



Descubrimiento y Generalización de Patrones, una exploración en el Aprendizaje del Álgebra

Discovery and generalization of patterns, an exploration in the learning of algebra

Luis Rolando Padilla¹

Evelin Johana Lagos²

Lilian Nohemy López³

Josué Alejandro Izaguirre⁴

RESUMO

El siguiente documento contiene, de manera breve, la fundamentación teórica, sobre la que hemos concebido como base para justificar la aplicación del proyecto de investigación, y algunos resultados sobre el proyecto el cual trata sobre la exploración del potencial del alumno de 7mo grado de aprender algebra a través del descubrimiento y generalización de patrones, que es el foco del proyecto, teniendo en cuenta las implicaciones históricas, cognitivas, pedagógicas y didácticas., y mostrando los resultados más relevantes. El proyecto es una investigación cualitativa, utilizando la didáctica de la resolución de problemas, para intentar introducir a los alumnos en el aprendizaje del álgebra de una manera más productiva.

PALAVRAS-CHAVE: álgebra, aritmética, patrón, generalización, variable.

ABSTRACT

The following document contains, briefly, the theoretical foundation, on which we have conceived as a basis to justify the application of the research project, and some results about the project which deals with the exploration of the potential of the 7th grade student to learn algebra through the discovery and generalization of patterns, which is the focus of the project, taking into account the historical, cognitive, pedagogical and didactic implications, and showing the most relevant results. The project is a qualitative research, using the didactics of problem solving, to try to introduce the students in the learning of the algebra in a more productive way.

KEYWORDS: algebra, arithmetic, pattern, generalization, variable.

¹ UPNFM – Honduras. luis.rockmat@gmail.com.

² UPNFM – Honduras. johanalagos12@gmail.com.

³ UPNFM – Honduras. lilianohemy@gmail.com.

⁴ UPNFM – Honduras. alejandroche85@gmail.com.

Introducción

Para comenzar, es importante señalar que este trabajo, es una versión ampliada del documento presentado en el Seminario Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEM) el 04 de noviembre de 2018 en Foz do Iguaçu-PR, Brasil, el cual fue titulado “Exploración del Potencial para Aprender Álgebra a través del Descubrimiento y Generalización de Patrones”, y fue publicado en los anales del evento, en el grupo de trabajo 2 (GT2), y ambos están basados en una investigación realizada en Honduras en el año 2009, como parte de un proyecto de investigación en la Universidad Pedagógica Nacional “Francisco Morazán” (UPNFM). Aclarado este punto podemos continuar diciendo que como estudiantes y profesores de matemáticas hemos podido observar la dificultad en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en todo nivel educativo en especial en el nivel medio, específicamente al momento de introducir a los estudiantes al estudio del álgebra. Ursini (1996, p. 423) señala que los “problemas subsisten cuando se tratan de manipular los símbolos literales o usarlos en problemas que requieren de una simbolización algebraica para su solución”, esto es porque los estudiantes aún no comprenden el verdadero significado de variable. Los problemas que tienen que ver con la enseñanza y el aprendizaje del álgebra subrayan la crisis de la enseñanza tradicional que vivimos en las aulas en la mayoría de los colegios públicos nacionales. Es necesario inducirlos a la elaboración de estrategias que le permitan comprender el verdadero significado de conceptos matemáticos específicamente los del álgebra. Romero y otros autores (2007), en su artículo “Iniciación al álgebra a través de actividades funcionales y de generalización” señalan que los obstáculos cognitivos principales de la enseñanza tradicional están ligados a la aritmética que frecuentemente se enfoca en los resultados de los procesos de cálculo más que en los aspectos relacionales y estructurales, y son los que se oponen al desarrollo del pensamiento algebraico.

Es reconocido que la actividad matemática consiste en la búsqueda de regularidades y patrones con el objeto de establecer generalizaciones y a partir de ellas hacer predicciones. Un acercamiento al álgebra puede lograrse a través de actividades de generalización que implican el reconocimiento y manipulación de objetos matemáticos. Por otra parte Ursini (1996) propone “La necesidad de diseñar ambientes especiales para ayudar a los alumnos a acercarse a nociones matemáticas nuevas usando sus conocimientos previos como soporte”. Manuel Cardona (2007), dice que al analizar el Currículo Nacional Básico (CNB, 2005) se encuentra, en el tercer

ciclo, unidades de álgebra referidas a ecuaciones en las que la metodología propuesta hace hincapié en la estrategia de la resolución de problemas como medio para propiciar el desarrollo del pensamiento matemático. Además, el CNB en la descripción del currículo de matemáticas para el tercer ciclo (Pág. 10) define a la matemática como una disciplina que sistematiza la capacidad intuitiva del ser humano de poder encontrar las ideas necesarias para resolver problemas.

Los profesores de matemáticas han transmitido a los alumnos una idea incompleta del significado del álgebra considerándola como la manipulación de símbolos con actividades de simplificación de expresiones algebraicas o de resolución de ecuaciones o inecuaciones. Claro está que estas actividades son fundamentales y constituyen las raíces históricas del álgebra, pero el álgebra es más que manipular símbolos. Según el NCTM (2000) los estudiantes necesitan comprender (del álgebra) sus conceptos, las estructuras y principios que rigen la manipulación de símbolos y cómo pueden usarse éstos para registrar ideas y ampliar su comprensión de las situaciones y además en los últimos grados de la educación básica se debe estimular el desarrollo del pensamiento algebraico de los alumnos con actividades transitorias entre la aritmética y el álgebra. Operar con símbolos en la simplificación de expresiones algebraicas o en la resolución de ecuaciones, es tan solo una dimensión de lo que significa aprender álgebra cuyo concepto es más amplio; está relacionado con una lista considerable de habilidades de la mente. Esa habilidad se desarrolla cuando los estudiantes viven experiencias de aprendizaje significativas que conducen a la comprensión de conceptos matemáticos, dentro de las cuales está el reconocimiento y generalización de patrones.

