator e o produto e a incógnita é o outro fator (fator-produto), que pode ser obtido por meio de uma divisão. Apresentamos as situações no Quadro 1 a seguir:

Quadro 1 – Situações do instrumento diagnóstico que envolvem as classes configuração retangular e combinatória

Situação	Enunciado	Classe	Operação
Q5	Rute quer mudar o piso do quarto dela. Este quarto tem 3 m de largura e 6 m de comprimento. Quantos metros quadrados, de piso, Rute precisa comprar?	Configuração retangular (fator-fator)	Multiplicação
Q7	A área do jardim de Vera é retangular e tem 24 m^2. A largura é 4 m. Qual é o comprimento em metros desse jardim?	Configuração retangular (fator-produto)	Divisão

Fonte: Dados da pesquisa (2014).

Inicialmente corrigimos os testes e, para estas questões, quantificamos erros, acertos e tipos de estratégias empregadas pelos estudantes. Em seguida, focamos nas estratégias empregadas pelos estudantes em Q5 e Q7, procurando estabelecer uma classificação para estas estratégias tendo como referência a classificação estabelecida por Barbosa e Oliveira (2018). Num segundo momento, entrevistamos os estudantes. Apresentamos aqui uma análise qualitativa com base no cruzamento dos registros deixados pelos estudantes no teste com suas falas nas entrevistas, que foram gravadas e transcritas. Assim, nossa análise se enquadra na concepção de Goldenberg (1999) sobre pesquisa qualitativa. Segundo este autor, nesse tipo de pesquisa o investigador não se preocupa em estabelecer quantificações do grupo investigado, mas sim com o entendimento aprofundado da realidade de cada indivíduo, grupo, organização ou instituição, suas trajetórias e subjetividades.

Análise dos dados

Procuramos analisar todas as estratégias utilizadas pelos estudantes, tanto nos casos de erro quanto nos de acerto e as agrupamos em categorias de acordo com seus níveis de complexidade. Como os estudos de Barbosa e Oliveira (2018) também se voltaram para as estratégias empregadas por estudantes de 7º ano nas mesmas situações problema, a categorização ali apresentada orientou nossa análise e nossos dados conduziram a três níveis de complexidade, a saber: incompreensível (nível 1), pensamento aditivo (nível 2) e multiplicativo (nível 3). A seguir, apresentamos cada um deles, descrevendo-os e observando seu número de incidência.

No nível 1 ou nível incompreensível estão "as respostas em que o estudante não explicitou, no papel, a operação utilizada para resolver o problema ou, quando o fez, não conseguimos identificar o raciocínio utilizado" (MAGINA, SANTOS & MERLINI, 2014, p. 9). Assim, fizeram parte desse nível as estratégias em que o estudante fez um desenho sem significado para a sua resolução, repetiu um dos números constantes no enunciado do problema, ou, ainda, pode ter escolhido outros conceitos matemáticos diferentes das quatro operações fundamentais, como frações e simplificação de frações, sem que conseguíssemos entender a razão para tal. Neste nível, as respostas dos estudantes estão invariavelmente erradas. No Quadro 2, apresenta-se a quantidade de estratégias classificadas no nível 1 por questão.

Quadro 2 – Quantitativo de estratégias classificadas no nível 1 por questão

Nível 1 – Incompreensível	
Questão	Incidência
Q5	4
Q7	8

Fonte: Elaborado pela autora.

Das 72 respostas não nulas dadas às questões Q5 e Q7, 12 pertenceram a este nível, sendo 4 de Q5 e 8 de Q7. Se compararmos a questão 5 com a 7, observamos que tal estratégia esteve, majoritariamente, presente em Q7. Já tínhamos a expectativa de que encontraríamos uma configuração próxima desse quadro, pois, como Barbosa e Oliveira (2018) sinalizaram, Q7 apresenta um grau de dificuldade maior que Q5. Este resultado vai também ao encontro das ideias de Franchi (1999), quando afirma que situações em que é dado o estado final e a transformação para que os estudantes descubram o estado inicial, são mais difíceis para eles.

Cabe ainda observar que nem mesmo os estudantes que produziram tal resultado souberam explicar seus registros e suas estratégias quando foram entrevistados.

