# DA ARGUMENTAÇÃO PARA A DEMONSTRAÇÃO: ANÁLISE DE UM PROCESSO

# *OF THE ARGUMENT FOR THE DEMONSTRATION: ANALYSIS OF A PROCESS*

Antonio Sales*

Luiz Carlos Pais**

**Resumo**

Este artigo é parte de um projeto de pesquisa de maior amplitude sobre argumentação e demonstração, em um Curso de Licenciatura em Matemática, envolvendo geometria euclidiana. Como teoria de análise foi adotada: a Teoria Antropológica do Didático e o trabalho desenvolvido por Bettina Pedemonte. Duas concepções de argumentação foram escolhidas: discurso e procedimento didático. O texto apresenta o processo de desenvolvimento da argumentação natural para a argumentação racional, distingue argumentação de prova e de demonstração e discute os diversos tipos de argumentação. Os resultados apontam para a possibilidade da passagem da argumentação para a demonstração através de um exemplo em que um teorema foi produzido.

**Palavras-chave:** Demonstração; Argumentação; Prova; Teoria Antropológica do Didático; Tipos de Argumentação;

**Abstract**

This article is part of a research project of greater magnitude on argumentation and demonstration, in a Licenciature Course in Mathematics, involving Euclidean geometry. As a theory of analysis were adopted: the Anthropological Theory of Didactics and the work of Bettina Pedemonte. Two conceptions of argumentation were chosen: speech and didactic procedure. The text presents the development process of natural reasoning to rational argumentation; distinguish the arguments of proof and demonstration, and discusses the various types of argumentation. The results indicate the possibility of passing the argumentation to demonstrate through an example in which a theorem has been produced.

**Keywords:** Demonstration; Argumentations; Proofs; Anthropological Theory of Didactics; Types of Argumentation

## Introdução

Uma atividade tipicamente matemática está envolta em um clima de demonstração, justificativa, prova e explicação envolvendo proposições, teoremas, axiomas e definições. O que não significa dizer que essas ações ocorrem necessariamente nesta ordem e que todos esses elementos estejam presentes ao mesmo tempo.

* Doutor em Educação pela Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. Docente da Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul – UEMS, Nova Andradina, Mato Grosso do Sul, Brasil. E-mail: profesales@hotmail.com

** Doutor em Educação Matemática pela Universidade de Montpellier, França. Docente da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul – UFMS, Campo Grande, Mato Grosso do Sul, Brasil. E-mail:luiz.pais@ufms.br

Em sala de aula, quando o contexto é de ensino, pode não ocorrer nenhuma dessas ações assim como pode ocorrer somente uma ou outra. Da mesma forma pode não estar presente nenhum dos conceitos elencados ou então a aula ser calcada plenamente neles. Tudo depende do modelo docente adotado. Se for tecnicista, centra-se na técnica, sendo modernista o foco está na descoberta e se for teoricista então a teoria ocupa um lugar privilegiado (GASCÓN 2003). Quando, porém, o contexto é de estudo (CHEVALLARD; BOSCH; GASCÓN, 2001) o tratamento dado à matemática da sala de aula[1] não se distancia muito do tratamento que ela recebe nos meios acadêmicos embora saibamos que a matemática escolar não é a mesma da matemática acadêmica. Admitimos que o percurso que a matemática acadêmica percorre até se tornar na matemática da sala de aula não é linear. Esse percurso é marcado por múltiplas influências que vão desde a formação dos professores até os interesses sociais, para citar apenas alguns exemplos. O saber a ser ensinado "sofre transformações adaptativas" até tornar-se apto a ocupar um lugar entre os objetos de ensino (CHEVALLARD, 2005, p. 45).

Estamos supondo que o estudo da matemática na escola deve levar em conta as características da própria ciência e a sua função formativa. É nessa perspectiva que estamos discutindo a sua função e a forma de abordagem e, embora não seja discutido no texto, estamos levando em conta: o que deve ser objeto de estudo, o porquê deve ser estudado e a forma de estudá-lo.