Identificación y Generalización de Patrones

La habilidad de generalizar se refiere a la posibilidad de encontrar patrones numéricos o geométricos; un “patrón” es una secuencia de elementos que tienen una regla o un orden. Pueden ser clasificados como patrones: repetidos y crecientes. Los patrones repetidos son aquellos que tienen una secuencia fija de elementos que se repiten. En cambio, los patrones crecientes son los que tienen elementos que cambian según una regla. Según el Glosario de Términos Matemáticos (2009), el concepto de patrón es esencial en matemáticas. Sin tener conciencia de ello, los estudiantes trabajan con patrones mucho antes, incluso, de aprender a sumar. En cuanto a generalizar, se puede decir que es hacer juicio desde lo particular, es decir,

tomar de la observación empírica de un caso o casos particulares y llevarlos a la universalización. Normalmente cuando se repite un caso particular existe la tendencia a generalizar, cuanta mayor repetición existe en la experiencia particular más fuerte es la generalización.

¿Aprendemos álgebra descubriendo patrones?

Reconocer patrones, describirlos y expresar esos patrones de diferentes maneras es una de las claves para la generalización en matemáticas. Se han propuesto en investigaciones como las de John Mason (apud CASALLAS, ESTRELLA, 2001), varias aproximaciones posibles que pueden conducir a los estudiantes a la construcción de fórmulas: la visualización; la manipulación de la figura en la cual se basa el proceso de generalización, facilitando, en relación con ésta, la construcción de la fórmula; la formulación de una regla recursiva que muestra cómo construir los términos siguientes a partir de los precedentes; y el hallazgo de un patrón que los guíe directamente a la fórmula.

Es importante reconocer que este proceso de acercamiento de un pensamiento numérico al algebraico (generalización de patrones) ha presentado, a través de la historia, muchas dificultades y una ruptura entre lo concreto y lo abstracto. Por lo que el papel del docente consiste en el diseño de estrategias metodológicas que inicien con situaciones problemas que permitan analizar, organizar y modelar situaciones tanto de la vida diaria del estudiante como de otras disciplinas científicas y que conlleven a procesos de generalización de expresiones algebraicas.

La enseñanza de la matemática basada en la resolución de problemas desde la concepción de “hacer matemática”.

Según Polya (apud CANALES, CASTRO, 2007) sobre la matemática como una actividad, para un matemático, que es activo en la investigación, la matemática puede aparecer algunas veces como un juego de imaginación: hay que imaginar un teorema matemático antes de probarlo; hay que imaginar la idea de la prueba antes de ponerla en práctica, y siguiendo esta idea, a los estudiantes se les debe brindar alguna oportunidad de resolver problemas en los que primero imaginen y luego prueben alguna cuestión matemática adecuada a su nivel.

La utilización de los términos “problema” y “resolución de problemas” ha tenido múltiples significados a través de los años, un primer significado es el de resolver problemas como parte del contexto, es aquí donde los problemas son utilizados para mostrar el valor de la matemática en la resolución de algunos problemas relacionados con experiencias de la vida cotidiana. Esto es, la resolución de problemas es vista como un facilitador de logro de otros objetivos. Un segundo significado es resolver problemas como una habilidad, es decir, que el estudiante sea capaz de resolver problemas una vez que haya resuelto problemas rutinarios, esta es una habilidad superior, que se adquiere a través del aprendizaje de conceptos y desarrollo de destrezas matemáticas. Y el tercer significado es el que ocupa nuestro interés, debido a que concibe la resolución de problema como “Hacer Matemática”.

Según Vilanova (2003), este significado se basa en “creer que el trabajo de los matemáticos es resolver problemas y que la matemática realmente consiste en problemas y soluciones”. Para Rico (apud CASALLAS, ESTRELLA, 2001), desde la educación matemática, las estrategias se definen como las formas de actuación o ejecución de tareas matemáticas, que se ejecutan sobre representaciones de conceptos y relaciones. Las estrategias operan dentro una estructura conceptual y supone cualquier tipo de procedimiento que pueda ejecutarse, teniendo en cuenta las recomendaciones y los conceptos implicados. Según Cardona (2007): “Con la resolución de problemas se pretende que el alumno aplique y adapte diversas estrategias para resolver un problema. La diversidad de estrategias con las que cuenta un alumno va a depender de su capacidad para conectar sus ideas o conceptos matemáticos con la situación que está resolviendo. Cuando los estudiantes pueden conectar sus ideas matemáticas, su comprensión es más profunda y duradera. Pueden ver conexiones entre los temas matemáticos, en contextos que relacionan las matemáticas con otras disciplinas y en sus propios intereses y experiencias”.

¿Cuál es el énfasis que se propone en las concepciones actuales de la Matemática?

Los principios y estándares para la educación matemática (S.A.E.M., 2000), proponen una manera integral para llevar a cabo currículos matemáticamente sólidos, formar profesores competentes y por supuesto que los estudiantes reciban una formación matemática de calidad.

En dichos estándares se sugiere que los programas de enseñanza deberían capacitar a los estudiantes en cuanto al álgebra para:

- Comprender patrones, relaciones y funciones.
- Representar y analizar situaciones, estructuras matemáticas utilizando símbolos algebraicos.
- Usar modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas.
- Analizar el cambio en contextos diversos.

Por otra parte, en Honduras el Currículo Nacional Básico (CNB) es el documento que comprende las expectativas de logro a nivel nacional. Dicho documento señala que, en la enseñanza, la matemática es una disciplina vinculada al desarrollo de las estructuras del pensamiento lógico, la capacidad de abstracción, a los procesos deductivos e inductivos y en la capacidad de síntesis y análisis. Con la apropiación de procesos y métodos de carácter cuantitativo, simbólico y gráfico, se cuenta con un instrumento de apoyo indispensable para los diferentes campos del saber.