O nível 2 ou nível do pensamento aditivo abarca as estratégias que envolveram uma adição, uma subtração ou qualquer combinação destas operações. Semelhantemente a Barbosa e Oliveira (2018), encontramos neste nível duas estratégias distintas de esquema de ação, o que gerou dois subníveis, quais sejam: adição ou subtração dos números presentes no enunciado (2A) e cálculo do perímetro em vez da área (2B).

Também neste nível, as respostas dos estudantes estão invariavelmente erradas. Suas incidências constam no Quadro 3:

Quadro 3 – Quantitativos de estratégias classificadas nos níveis 2A e 2B

Nível 2 Aditivo			
		Q5	Q7
2A	Adição dos dados	10	4
	Subtração dos dados	2	3
2B	Cálculo do perímetro	3	-

Fonte: Elaborado pela autora.

Como podemos verificar, embora Q5 tenha um número de acertos bem maior que Q7, a estratégia 2A foi bastante utilizada pelos estudantes em Q5, o que nos surpreendeu. Não podemos nos esquecer de que esta é uma questão de aplicação imediata do conceito de área de retângulos e que este já deveria ter sido dominado por estudantes do 7º ano. Contudo, assim como na pesquisa de Barbosa e Oliveira (2018), também nos surpreendeu o fato dos 3 estudantes que subtraíram os dados em Q7 estarem entre aqueles que somaram os dados em Q5. A observação destes dados nos levou a levantar a hipótese de que os estudantes reconheceram a diferença entre Q5 e Q7 e, então, concluíram que a operação que resolveria Q7 deveria ser a operação inversa da que resolveria Q5. No entanto, como ainda pensavam aditivamente, recorreram à subtração que é a operação inversa da adição. Nossa hipótese foi confirmada quando entrevistamos os estudantes. A transcrição da entrevista a seguir nos confirma:

> Pesquisadora: Por que você fez a conta de menos?
> Estudante: Porque eu sabia que tinha que fazer o contrário. Se na questão 5, eu fiz conta de mais, na questão 7, ei achei que tinha que fazer conta de menos.

É importante observar que havia no esquema empregado pelo estudante uma série de conhecimentos matemáticos, os ditos teoremas-em-ação e conceitos-em-ação. O reconhecimento da reversibilidade entre adição e subtração e domínio dos algoritmos destas operações são exemplos destes conhecimentos. O primeiro, passível de ser verdadeiro ou falso, é um teorema-em-ação. Já o segundo, alicerçando o teorema-em-ação, corresponde a um conceito-em-ação. Num sentido mais amplo, podemos ainda dizer que a associação da situação problema a uma operação, conhecimento também passível de ser verdadeiro ou falso, também pode ser entendida como um teorema-em-ação. Teorema este evidentemente falso, pois a adição e a subtraçãotal como foram empregadas, não resolvem problemas de configuração retangular. No entanto, como sugerem as pesquisas de Souza (2015), Milagre (2017), Luna (2017), o professor pode se valer destes conhecimentos e propor novas reflexões e argumentações para que ideias sejam descartadas e os estudantes passem a associar as situações Q5 e Q7 à multiplicação e à divisão.