No âmbito da academia, demonstrar é uma ação bem delimitada, embora uma definição de demonstração não seja uma tarefa simples e parece que não tem sido mesmo objeto de preocupação por parte dos estudiosos (BICUDO, 2002). Suas características, porém, são bem conhecidas daqueles que se propõem utilizá-la em um contexto científico. A demonstração transcorre conforme regras preestabelecidas e utilizando proposições aceitas como verdadeiras.

Na Educação Matemática tem sido objeto de estudo também a argumentação. Este é um conceito mais amplo e requer algumas delimitações quando se trata da sua utilização no estudo da matemática, especialmente quando se procura relacioná-lo com a demonstração (OLÉRON, 1987; ARSAC, 1992; BRASIL, 1998). Com base nos trabalhos de Arsac e sua equipe (1992) temos considerado a argumentação em Matemática como uma categoria ampla que inclui a explicação, a justificativa, a prova e a demonstração.

## Argumentação, prova e demonstração

Argumentação é um discurso sobre algo ou sobre alguma prática e, na perspectiva teórica em que estamos inseridos, não há espaço para uma prática desprovida de uma razão para a sua existência. Essa razão pressupõe um discurso explicativo ou justificativo. A argumentação, portanto, é o indicativo de um saber e nesse sentido ela pode ser confundida com o próprio saber. Casabó (2001) pressupõe que no próprio sentido cultural a palavra compreensão traz implícita a exigência da produção de um discurso descritivo-justificativo do que deve ser feito.

[1] Deste ponto em diante trataremos da matemática escolar.

Esse saber que justifica a prática é denominado racional quando é embasado em uma teoria. Um discurso racional pode ser dedutivo, indutivo ou abdutivo (PEIRCE, 1983). Diz-se que um discurso é natural quando embasado na experiência e quando resulta da observação de fatos que se repetem certo número de vezes, com alguma regularidade, por um observador que não sistematizou o registro e não estabeleceu vínculo com nenhuma teoria. Diz-se que um argumento é folclórico quando tem por base os sentimentos, os mitos, os desejos e, muitas vezes, a ingenuidade. Há também discursos fundamentados na tradição, na prática repetida por gerações ou frequente em determinadas regiões.

Limitamos nossa concepção de argumentação a esses exemplos porque estamos interessados na sua relação com o estudo da matemática embora saibamos que no campo da linguística há outras acepções a respeito (ABREU, 2006).

De nossa parte temos admitido a possibilidade da argumentação ser adotada também como procedimento didático. Um procedimento didático que tem por base a argumentação consiste em organizar o estudo de modo a privilegiar o discurso: a explicação, a justificativa, a prova e a demonstração, não necessariamente nesta ordem. Nessa didática a argumentação em qualquer nível de complexidade e de qualquer das categorias citadas: é estimulada e praticada por todos os sujeitos envolvidos no processo. É uma didática do envolvimento e que frequentemente traz à tona toda a teoria estudada. Ela põe em evidência as relações existentes entre os diversos objetos matemáticos envolvidos, relacionando a teoria com a ação e contribui para desenvolver os raciocínios dedutivo, indutivo e abdutivo. Nessa perspectiva a demonstração é um processo e não apenas um resultado ou um ritual a ser cumprido. Ela deve ser construída pelos sujeitos ou, se já está pronta, analisada, explicada e comparada com formas alternativas.

É difícil separar a argumentação como discurso da argumentação como procedimento didático, na perspectiva exposta anteriormente. Há um imbricamento da primeira na segunda de tal modo que o discurso pode não estar vinculado a um procedimento didático, mas este não se apresenta isolado daquele. Sales (2010) desenvolveu um trabalho tendo a argumentação como discurso justificativo e como procedimento didático que resultou na experiência a ser relatada neste capítulo.