Metodología

Este estudio es una investigación de tipo cualitativo, con el fin de explorar el potencial para aprender álgebra que puede desarrollarse en los estudiantes de 7° grado a través del reconocimiento y generalización de patrones. Los investigadores se interrelacionan con el objeto de estudio y tratan de entender las acciones de los estudiantes cuando se plantean patrones geométricos y numéricos.

La población estudiada fueron los estudiantes que cursaron el 7° grado sección “U” del Instituto Evangélico “Desarrollo Integral” de la Colonia El Pedregal, en Comayagüela, M.D.C., Honduras. La muestra fue un grupo de 13 estudiantes, que estaban entre las edades de 11 y 13 años. Dichos estudiantes deberían poseer conocimientos básicos de aritmética, es decir, hacer uso adecuado de las operaciones básicas (suma, resta, multiplicación, división y cálculo de potencias) con números naturales.

Para la recolección de información se utilizó la investigación acción como método de investigación cualitativa, se aplicó una prueba diagnóstica, se propusieron actividades en las cuales los estudiantes pudieran reconocer diferentes patrones (numéricos y geométricos) utilizando diferentes estrategias para lograr generalizarlos. Se aplicaron pruebas escritas, se realizaron algunas entrevistas para discutir las estrategias; se registraron ideas de interés que surgieron en la interacción con los estudiantes y en las observaciones directas sobre el

desempeño de éstos, durante las actividades. En total se hicieron cinco encuentros con los alumnos, comenzando con una prueba diagnóstica, continuando con tres sesiones de trabajo, y finalizando con la aplicación de una prueba final.

Se analizó la situación de la enseñanza del álgebra en séptimo grado, a través de la inspección de algunos textos de apoyo, que son los utilizados por los profesores (algunos son de los proporcionados por la secretaría de educación, y otros varían según el profesor), se identificaron dificultades en los estudiantes para manipular variables cuando se introduce al estudio del álgebra. Además se realizaron actividades para apoyar a comprender y manipular expresiones algebraicas. Uno de los propósitos fue elaborar una guía de ejercicios con patrones geométricos y numéricos que puede servir al docente para despertar en los estudiantes el interés, mejorando así el proceso de Enseñanza-Aprendizaje. Con cada secuencia de figuras o números se permitió en primer lugar, que los estudiantes trabajaran individualmente, luego en una ocasión discutieron en equipos, y siempre se discutía con el grupo en general. En último lugar, se aplicó una prueba al final de todo el proceso.

Descripción de los Instrumentos de Recolección de Información

Prueba Diagnóstica: Esta se realizó para conocer si los estudiantes poseían los conocimientos básicos de aritmética, tales como suma, resta, multiplicación y división con números naturales, así también la jerarquización de dichas operaciones combinadas, ella incluía dos ejercicios de reconocimiento de patrones (“Fáciles”), dos ejercicios con operaciones combinadas, una división de un número de tres dígitos por uno de dos dígitos y cuatro ejercicios de potenciación.

Guía de ejercicios: incluía siete ejercicios de identificación de patrones los que se desarrollaron en la prueba diagnóstica, durante las visitas y en la prueba final.

Con observaciones directas: se registró cada evento de interés en el desempeño de los estudiantes durante todo el proceso y las ideas importantes discutidas. Las actividades que se realizaron comprendieron el planteamiento del problema en la pizarra y los estudiantes lo trabajaron individualmente en una hoja de papel que entregaron al final de cada visita. Al inicio de cada visita se realizó una discusión grupal, donde se expusieron todas las estrategias utilizadas en la solución de los ejercicios planteados en la visita anterior.

Prueba Final: consistió de dos problemas sobre el reconocimiento y generalización de patrones uno de nivel medio y el otro de mayor dificultad.

Análisis de Datos

Se realizó un análisis de tipo cualitativo de la prueba diagnóstica, la prueba final y de las actividades realizadas en cada visita, así como, de las observaciones directas buscando evidencias de cómo los estudiantes pueden desarrollar un potencial para el aprendizaje del álgebra.

Dicho análisis consistió:

Prueba diagnóstica: se revisó detenidamente cada prueba, observando cada una de las estrategias utilizadas por los estudiantes en la resolución de los problemas presentados. Los datos se presentan en una tabla de doble entrada y en su respectivo análisis se describen las estrategias utilizadas y las dificultades en cada problema.

Actividades de aprendizaje: se hizo una comparación entre los diferentes datos registrados a través de las observaciones directas y hojas de trabajo; para observar los cambios en las estrategias utilizadas en la resolución de los problemas durante todo el proceso de las visitas.

Prueba final: se analizó de acuerdo a las estrategias empleadas por los estudiantes para conocer si en realidad demuestran cierta habilidad para trabajar en el reconocimiento de patrones y la generalización de éstos.

Prueba diagnóstica

El interés fue observar qué tipo de estrategias utilizaron los estudiantes para llegar a la solución, no era tan importante obtener una respuesta correcta sino qué proceso seguían. En el caso de aquellos ejercicios en los que se pretendía explorar sus conocimientos previos solo se consideró importante que mostraran nociones sobre:

- Utilización de la jerarquía de las operaciones aritméticas
- Operaciones correctas con números naturales
- Propiedades de Potenciación
- División de números enteros particularmente por un número de dos cifras.

También se analizó el desempeño de los alumnos al enfrentarse por primera vez a problemas de descubrimientos de patrones, con el objetivo de inducirlos al concepto de patrón e prepararlos para la siguiente sesión.

A continuación se presentan la tabla que resumen los resultados obtenidos por los estudiantes en los ejercicios de exploración de sus conocimientos previos y problemas con patrones. Todos los datos mostrados en las tablas y las figuras, fueron tomados directamente de los instrumentos de colecta de datos trabajados con los alumnos en las sesiones.

Tabla No. 1: Cantidad de estudiantes que evidencian o no tener algunos conocimientos previos para desarrollar el pensamiento algebraico.