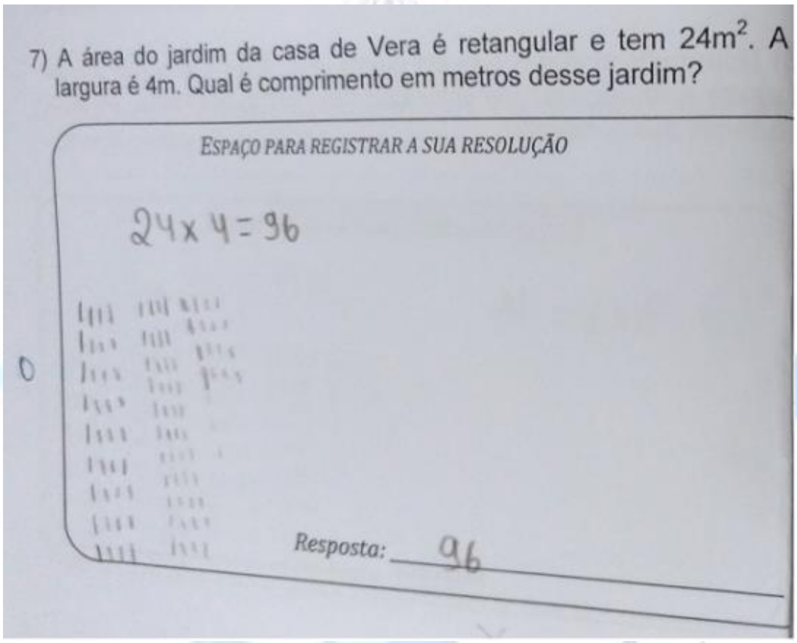
No que se refere a Q5, mantivemos o enunciado tal como em Barbosa e Oliveira (2018). Barbosa e Oliveira (2018) sinalizaram o fato de que, para um retângulo de 3 unidades de comprimento e 6 unidades de largura, o perímetro e a área correspondem ao mesmo número, porém com unidades diferentes. Felizmente, nesta questão, todos os estudantes deixaram seus cálculos registrados e souberam explicar suas estratégias nas entrevistas, o que nos permitiu diferenciaraqueles que calcularam a área daqueles que calcularam o perímetro.

Nos estudos de Magina, Santos e Merlini(2014, p. 12), no nível 3 ou nível de transição do pensamento aditivo para o multiplicativo, a estratégia utilizada pelos estudantes “consistiu em formar grupos de uma mesma quantidade. Trata-se de somar várias vezes uma mesma quantidade, seja ela representada por ícones agrupados (IIII IIIIIIII = 12), ou numericamente (4 + 4 + 4 = 12)”. Ainda segundo esses autores:

> Tal estratégia aproxima-se do pensamento multiplicativo, mas está ancorada no raciocínio aditivo, isto é, formar grupos de mesma quantidade para então efetuar a operação de adição. Quando a representação é pictórica fica bem demarcada pelos grupos desenhados; quando a representação é numérica, a estratégia é explicitamente a soma de parcelas iguais. (MAGINA, SANTOS, MERLINI, 2014, p. 13).

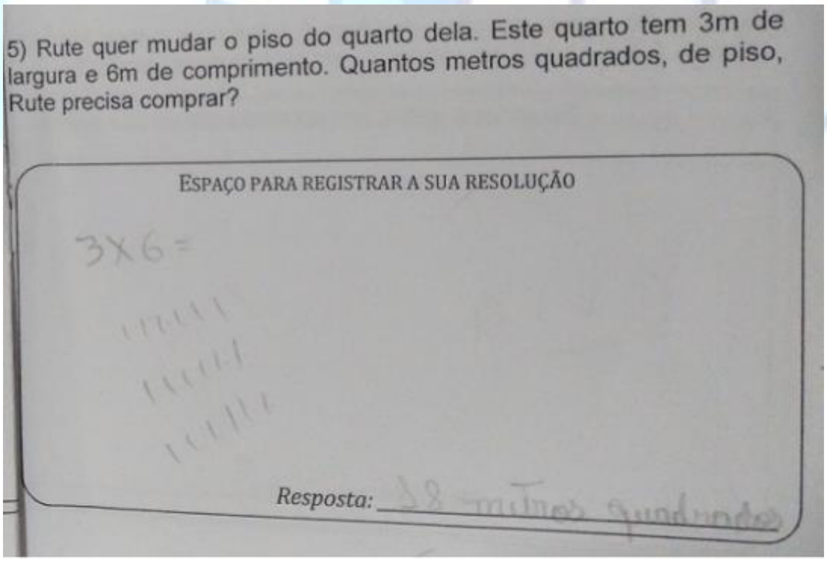
Tendo em vista tais ideias, Barbosa e Oliveira (2018) afirmam que o produto de medidas é um dos elementos de ruptura entre os campos aditivo e multiplicativo. Assim, neste estudo, bem como no último que citamos, não há transição do pensamento aditivo para o multiplicativo e o nível 3 já é o nível multiplicativo. No entanto, cabe mencionar que, nos procedimentos de cálculo apresentados por três estudantes do nível 3, podemos ainda encontrar a influência do raciocínio aditivo. Os exemplos das Figuras 2, 3 e 4 ilustram respostas, corretas e incorretas, que revelam esta influência:

Figura 2 – Pensamento aditivo nos procedimentos de cálculo de Q7/Multiplicação



Fonte: Dados da pesquisa.