É na perspectiva da argumentação como discurso, e consequentemente como a expressão de uma forma de raciocinar, que Duval (1993) levantou a discussão sobre a possibilidade de haver uma ruptura na passagem da argumentação para a demonstração. Porém, ele está tratando do discurso natural. Textualmente: “A existência de um modo natural de raciocinar, que não pode ser descrito ou avaliado segundo os critérios canônicos da lógica, está sendo atualmente admitido. Perelman e Toulmin o designam de argumentação” (DUVAL, 1993, p. 37, tradução nossa). Estamos admitindo que o discurso é um reflexo do raciocínio e que um raciocínio natural se manifesta através de um discurso natural e parece ser este também o pensamento de Duval.

Ele admite a possibilidade de haver uma distância cognitiva entre argumentação e demonstração. No seu entender, admitir uma proximidade, isto é, que possa haver uma continuidade na passagem da primeira para segunda, implica em admitir que a linguagem natural se aproxime da linguagem formal. Nesse caso, há alguns problemas que podem ser evocados. Na linguagem natural a hipótese tanto pode significar algo possível como algo improvável o que não acontece na linguagem formal. Por outro lado, admitir uma ruptura na passagem de uma para a outra implica afirmar que o raciocínio usado na demonstração se norteia por princípios diferentes do raciocínio válido usado na linguagem natural.

Mesmo pressupondo o estudo da argumentação não se limita à argumentação natural a discussão de Duval merece atenção pelo fato de por em destaque que pode não ocorrer uma passagem da argumentação natural para a argumentação racional e também por pressupor que o discurso matemático, tipicamente racional, nos isenta da possibilidade dos equívocos que ocorrem na linguagem natural.

O que acontece, porém, é que no discurso racional também há ambigüidades porque ele se vale da língua materna e de outras formas usuais de comunicação. Até mesmo no discurso matemático, com toda a sua concisão e precisão, há ambiguidades. Há “ambiguidade no discurso matemático” e “ambiguidade do discurso” (HARIKI, 1992, p. 100), isto é, a ambiguidade pode ser inerente ao discurso matemático ou apenas se fazer presente no discurso de quem ensina matemática.

Com relação às ambiguidades do discurso matemático Hariki destaca que esse discurso é uma combinação da linguagem cotidiana com a simbólica e que nele estão presentes vários tipos de ambiguidades. Algumas estão no âmbito da sinonímia tais como: a) o posto de uma matriz é o mesmo que a característica da matriz, b) um grupo comutativo é o mesmo que um grupo abeliano e c) o kernel é o mesmo núcleo de uma transformação linear. Mas ele destaca ainda que nesse grupo de ambiguidades temos “função, aplicação ou transformação” cujas diferenças são sutis.

Há também ambiguidades decorrentes de palavras homônimas como é o caso do zero (o número zero) e o zero (raiz) de um polinômio, que não é necessariamente o número zero, e as ambiguidades no uso dos símbolos como na derivada (f´(x), y´, Df, dy/dx), nas funções (y ou f(x)) e o mesmo símbolo zero (0) para número, vetor nulo, matriz nula e transformação nula. Há ainda o caso das funções trigonométricas onde símbolos parecidos têm significados diferentes ($\frac{senx}{2} \neq sen\frac{x}{2}$).

Há um trabalho desenvolvido por Pedemonte (2002) na perspectiva de analisar a relação existente entre a argumentação e a demonstração. Ela não discute a argumentação natural, somente a racional. Na sua perspectiva a argumentação em matemática tem por objetivo a verdade e visa um auditório universal. A sua ênfase de estudo é na possibilidade de haver unidade ou ruptura cognitiva, mas ela afirma que a análise estrutural entre a demonstração e a argumentação supõe uma continuidade do sistema de referência e se houver um desvio do sistema de referência entre argumentação e demonstração, uma análise estrutural perde o seu sentido, porque provavelmente temos já um caso de ruptura cognitiva (PEDEMONTE, 2002). O sistema de referência é composto pela linguagem, pelas variáveis e demais recursos (desenho, gesto, software, etc.) utilizados.

Para isso é necessário que seja feita uma análise da estrutura em todos os casos de argumentação procurando, em cada um, o que há nessa estrutura que pode determinar se há ruptura ou continuidade entre argumentação e demonstração. Não há como definir *a priori* se haverá ou não ruptura.