Conoci- mientos Evidencian que:	Utilizan la Jerarquía de operaciones	Operan con números naturales	Expresan un número en forma de potencia	Encuentran la potencia de un número	Dividen por un número de dos cifras
No Domina	11	1	4	2	8
Domina	2	12	9	11	5

Fonte: Datos da pesquisa

Al principio se notó que los estudiantes mostraban cierto rechazo hacia la prueba, situación que se fue disipando a medida transcurría el tiempo. Posiblemente porque hayan intervenido varios factores como ser la presencia nuestra (desconocidos) por primera vez y el impacto psicológico de una prueba imprevista.

Algunas evidencias sobre las dificultades encontradas se presentan a continuación:

Según los resultados presentados en la tabla anterior se puede decir que los estudiantes tienen dificultades con la jerarquización de las operaciones matemáticas. Muchos estudiantes realizaron las sumas y restas antes de los productos y divisiones, como puede observarse en las siguientes imágenes:

Figura 1

Resuelva los siguientes ejercicios:

a) $25-2[20-(10-8+1+3(4-2))]$
 $25-2[20-25+(12)]$
 $25-2(15) 2$
 $23-30$
 -7

b) $2[5+3(4+2+1)-10+2+4]-8$
 $2[5+3(3)-10+2+4]-8$
 $2(11)+6-8$
 $2(11)-8$
 -6

Fonte: Dados da pesquisa

Figura 2

Resuelva los siguientes ejercicios:

a) $25-2[20-(10-8+1+3(4-2))]$
 $23 [20-5 (2)]$
 $23 [15 \cdot 2]$
 $23 \cdot 30$
 690

b) $2[5+3(4+2+1)-10+2+4]-8$
 $2[5+3(3)-5+4]-8$
 $2[8 \cdot (3-5+4)]-8$
 $2[8 \cdot 9]-8$
 $2 \cdot 72 = 8$
 $152 = 136$

Fonte: Dados da pesquisa

Algunos estudiantes aún tenían dificultades en la división por un número de dos cifras, cometiendo errores como no tomar en cuenta si las dos primeras cifras del dividendo son menores o no que el divisor, además, solo tomaban en cuenta una de las cifras del divisor para realizar el producto con el cociente, como se muestra en la figura:

Figura 3

c) $515 \div 57$

$$\begin{array}{r} 515 \overline{) 515} \\ \underline{49} \\ 25 \\ \underline{25} \\ 0 \end{array}$$

Fonte: Dados da pesquisa

El resultado más alentador es el hecho de que todos excepto uno manejan las operaciones con números naturales y la gran mayoría las propiedades de la potenciación.

A continuación se presentan los resultados que se obtuvieron cuando los estudiantes resuelven dos ejercicios de identificación de patrones.

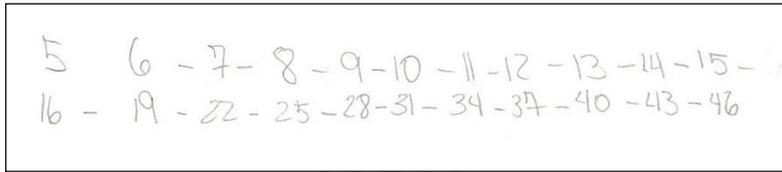
El primer problema propuesto pedía encontrar el número de llamadas hechas en un día determinado, se les proporcionó a los estudiantes la siguiente tabla:

Día	1	2	3	4	...
Nº de llamadas	4	7	10	13	...

Se les preguntó: ¿Cuántas llamadas se habrán hecho en el día 5? ¿Cuántas en el día 6?
Y finalmente, ¿Cuántas en el día 15?

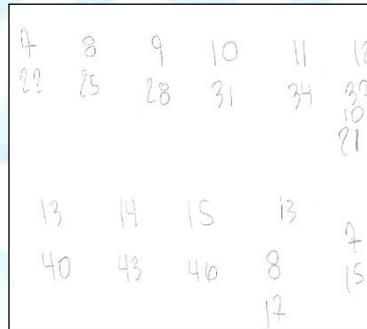
Dos alumnos lo resuelven de la siguiente manera:

Figura 4



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 5



Fonte: Dados da pesquisa

Como es de notar los estudiantes descubrieron que el número de llamadas aumentaba en tres, por lo que decidieron sumar sin importar cuantas veces debían hacerlo.

Haciendo un análisis minucioso de las acciones de cada estudiante se pueden observar los resultados generales en la Tabla No. 2.

Tabla No. 2: Descripción de los Resultados sobre el ejercicio: número de llamadas.

Cantidad de Estudiantes	Tipos de respuestas y acciones de los estudiantes para resolver el problema
8	Observaron que el número de llamadas aumentaba en tres unidades.
6	Encontraron la respuesta a las primeras dos preguntas sumando tres.
1	Sus respuestas son incorrectas debido a que hizo mal la suma para encontrar el número de llamadas el día cinco, le sumo dos unidades al número de llamadas del día cuatro.
1	Escribió una respuesta equivocada a la tercera pregunta por la estrategia que utilizó, observamos que contaba con sus dedos, y no dejó evidencia escrita.

2	Creyeron que así como aumentaba la cantidad de días también lo hacía el número de llamadas, dando una respuesta equivocada a la tercera pregunta (multiplicando por tres).
3	Encontraron la respuesta a cada pregunta sumando tres para encontrar el siguiente.
5	No resolvieron el problema.

Fonte: Dados da pesquisa

De la tabla anterior, podemos observar que la mayoría de los estudiantes tuvo un buen desempeño en la resolución del primer problema planteado. La dificultad radica básicamente en error al contar con los dedos. En general los estudiantes comprendieron el problema y comenzaron a familiarizarse con este tipo de ejercicios.