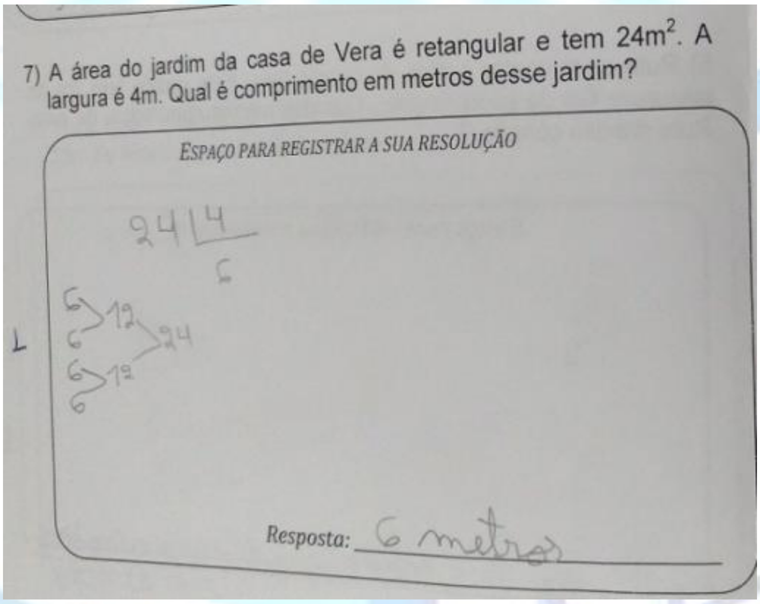
Figura 3 – Pensamento aditivo nos procedimentos de cálculo de Q5/Multiplicação



Fonte: Dados da pesquisa.

Uma breve observação dos protocolos nos sugere que os estudantes, ao lerem os enunciados, optaram por operações do campo multiplicativo e, ao efetuarem os cálculos, recorreram ao pensamento aditivo. Este fato pode ser observado nas respostas de dois estudantes à Q7 e de um estudante à Q5. Tendo em vista os conhecimentos presentes nos esquemas empregados pelos estudantes, podemos afirmar que o entendimento de que a multiplicação é uma soma de parcelas repetidas é um conceito-em-ação. Do mesmo modo, também é um conceito-em-ação o reconhecimento de que a divisão é uma subtração sucessiva de um mesmo número. Na Figura 4, temos um protocolo de um estudante que possui este conceito-em-ação:

Figura 4 – Pensamento aditivo nos procedimentos de cálculo/Divisão



Fonte: Dados da pesquisa.

Ao ser entrevistado, o estudante que produziu este protocolo explicou*: Como eu queria dividir por 4, eu fiquei pensando qual é o número que eu tinha que tirar quatro vezes do 24 até não ter mais sobra. Eu faço isso e só não dá certo quando os números são muito grandes.*

Trata-se de um conceito-em-ação presente num esquema, que, segundo o próprio estudante, é pouco efetivo, pois, com números maiores, que não fazem parte do repertório numérico dos estudantes, torna-se pouco prático. Considerando que nossos sujeitos vêm estudando a estrutura multiplicativa pelo quarto ano consecutivo, assim como Barbosa e

Oliveira (2018), ponderamos quanto tal ensino tem favorecido pouco o desenvolvimento de procedimentos de cálculo mental. A ação da escola de limitar o ensino do campo multiplicativo à soma de parcelas repetidas e à reprodução dos algoritmos da multiplicação e da divisão, impede a construção de outros conceitos e propriedades do campo multiplicativo. Como Barbosa e Oliveira (2018, p. 14) salientam: *isso também pode ser a causa do elevado número de erros de cálculo e da falta de habilidade dos estudantes para refletir sobre os resultados errados que produziram.*

No nível 3 ou nível do pensamento multiplicativo, a estratégia que o estudante utiliza passa, necessariamente, pela estrutura multiplicativa. Frente às situações problema, nossos sujeitos cujas respostas se enquadram neste nível optaram pela multiplicação ou pela divisão. Ao optarem pela multiplicação em Q7, por exemplo, os estudantes encontraram 96 ou, quando erravam os cálculos, encontravam outros números, mas, em todos os casos, os números foram maiores que 24, medida da área dada.