Seu estudo parte da conceituação de Peirce (1983) de que os raciocínios podem ser classificados em abdutivos, dedutivos e indutivos. A *abdução*, para esse teórico, é um raciocínio originário que apresenta, em suas premissas, fatos similares ao da conclusão. Esses fatos tornariam as premissas verdadeiras ainda que a conclusão seja falsa. Nesse caso a conclusão não é uma afirmação, mas algo admitido. É uma hipótese. Um exemplo citado pelo próprio Peirce é a conclusão de Kepler de que a órbita dos astros devia ser elíptica porque as suas observações o inclinaram para isso. Abdução é um processo de descoberta que se amplia e introduz conhecimentos novos. Esse tipo de raciocínio, frequentemente, busca a solução de um problema partindo da conclusão.

A *dedução* é um raciocínio que apresenta fatos nas premissas e a conclusão é levada a cabo a partir desses fatos anunciados nas premissas e por isso se constitui em um "índice do fato cujo reconhecimento é assim compelido" (PEIRCE, 2003, p. 30). As demonstrações apresentadas em Os Elementos de Euclides se enquadram nesse perfil. De alguma forma há uma inferência também na dedução, porque há uma relação entre o que está suposto nas premissas e a conclusão.

A *indução* é, no conceito de Peirce, um raciocínio que emerge de abduções ou inferências. Emerge de hipóteses, de experimentos realizados, e conclui-se que as hipóteses são verdadeiras na medida em que as predições se confirmam. No entanto essa conclusão pode estar sujeita a modificação na medida em que novos experimentos são realizados.

Em Peirce a indução tem *status* diferente do que lhe é conferido na matemática. Neste campo do saber essa modificação da conclusão não é uma possibilidade tendo em vista que, nessa ciência, a indução se baseia em regularidades de entes abstratos e a conclusão é induzida algebricamente, isto é, adquire um caráter geral. Os raciocínios indutivos se valem de observações de regularidades e ocorrem nas conjeturas e nas conhecidas provas por indução.

## Tipos de Argumentação

Segundo Pedemonte (2002) há três tipos de argumentação indutiva.

**Primeiro Tipo**: **Argumentação Indutiva por Generalização**

É uma inferência que procede de casos particulares. O processo permite a abstração de uma propriedade. Mas, esse processo pode apresentar uma generalização diferente.

a) Há o **resultado padrão de generalização** que ocorre quando o sujeito vê em cada caso um motivo para generalizar. Os casos podem ser dissociados um dos outros, não seguir uma ordem particular.

b) Há o **processo padrão de generalização**. A regularidade é vista no processo. Há uma cadeia de enunciados. Dois ou mais casos específicos e ordenados são considerados.

A conjetura de Goldbach de que um número par maior ou igual a quatro pode ser escrito como a soma dois números primos é um exemplo.

Dessa forma, temos que:

P(4) = 2+2; P(6) =3+3; P(8) =5+3; P(10) = 7+3 ou 5+5 e, assim, sucessivamente.

Uma Progressão Aritmética (PA) também é um processo padrão de generalização, pois dada uma razão e determinado o primeiro termo conseguimos obter qualquer termo seguinte. Esquematicamente temos que: P(2) =>P(3); P(3) =>P(4) e, assim sucessivamente.

**Segundo Tipo: Argumentação Indutiva por Passagem "Pelo Limite"**

Obtém-se experimentalmente um caso limite. Esse caso limite funciona como uma "experiência crucial". O termo "experiência crucial" segundo Balacheff (1988, p. 56) foi criado por Francis Bacon em 1620 e não se trata de um empirismo ingênuo[2]. É uma experiência que permite distinguir, entre duas hipóteses, qual a verdadeira, mas não permite afirmar que a outra seja falsa ou, ao contrário, afirmar qual é a falsa e garantir que a outra seja verdadeira.