El segundo problema consistió en presentar al estudiante la siguiente sucesión de figuras:

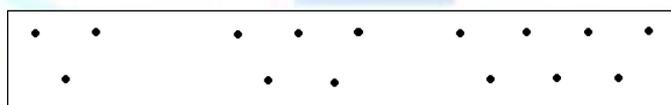


Fig. 1

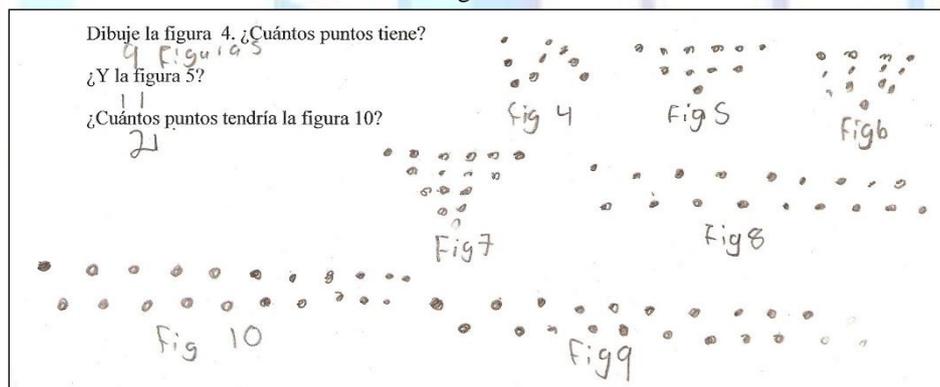
Fig. 2

Fig. 3

Y se le pedía dibujar la figura número 4 y decir cuántos puntos tendría; de igual manera la número 5, finalmente se le preguntaba cuántos puntos tendría la fig. 10.

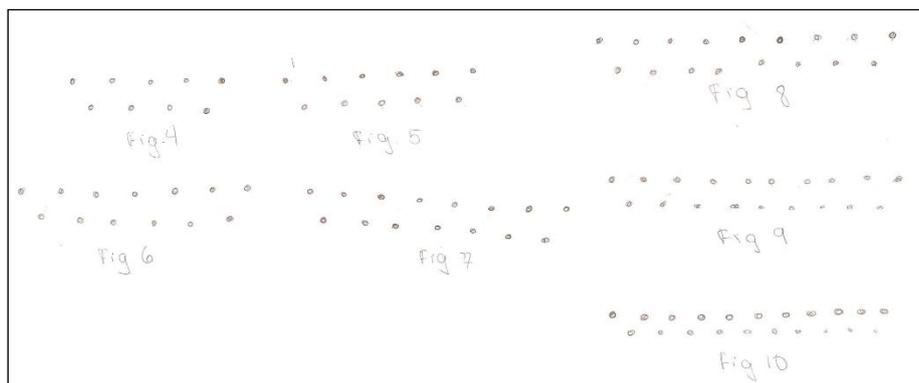
Algunos estudiantes trabajaron de la siguiente manera:

Figura 6



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 7



Fonte: Dados da pesquisa

Si observamos las figuras 6 y 7 cuidadosamente, notamos que estos dos estudiantes tienen la misma cantidad de puntos en la figura correspondiente de la secuencia dada. Esto nos hace pensar que uno de ellos encontró el patrón en el aumento de los puntos pero no en su representación gráfica. En cambio, el otro estudiante notó el patrón geométrico y se apoyó en éste para encontrar el número de puntos.

A continuación se presenta una tabla en la que podemos observar los resultados generales obtenidos por los estudiantes en el segundo problema con patrones.

Tabla No. 3: Descripción de los Resultados sobre el ejercicio: cantidad de puntos en las figuras

Cantidad de Estudiantes	Tipos de respuestas y acciones de los estudiantes para resolver el problema
9	Reconocieron que la cantidad de puntos que tenía cada figura aumentaba en dos.
9	Encontraron la respuesta a las primeras dos preguntas sumando dos.
8	Encontraron la respuesta de la tercera pregunta sumando dos unidades para encontrar el siguiente.
1	Encontró la respuesta correcta a cada pregunta pero, no dejó evidencia del trabajo realizado.
1	La respuesta de la tercera pregunta es incorrecta, no dejó evidencia del trabajo para resolverla.

6	Llegaron a las respuestas realizando el dibujo de cada figura.
1	Encontró la respuesta a cada pregunta aunque dibujó cada figura de manera singular, porque no reconoció el patrón geométrico.
4	No resolvieron el problema.

Fonte: Dados da pesquisa

La tabla No 3, deja manifiesto que entre las acciones que los estudiantes tomaron para resolver el problema fue utilizar como estrategia la representación gráfica de cada figura y luego contar sus puntos. Otros notaron que el número de puntos aumentaba en dos y les bastó sumar dos al número de puntos de la figura anterior. Las dificultades encontradas fueron errores al hacer los cálculos.

Por lo mencionado en párrafos anteriores y la información contenida en las tablas se nota que hubo mayor aceptación y comodidad de los estudiantes al estar resolviendo los ejercicios de patrones, que aquellos que pretendían comprobar los conocimientos previos, esto pudo ser debido a que los ejercicios de patrones no requieren un procedimiento mecánico ni seguir algún tipo de regla o pasos específicos.

La mayoría de los estudiantes reconoció el patrón y encontró las respuestas correctas a las interrogantes. Es posible que este interés mostrado por los alumnos, para tratar de encontrar el resultado correcto a estos problemas, sea porque es la primera vez que se enfrentaban con este tipo de problemas o quizás fueron motivados por no tener un determinado método para realizarlos. Además, ningún problema poseía preguntas específicas con respecto a los temas que se están abordando en clase.

Los resultados anteriores indican que los alumnos están interesados y poseen los conocimientos necesarios para lograr desarrollar en ellos las habilidades adecuadas para el aprendizaje del álgebra a través del descubrimiento de patrones.