Embora a escolha da multiplicação ou da divisão para resolver as questões já sugira a existência de teoremas-em-ação, chamou nossa atenção o fato de os estudantes não atentarem para o quanto as respostas que obtinham eram absurdas, uma vez que a dimensão conhecida do retângulo é um número maior que 1 e, nessas condições, é impossível que a medida da área seja um número menor que os correspondentes às medidas das dimensões. Mesmo entre os 8 estudantes que optaram pela divisão em Q7, 3 cometeram erros nos cálculos, produzindo resultados absurdos, e não se deram conta disso. Dados como esses nos levam a inferir que os estudantes vivenciam um ensino que prioriza a reprodução mecânica de algoritmos e fórmulas. A entrevista com um destes estudantes reforça nossa inferência:

> Pesquisadora: O que você pensou quando achou 96.
> Estudante: Nada! Fui fazer logo a questão 8.
> Pesquisadora: Quando você acha um resultado, você não pensa se ele está certo ou errado?
> Estudante: Não! Eu pensei muito, mas muito mesmo, mas na hora que estava fazendo a questão. Quando eu acabei, fui logo fazer a outra.

Como podemos observar nesta transcrição, o estudante não compreende a necessidade de pensar sobre os resultados que encontra quando soluciona um problema.

Nos Quadros 4 e 5 a seguir apresentamos, por questão, a operação escolhida e a quantidade de erros de cálculo que encontramos:

Quadro 4 – Quantitativo de erros de cálculo, por operação, em Q5

Questão 5

	Sem erro de cálculo	Com erro de cálculo
Multiplicação	17	0
Divisão	0	0

Fonte: Elaborado pela autora.

Quadro 5 – Erros de cálculo, por operação, em Q7

Questão 7		
	Sem erro de cálculo	Com erro de cálculo
Multiplicação	7	5
Divisão	5	3

Fonte: Elaborado pela autora.

Ainda levando em conta os procedimentos de cálculo, é importante observar que em Q5 não houve erros de cálculo. Sobre este fato, Barbosa e Oliveira (2018, p. 17) inferem que *ele se deve aos números envolvidos na questão. 3 e 5 são números pequenos cujo produto consta nas tabuadas que boa parte dos estudantes brasileiros são levados a memorizar desde cedo.*

Assim, é possível que, nas situações em que os números sejam maiores e não constem nas tabuadas usuais, a quantidade de erros para este tipo de questão aumente consideravelmente.

Considerações finais

A análise dos resultados nos permite fazer duas considerações: uma do ponto de vista quantitativo e outra do ponto de vista qualitativo. Embora não seja o foco deste artigo, no que diz respeito ao ponto de vista quantitativo, destacamos o alto índice de erros nas duas situações analisadas e, principalmente na questão em que o produto é dado e solicita-se um dos fatores. Estes dados nos levaram a destacar a importância do professor que ensina matemática no Ensino Fundamental diversificar as situações problema do campo conceitual multiplicativo que propõem aos estudantes não só entre as classes sugeridas por Magina, Santos e Merlini (2014), mas, numa mesma classe, abordar as várias possibilidades de situar a incógnita e os dados necessários às resoluções das situações como sugerem Franchi (1999) e Moreira (2002).

Com relação à análise qualitativa, a partir das estratégias empregadas pelos estudantes, identificamos três níveis de raciocínio (incompreensível, aditivo e multiplicativo). No nível do pensamento aditivo, identificamos, ainda, dois subníveis: um em que o estudante soma aleatoriamente os dados presentes no enunciado e outro em que o estudante confunde o conceito de perímetro com o conceito de área. Em todas as questões, observamos o privilégio das representações numéricas em detrimento das representações pictóricas e inferimos que este fato se deva a um ensino pautado na reprodução de algoritmos. Acreditamos que tal fenômeno pode implicar, por sua vez, na reduzida capacidade dos estudantes de avaliarem as repostas, muitas vezes absurdas, que fornecem para as situações problema.