**Terceiro Tipo: Argumentação Indutiva por Recorrência**

Esse tipo de argumentação ocorre quando se descobre uma relação recorrente. O exemplo da Progressão Aritmética (PA) também se encaixa neste caso. A construção, dos números naturais, formulada por Peano em que o sucessor de um número é dado por s(n) = n+1 é outro exemplo. Pela sua característica de partir da descoberta de uma relação recorrente ou recursiva ela é também denominada de "*quase-indução*" (PEDEMONTE, 2002, p. 73 grifo do autor).

## Análise dos Casos de Argumentação

Nessa análise o fator principal consiste em observar se o tipo de argumento contribui para que haja ruptura ou continuidade na passagem da argumentação para demonstração.

## Argumentação Dedutiva

Quando a argumentação é dedutiva a demonstração também é dedutiva e, nesse caso, está satisfeita a condição de continuidade. Aliás, se a argumentação é dedutiva é possível que já seja uma demonstração.

Tanto na argumentação dedutiva como na demonstração dedutiva a conclusão deriva diretamente das premissas. A diferença é que em uma demonstração as premissas sempre são

---

[2] O empirismo ingênuo, segundo Balacheff (1988, p. 56), "consiste em assegurar a validade de um enunciado com base em qualquer caso". É uma validação rudimentar, insuficiente, mas é um dos primeiros casos de generalização que se apresenta na criança.

verdadeiras enquanto na argumentação inclui-se a possibilidade de se partir de premissas falsas. Mesmo nesse caso, a argumentação foi racional se a conclusão for coerente com as premissas. A correção desse argumento não deve partir da conclusão e sim das premissas, porque se admite, mesmo paradoxalmente, que a conclusão pode estar certa embora tenha partido de premissas erradas. Isto é, se as premissas fossem verdadeiras a conclusão estaria correta.

## Argumentação Abdutiva

Quando a argumentação é abdutiva é preciso uma ruptura estrutural porque a demonstração não pode ser abdutiva. Essa ruptura deve ser preenchida para se construir uma demonstração. Mas uma continuidade estrutural permite a construção de prova também abdutiva. Nesse caso vale ressaltar que estamos diferenciando prova de demonstração. A abdução, conforme foi visto, tem o seu ponto de partida na conclusão e nenhuma demonstração pode seguir esse roteiro.

## Argumentação Indutiva

Pedemonte analisou separadamente cada caso de indução procurando comparar com o tipo de indução por recorrência.

Se a argumentação tem por base os enunciados é necessário que haja uma ruptura para transformar-se em uma demonstração por recorrência. Mas, em uma prova indutiva é possível basear-se em enunciados. Nesse caso, há uma continuidade estrutural na transformação da argumentação em prova indutiva.

Por outro lado uma generalização sobre o processo pode permitir uma demonstração por recorrência. Há uma continuidade estrutural porque há uma ligação de cada termo sucessivo com o seu antecedente como é o caso da PA e do sucessor de um número natural.

## Argumentação indutiva “pelo limite” ou experiência crucial

Se essa argumentação tem por base o processo, então, a evolução para uma demonstração por recorrência é possível porque há uma continuidade estrutural. Por outro lado, se a argumentação está apoiada nos enunciados então a ruptura se faz necessária.

## Argumentação indutiva por recorrência

Para Pedemonte não há dificuldade em transformar a argumentação indutiva por recorrência em uma demonstração indutiva por recorrência. É evidente a continuidade estrutural entre ambas.

Uma demonstração por recorrência consiste em estabelecer a verdade a partir de um conjunto de proposições. Parte de casos particulares e cresce no sentido de estabelecer a lei para o geral que compreende todos os casos análogos (PASTOR; ADAM, 1948).

Dessa forma Pedemonte conclui que exceto no caso da argumentação abdutiva e da indutiva pelo resultado padrão de generalização, é possível haver continuidade entre argumentação racional e demonstração. E, no caso particular da geometria,

> a produção de uma conjetura pode ser decomposta em quatro partes:
> 1.A fase argumentativa de produção da conjetura,
> 2.A fase de estabilização da formulação da conjetura,
> 3.A fase da construção da demonstração,
> 4.A fase da estabilização e da redação da demonstração (PEDEMONTE, 2002, p. 52).