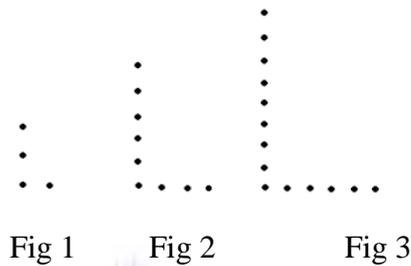
A continuación veremos resultados relevantes obtenidos en algunas de las sesiones:

Primera Sesión:

En la primera sesión con los estudiantes se realizó una discusión (15 min) de los dos problemas sobre los ejercicios de patrones planteados en la prueba diagnóstica con el propósito de explorar las consideraciones que ellos hicieron para resolverlos.

[Análisis del primer problema propuesto](#)

El problema consistió en la secuencia de figuras siguientes:



Cuyo objetivo fue que los estudiantes pudiesen descubrir el patrón para encontrar la cantidad de puntos en cada figura y poder predecir otras, encontrando primero el número de puntos de la fig. 4, luego de la fig. 5 y fig. 11, finalmente, observar si eran capaces de elaborar una expresión para saber cuántos puntos tenía una figura cualquiera que pertenece a dicha secuencia.

La primera interrogante: ¿Cuántos puntos tiene la fig. 4?, fue contestada correctamente por todos los estudiantes por lo que se puede decir que no tuvieron ningún tipo de dificultad para encontrar cuantos puntos tenía dicha figura, la estrategia que utilizaron fue sumar 5 al número de puntos de la figura anterior (habiendo descubierto previamente que la cantidad de puntos aumentaba en 5).

Resultados a la segunda interrogante: ¿Cuántos puntos tiene la fig. 5?

La mayoría de los estudiantes (10) contestaron correctamente a la segunda interrogante. De los tres estudiantes que no contestaron correctamente dos de ellos comentaron haber tenido el error al momento de realizar la suma. Y el otro estudiante dijo no haber encontrado el patrón y decidió colocar un número cualquiera.

Resultados a la tercera interrogante: ¿Cuántos puntos tiene la fig. 11?

En esta la mayoría de los estudiantes (8), encontró la respuesta correcta a esta interrogante, de los cinco estudiantes que no contestaron correctamente dos cometieron el error por haberle sumado cinco al resultado equivocado que obtuvieron en la segunda pregunta; dos estudiantes cometieron el error al sumar y el otro dijo haber dado una respuesta al azar.

Como lo vemos en las imágenes siguientes:

Figura 8: Error al sumar

¿Cuántos puntos tiene la figura número 4?
 Tiene 19 Figuras

¿Y la figura número 5?
 Tiene 25 Figuras

¿Cuántos puntos tiene la figura número 11?
 Tiene 55 Figuras

Fonte: Dados da pesquisa

Figura 9: Respuesta al azar

¿Cuántos puntos tiene la figura número 4?
 Tiene 19 puntos

¿Y la figura número 5?
 Tiene 29 puntos

¿Cuántos puntos tiene la figura número 11?
 23

Fonte: Dados da pesquisa

En general, los estudiantes no presentaron dificultades para llegar a la respuesta correcta, la mayoría identificó el patrón y logró encontrar el resultado adecuado. Aquellos que fallaron en el intento cometieron el error al calcular la suma.

Resultados a la última interrogante: Encuentre una fórmula para saber cuántos puntos tiene cualquier figura de la sucesión.

En esta solamente dos estudiantes lograron encontrar la relación entre número de figura y cantidad de puntos, otro hizo un intento de llegar a ella, los demás no dejaron muestra de haberlo intentado.

Podemos observar el trabajo que realizaron los estudiantes en las siguientes imágenes:

Figura 10: Intentó generalizar

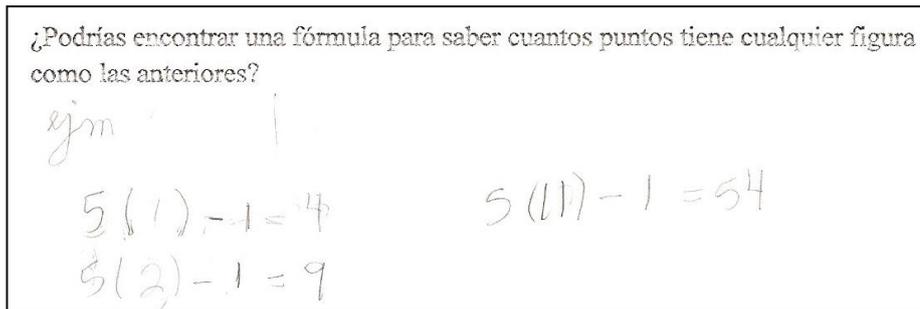
¿Podrías encontrar una fórmula para saber cuantos puntos tiene cualquier figura como las anteriores?

Fig. 1. Fig. 2 Fig. 3

$3(1)+1=4$ $8(1)+1=9$ $12(1)+2=14$

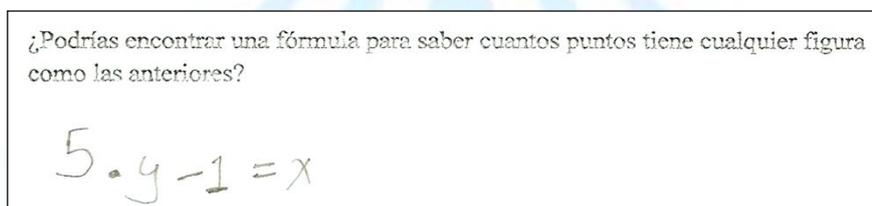
Fonte: Dados da pesquisa

Figura 11: Encontró la generalización, pero no su expresión algebraica



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 12: Logró generalizar



Fonte: Dados da pesquisa

De esta primera sesión podemos concluir que efectivamente los estudiantes hacen uso de estrategias que ya conocen, al identificar el patrón, la mayoría optó por sumar cinco al número de puntos de la figura anterior y algunos dibujaron para constatar su conjetura. Se puede decir que los errores cometidos no fueron necesariamente dificultades en la comprensión del problema sino en los cálculos que realizaron.