Num entendimento superficial, os resultados apresentados neste estudo podem provocar uma visão pessimista em relação à aprendizagem do campo multiplicativo nos anos finais do Ensino Fundamental. Porém, embora os estudantes tenham produzido muitos erros no teste, a análise de seus registros e suas entrevistas revelam também conceitos e teoremas-em-ação, ou seja, não é correto supor que os estudantes nada sabem sobre as estruturas multiplicativas. Destacamos aqui o domínio total e/ou parcial dos algoritmos da multiplicação e da divisão, a compreensão da reversibilidade entre adição e subtração e multiplicação e divisão, a associação da multiplicação à soma de parcelas repetidas e a divisão à subtrações sucessivas. É evidente que esses conhecimentos não são suficientes para afirmarmos que os estudantes já dominam o campo multiplicativo, entretanto podem servir de ponto de partida para um trabalho mais consciente do professor no sentido de promover a construção de demais conceitos pertencentes a este campo conceitual.

Referências

BARBOSA, G. S.; OLIVEIRA, C. Produto de medidas: analisando as estratégias de resolução de problemas de estudantes do 7º ano do ensino fundamental. **Com a palavra, o professor**. Vitória da Conquista: v. 3, n. 3, p. 154-178, setembro-dezembro 2018.

FRANCHI, A. Considerações sobre a teoria dos campos conceituais. In Alcântara Machado, S.D. et al. (1999). **Educação Matemática: uma introdução**. pp. 155-195. São Paulo: EDUC, 1999.

GOLDENBERG, E. P. Quatro funções da investigação na aula de Matemática. **Investigações matemáticas na aula e no currículo**, p. 35-49, 1999.

LUNA, J. M. O. **As concepções e as crenças do professor sobre a multiplicação e a divisão para ensinar crianças de anos iniciais**. 2017. 148f. Dissertação (Mestrado em Educação, Cultura e Comunicação em Periferias Urbanas) – Faculdade de Educação da Baixada Fluminense, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Duque de Caxias, 2017.

MAGINA, S.; CAMPOS, T; NUNES,T., GITIRANA,V. **Repensando adição e subtração**: Contribuições da Teoria dos Campos Conceituais. São Paulo: PROEM, 2001.
___________; MERLINI, V; SANTOS, A. A estrutura Multiplicativa sob a ótica da Teoria dos Campos Conceituais: uma visão do ponto de vista da aprendizagem. **3º Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**. Fortaleza: Universidade Federal do Ceará, v. 1, p. 1-12, 2012.

____________; SANTOS, A; MERLINI, V. O raciocínio de estudantes do Ensino Fundamental na resolução de situações das estruturas multiplicativas. **Ciência & Educação** (Bauru), v. 20, n. 2, 2014.

MILAGRE, P. H. **Proporção simples:** análises de situações elaboradas por professores em um processo formativo. 2017. 175f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus, 2017.

SANTOS, A. **Formação de professores e as estruturas multiplicativas:** reflexões teóricas e práticas. 1. Ed. Curitiba: Appris, 2015.

SOUZA, E. I. R. **Estruturas multiplicativas:** concepção de professor do ensino fundamental.107f.Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus, 2015.

VERGNAUD. G. **La théorie des champsconceptuels. Recherches en Didactique des Mathématiques**, 10 (23): 133-170, 1990.

VERGNAUD, G. Teoria dos campos conceituais. In Nasser, L. (Ed.) **Anais do 1º Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro**. p. 1-26. Rio de Janeiro: UFRJ, 1993.

VERGNAUD, G. Multiplicative conceptual field: what and why? In Guershon, H. and Confrey, J. (1994). (Eds.) **The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics**. Albany, N.Y.: State University of New York Press. pp. 41-59, 1994.

VERGNAUD, G. Algunas ideas fundamentales de Piaget en torno a la didáctica. **Perspectivas**, 26(10): 195-207, 1996.

VERGNAUD, G. A comprehensive theory of representation for mathematics education. **JournalofMathematicalBehavior**, 17(2): 167-181, 1998.

Submetido em Abril de 2019

Aprovado em Maio de 2019