Para fins de nosso trabalho definimos como argumentação explicativa aquele discurso que tem por objetivo esclarecer, tornar evidente um objeto ou ensinar um processo. Se, além de cumprir essas funções descritas, o discurso tiver ainda o objetivo de convencer um público ou um interlocutor, da veracidade de uma informação, da validade de uma afirmação ou da superioridade de uma técnica, dizemos que é uma argumentação que justifica.

Uma argumentação que justifica pode produzir, ou não, o esperado convencimento. Se convencer utilizando recursos experimentais, um discurso não-racional, exposições visuais ou exemplos particulares, consideramos que a argumentação se transformou em uma prova. Ela conseguiu convencer um público não especializado, consequentemente, tem uma validade limitada. Vale enquanto outras questões relacionadas não surgirem exigindo mais rigor e melhores esclarecimentos. Uma prova, portanto, além do valor temporário produz o seu efeito em um contexto social menos exigente ou de um nível de escolaridade em que um tratamento rigoroso da questão não seja compatível.

Estamos supondo que o convencimento ocorre como resultado da compreensão do que está sendo proposto e que não havendo compreensão então o "convencimento" ou, melhor dito, a concordância se dá por imposição, pelo ardil da enganação ou pelo artificialismo da desestruturação do outro. Nessa perspectiva há demonstração, apresentada na perspectiva clássica, que não prova. Ela não prova quando se impõe porque não convence, silencia. É prova quando é processo, quando o sujeito compreendeu não somente os passos, mas também o objeto e os objetivos.

Demonstração, pela conceituação que se tem, é mais do que uma prova simples. Demonstrar é convencer utilizando recursos racionais, compreensivos aos interlocutores e que tornam a afirmação inquestionável do ponto de vista em que está sendo discutida ou analisada. É certo que ela possui também um rigor característico (ritual) que consiste no ordenamento das idéias segundo as regras da Lógica, um simbolismo apropriado e uma terminologia matemática coerente.  Há um encadeamento lógico das proposições.

Estamos falando da perspectiva educacional. Este é o nosso campo de trabalho e de estudo. Da perspectiva dos estudiosos da Matemática Pura uma demonstração pode ser algo mais simples. Basta que ela possua o que estamos denominando de rigor ou ritual, isto é, tenha o ordenamento racional, o simbolismo apropriado e a terminologia matemática. Para eles a demonstração "é o argumento que convence o qualificado, mas cético especialista" (BICUDO, 2002, p. 70).

O nosso ponto de vista é que a demonstração deve convencer também o iniciado, aquele que está em fase de apropriação do ritual, buscando pelo domínio dessa articulação entre idéias, símbolos e terminologia. Esse é o ideal pedagógico porque "uma demonstração deve *convencer-nos* da veracidade da tese que demonstra, desde que aceitemos os pressupostos dos quais essa demonstração depende" (SILVA, 2002, p. 56, grifo do autor). É a sua função retórica.

Não ficamos satisfeitos com a afirmação de que "a demonstração matemática é a que satisfaz a comunidade dos especialistas, não interessando o quão distante possa estar do ideal lógico", sendo o ideal lógico que a "demonstração teórica norteie a demonstração prática" (BICUDO, 2002, p. 65, 70). Não concebemos a demonstração como um artigo de fé para os não especialistas. A demonstração na nossa perspectiva é uma argumentação que justifica, que convence pela racionalidade das articulações, pela clareza das proposições e justificativas, pelo envolvimento do sujeito na produção da hipótese e da tese e pelo número não muito longo de passos, porque estamos pensando na sala de aula. É a demonstração-processo.

A demonstração deve ser acessível também ao estudante dos últimos anos do ensino fundamental. Para que isso seja possível ela não deve ocorrer sem que ele antes tenha participado da elaboração de conjeturas, jogos e quebra-cabeças envolvendo o assunto (BRASIL, 1998).