Luego se realizaron dos sesiones más, teniendo como objetivo principal, que los estudiantes consiguieran la generalización, en las cuales se obtuvieron los siguientes resultados:

En la segunda sesión, los estudiantes trabajaron en cuatro equipos, de los cuales tres consiguieron llegar a la generalización. Por lo anterior notamos que los resultados mejoraron cuando los estudiantes trabajaron en equipos.

En la tercera sesión, los estudiantes trabajaron individualmente solo cinco estudiantes llegaron a la generalización con éxito. Aquellos que no lo lograron, presentaron dificultades para plantearla, es decir, no fueron capaces de llevar adelante cambios de registro, dicho de otra manera, permanecieron con el planteamiento puramente aritmético y no lograron identificar uno más complejo como una expresión algebraica que reuniera los requisitos que dieran solución al problema. Además, esta dificultad no es exactamente ausencia de conocimiento,

sino como un conocimiento previo que no admite generalización a un nuevo ámbito y por ende induce a error.

Después de un proceso de familiarización de los estudiantes con las sucesiones de números y figuras, y recordando que en el final de cada sesión se hizo una discusión de los problemas propuestos, se decidió evaluar el progreso de estos, mediante una prueba. En dicha prueba se plantearon dos problemas, en los que los alumnos deberían utilizar las habilidades adquiridas en la resolución de los problemas propuestos en cada una de las sesiones. La generalización del primero era similar a los de la primera y segunda sesión, y el segundo estaba relacionado con el problema de la tercera sesión, con lo que se indujo a los estudiantes a hacer uso de las estrategias empleadas durante todo el proceso.

Prueba final:

Análisis del primer problema propuesto en la prueba final

El primer problema planteado fue el siguiente. Sabemos que los números impares son: 1, 3, 5, 7, 9,... y se les pidió a los estudiantes la generalización de los números impares y encontrar los siguientes dos números utilizando dicha generalización. Hubo cinco estudiantes que llegaron a la generalización sin ninguna dificultad. Como se muestra en la siguiente figura:

Figura 13 (Logra generalización)

1. Sabemos que los números impares son: 1, 3, 5, 7, 9,... Encuentra su generalización.

$$2(n) - 1 = y$$

$$3 \times 2 - 1 = 5$$

$$4 \times 2 - 1 = 7$$

Fonte: Dados da pesquisa

Los ocho restantes fallaron en plantear la generalización, teniendo dificultades para descubrir la expresión algebraica correcta, descubrieron cierto patrón pero de manera recursiva, como se muestra en las siguientes figuras.

Figura 14 (Descubre el patrón pero no consigues generalizar)

Sabemos que los números impares son: 1, 3, 5, 7, 9, ... Encuentra su generalización.
 al primer numero se le suman 2 y de este modo se sigue $N+2$

Fonte: Dados da pesquisa

En el segundo inciso la dificultad estuvo relacionada con el hecho de no haber encontrado la generalización en el primer inciso, y por eso no les fue posible encontrar los siguientes dos números impares

Entre las estrategias utilizadas encontramos, una vez más, el ensayo-error. Al igual que la particularización y generalización. De las estrategias y dificultades observadas, se hablara en detalle en párrafos posteriores, debido a que existe una similitud con las del segundo problema.

Análisis del segundo problema propuesto en la prueba final

El segundo problema planteado fue el siguiente: Necesitamos conocer la suma de los números impares. Si sumamos los primeros 2 números impares obtendríamos: $1 + 3 = 4$. Ahora veamos que sucede si sumamos los primeros 3 números impares, el resultado es: $1 + 3 + 5 = 9$. El problema contenía cuatro interrogantes cuyos resultados se presentan seguidamente.

Todos los estudiantes encontraron la respuesta correcta a la primera, segunda y tercera interrogante. Las cuales fueron: ¿Sabes cuál es el resultado de sumar los primeros 4 números impares?, ¿Cuál es la suma de los primeros 5? y ¿Cuál sería la suma de los primeros 10 números impares? Todos encontraron las respuestas sumando cada uno de los números impares, como se observa en las siguientes figuras.

Figura 15

¿Sabes cuál es el resultado de sumar los primeros 4 números impares?
 $1+3+5+7=16$

¿Cuál es la suma de los primeros 5?
 $1+3+5+7+9=25$

¿Cuál sería la suma de los primeros 10 números impares?
 $1+3+5+7+9+11+13+15+17+19=100$

Fonte: Dados da pesquisa

Resultados a la última interrogante: ¿Cuál es la generalización?

En este caso a mayoría pudo llegar a la generalización, y algunos fueron capaces de descubrir el patrón pero no escribieron la expresión que produce la respuesta. Esto queda manifestado en las siguientes figuras.

Figura 16

¿Cuál es la generalización?

$$2 \cdot 2 = 4$$

$$3 \cdot 3 = 9$$

$$10 \cdot 10 = 100$$

$$Y \cdot Y = Y^2$$

Fonte: Dados da pesquisa

Figura 17

¿Cuál es la generalización?

se multiplica la cantidad de numeros por el mismo

$$N \times N = N^2$$

Fonte: Dados da pesquisa

Los que no alcanzaron plantear la generalización fue porque no llegaron a realizar cambios de registro, es decir, no pudieron pasar del registro aritmético al algebraico. Como se muestra en la siguiente figura.

Figura 18

¿Cuál es la generalización?

Multiplicando

$$4 \times 4 = 16$$

$$5 \times 5 = 25$$

$$10 \times 10 = 100$$

Fonte: Dados da pesquisa

En general, los estudiantes utilizaron varias estrategias que fueron descubriendo durante todo el proceso en cada una de las sesiones, una de las más destacadas fue ensayo-error, los estudiantes probaron con una expresión algebraica que cumpliera las condiciones necesarias para lograr generalizar, cuando no resultaba el valor correcto probaban de otra manera modificando las operaciones con las variables. Otra estrategia destacada fue particularización y generalización, a veces el problema visto en su conjunto resulta inabordable, entonces para empezar se puede abordar una parte de él que parezca más simple, los problemas planteados permitieron a los estudiantes enfrentarlos de esta manera y así muchos obtuvieron éxito. Además, es necesario mencionar que dentro de las estrategias que utilizaron estuvo la búsqueda de problemas similares a los trabajados en las sesiones. En cuanto a las dificultades, la que más sobresale es aquella relacionada con el paso de la aritmética al álgebra; esto se debe porque no solo era necesario descubrir el patrón y saber hacer los cálculos aritméticos, sino también, hacer un cambio de representación en la que se hace uso de variables, es decir, utilizar el lenguaje algebraico.

Consideraciones finales

En resumen puede decirse que el aprendizaje del álgebra es más efectivo cuando se realizan actividades adecuadas para que los estudiantes asimilen mejor el lenguaje algebraico. Vale la pena mencionar que los problemas planteados en las hojas de trabajo y en la prueba final, al igual que las discusiones realizadas con los estudiantes han servido como guía en el desarrollo de sus habilidades en matemáticas. Es importante señalar que el profesor juega un papel fundamental en la creación de oportunidades en las que los estudiantes se enfrenten con situaciones en las que deben conjeturar, comparar y hacer uso de diferentes representaciones, es decir, deben ser capaces de utilizar tanto el lenguaje aritmético como el algebraico.

Los estudiantes utilizan diversas estrategias para llegar a generalizar un patrón, valiéndose, en primer lugar, de sus conocimientos previos, después, al obtener algunas herramientas como entender lo que representa una letra en distintos contextos en matemáticas, la mayoría fue capaz de manipular ciertas operaciones con números y letras para llegar a generalizar un patrón.

Las estrategias más utilizadas fueron ensayo-error y abordar el problema comenzando con lo fácil. Aquellos estudiantes que no lograron plantear la generalización tuvieron dificultad para llevar adelante cambios de registro, fueron capaces de ver el patrón, saber cuál era su

comportamiento e incluso predecir términos sucesivos, pero fueron incapaces de decir cómo se comportaba de manera general usando, ya no un lenguaje puramente aritmético, sino el lenguaje algebraico.

Las conexiones que realizan estos estudiantes para generalizar un patrón radican en las asociaciones que hacen entre problemas que ya habían resuelto en las primeras sesiones y aquellos que debían resolver más adelante sin dejar de un lado sus conocimientos previos de aritmética. Buscan similitudes entre el comportamiento de un patrón y otro, así como también la manera en la que difiere cada elemento de la misma sucesión, ya sea de números o figuras, en los problemas propuestos.

Las actividades realizadas lograron apoyar el potencial para encontrar relaciones en la mayoría de los estudiantes para comprender el uso de las letras en representación de números generales en matemáticas. Cada actividad motivó a los alumnos a crear por si mismos una expresión que involucrara literales y operaciones con estas; los problemas propuestos y discusiones realizadas enfrentaron a los estudiantes con la necesidad de encontrar un patrón y poder “describir” el comportamiento de éste de manera general, con lo que se logra hacer más fácil el camino para aprender álgebra. Aquellos que no lo lograron pueden llegar hacerlo siempre que se dedique un poco más de tiempo a las etapas de observar y escribir una expresión que represente un patrón.

Evidentemente, hubo un progreso en los estudiantes tanto en su motivación para resolver problemas como para hacer uso de un nuevo lenguaje en el que no sólo los números juegan un papel fundamental sino también el uso de variables. Enfrentar a los alumnos a situaciones nuevas en las que ellos sean los creadores de las expresiones algebraicas y, además, puedan comprobar si en realidad dichas expresiones cumplen con los requisitos planteados en algún problema desarrolla en ellos autonomía y estimula el desarrollo de habilidades lógico-matemáticas que potencian su aprendizaje del álgebra.

Referências

CANALES, M., CASTRO, E., CASTRO, E., INVESTIGACION EN MATEMATICA EDUCATIVA XI. **Patrones, generalización y estrategias intuitivas de estudiantes de 3º y 4º de las ESO en el problema de las baldosas**, 284-294. Universidad de Zaragoza, 2007, Consultada el 22/marzo/2009, Disponible en: <http://www.colciencias.gov.co/portacol/downloads/archivosContenido/66.doc>

CARDONA, M. **Desarrollo del pensamiento algebraico en alumnos de octavo grado del CIIE a través de la resolución de problemas** (Tesis de Maestría, UPNFM), 2007.

CASALLAS, L, ESTRELLA, C. **Actividades que Potencian la Interpretación de la Letra como Número Generalizado: Análisis de sus efectos en la clase de álgebra**. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia, 2001.

CNB, **Diseño Curricular Nacional para la Educación Básica**. Propuesta. Secretaria de Educación. Honduras, 2005.

GLOSARIO DE TÉRMINOS MATEMÁTICOS, consultado el 23 de julio del 2009 en http://www.miportal.edu.sv/NR/rdonlyres/B079590C-AF2A-4053-B3F7-ABC45A66D61D/0/14_METODOLOGIA_5_.pdf

NCTM, **Principles and Standards for School Mathematics**. 2000.

ROMERO R, FERNÁNDEZ L, LOYDOVER M, CHAPARRO E, MEZQUIDA H, CIPAMOCHA J. **Iniciación al Álgebra a través de actividades funcionales y de Generalización**, Colombia, 2007.

S. A. E. M. **Principios y Estandares para la Educación Matemática**. Sevilla: servicios de publicaciones de la S.A.E.M. 2000.

URSINI, S., **Creación de un potencial para trabajar la noción de variable**. México: grupo editorial Iberoamérica. pág.: 423-440, 1996.

VILANOVA, S. et al, **La resolución de problemas en la educación matemática**. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 16(2), pp. 502-509, 2003. Consultado el 17/marzo/2009, disponible en: <http://www.rieoei.org/deloslectores/203Vilanova.PDF>

Submetido em Abril de 2019

Aprovado em Maio de 2019