Os autores dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) afirmam que a clássica forma de conduzir uma aula partindo da apresentação do conteúdo através de uma exposição oral seguida de uma relação de exercícios de aprendizagem, fixação e aplicação tem se mostrado ineficaz. Mesmo que o aluno reproduza corretamente os passos necessários de uma demonstração pode estar ocorrendo a repetição de procedimentos mecânicos sem a devida compreensão (BRASIL, 1998).

O aluno "demonstra" mas não sabe como utilizá-la, não vê necessidade da sua utilização e, quando se torna professor, não acha justo exigir que o aluno passe pela mesma experiência de se exercitar em uma atividade que ele próprio não entendeu (OSÓRIO, 2002).

Os autores dos PCN concebem uma matemática escolar que possua força propulsora de realizações pessoais, inovações e de superação de obstáculos (BRASIL, 1998, p. 26). É nessa perspectiva que estamos concebendo prova, argumentação e demonstração devem estar presentes no estudo da matemática escolar.

Entendemos que a demonstração tem uma grande contribuição para a aprendizagem da Matemática, mas que essa contribuição somente se efetiva quando são elaboradas atividades de tal modo que a demonstração clássica seja a culminância de um processo. Essa demonstração como ponto de partida, ou como finalidade improrrogável, transparece um caráter impositivo. Ela encerra abruptamente o assunto em um contexto social em que o debate é valorizado produzindo a impressão de que a Matemática acontece na contramão do contexto histórico em que vivemos.

A teoria que norteia o nosso olhar sobre esse trabalho, que será exposta em parágrafos posteriores, pressupõe que o estudo é uma ação institucionalizada e que ocorre em um contexto social. Eventualmente esse contexto pode ser composto por uma única pessoa, mas, de modo geral, o estudo se dá no embate sociocognitivo, mesmo que o outro não esteja presente, em pessoa, em determinado instante. É o caso do aluno que faz as suas tarefas escolares pensando que ela será corrigida. Essa prática de buscar convencer os momentaneamente ausentes também se manifesta entre os autores porque escrevem os seus textos para um leitor que só existe em potencial.

Toulmin (2006) entende que a argumentação é a prática da lógica. É a relação entre a lógica e o cotidiano. A lógica, segundo ele, não se ocupa do pensamento puro, mas dos modos de pensar, dos hábitos e práticas que são adquiridos no processo de evolução da sociedade. Ele entende que separar a lógica da argumentação é pressupor uma lógica sobre o nada e, nesse aspecto, Toulmin se aproxima da Teoria Antropológica do Didático (TAD), concebida por Yves Chevallard, que será o nosso aporte de análise. A TAD pressupõe que toda a atividade humana faz sentido em um contexto social.

Este artigo tem por finalidade apresentar um processo de desenvolvimento da argumentação observado em acadêmicos do primeiro ano de Licenciatura em Matemática na resolução de uma tarefa proposta. No entanto, a apresentação é apenas um fragmento de um trabalho de maior amplitude que culminou em uma tese de doutorado no Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (PGEDU/UFMS).

## TAD: uma teoria da prática

A TAD tem como teóricos proponentes Chevallard (2001), Bosch e Gascón (2001). Os autores analisam o estudo da matemática em termos de praxeologia. Praxeologia é uma teoria que se ocupa da atividade humana ou, mais precisamente, da ação eficiente. Essa teoria denomina-se de antropológica porque discute processos imbuídos do conhecimento como produto social, no seio das instituições sociais. E é uma teoria do didático. Didático se refere ao estudo de um tema específico que, neste caso, envolve a argumentação e a resolução de tarefas de geometria.

De acordo com a TAD uma organização matemática com o objetivo de estudar, sempre que haja sujeitos dispostos a isso, em sala de aula ou fora dela, é composta de tarefas, técnicas, tecnologias e teoria e os conceitos matemáticos recebem a denominação de objetos matemáticos (CHEVALLARD; BOSCH, 1999).

O elemento mais amplo considerado numa praxeologia é a teoria. E ela que embasa a tecnologia. Teoria ($\Theta$) nos transmite a idéia de generalidade, abstração; algo afastado das preocupações utilitárias e elementares. Corresponde a um contemplar o cenário em busca das causas, das relações, dos objetivos, enfim, dos porquês.

Tecnologia ($\theta$) é o discurso que justifica a técnica. É racional e tem por suporte a teoria. Uma argumentação que justifica é uma tecnologia.

Tarefa (t) é a atividade proposta com o objetivo de desafiar, de conduzir a uma constatação das propriedades de um objeto matemático, de aplicar as propriedades de um objeto na resolução de um problema ou de representar o próprio objeto.

A técnica ($\tau$) consiste na mobilização de recursos intelectuais e emocionais e a "manipulação" dos objetos matemáticos com a finalidade de resolver a tarefa proposta. A argumentação explicativa é, no nosso entender, uma técnica.

Um objeto matemático é uma construção social e por isso tem uma representação também social, embora, nem sempre semiótica. Os objetos dividem-se em duas categorias: os ostensivos e os não-ostensivos. Os que têm materialidade e os que não têm materialidade.

Um objeto é ostensivo quando se mostra, se faz sentir, enquanto os objetos denominados não-ostensivos são os que não se mostram por si mesmos por pertencerem ao campo das idéias: são os conceitos. Eles são "vistos" e "manipulados" através dos objetos ostensivos, também denominados de registros. A grafia, a palavra falada, o desenho, o gesto, são formas de construir, abordar, manipular, dar visibilidade aos objetos matemáticos não-ostensivos.

A TAD se ocupa da lógica existente no processo de estudar matemática. Procura explicar como ocorrem as organizações, como as tarefas são desenvolvidas e explicadas e propõe critérios de avaliação para a técnica e a tecnologia.

A avaliação da técnica leva em conta os seguintes fatores: se a técnica utilizada estava completa ou era apenas um esboço; se é de fácil utilização; se tem alcance satisfatório, isto é, resolve plenamente a tarefa proposta; se satisfaz todas as condições de emprego; se é inteligível; e, por fim, se pode ser melhorada ou evoluir para atender tarefas mais complexas (CHEVALLARD, 1999).

## A Metodologia da Pesquisa

A pesquisa desenvolvida pertence à categoria da pesquisa qualitativa e foi desenvolvida segundo os parâmetros da Etnografia. Quando a Etnografia é aplicada à educação ela sofre alguns ajustamentos e por isso se diz que a pesquisa é do tipo etnográfico.

A opção pela Etnografia como orientação metodológica se deve ao fato de que a pesquisa se processou em um contexto em que o professor e o pesquisador são uma mesma pessoa. Exercendo a função de professor no cumprimento do que o regimento da instituição dele requer em termos de cumprimento de horário e de programa. Como tal ele respondeu perguntas, questionou, corrigiu idéias e registros de linguagem, definiu conceitos, aplicou provas, elaborou atividades de estudo, propôs tarefas, orientou as discussões em grupo e atendimentos individuais. Como pesquisador elaborou atividades de pesquisa, coletou dados através de filmagens, fotografias e outros meios que se fizeram necessários e, por fim, procedeu a comparação com as práticas socialmente aceitas (ANDRÉ, 2008).

Os princípios metodológicos da Etnografia podem ser agrupados em três unidades: em primeiro lugar o pesquisador deve possuir objetivos genuinamente científicos, conhecer os valores e critérios da etnografia moderna. Em segundo lugar não deve utilizar informações de segunda mão e sempre procurar desvincular-se das idéias preconcebidas. Finalmente, ele deve aplicar certos métodos especiais de coleta, manipulação e registro da evidência que sejam compatíveis com a pesquisa etnográfica (MALINOWSKI, 1970). Os instrumentos de pesquisa são a observação e a entrevista, conversa intencional com os sujeitos, e a análise tem por base uma teoria.

A atividade matemática analisada a seguir foi elaborada, visando estudar as organizações: didática e matemática que os acadêmicos colocam em prática ao desenvolver a argumentação explicativa e justificar durante as atividades de geometria. Ao propor a atividade pretendia-se analisar as técnicas utilizadas e as justificativas apresentadas, isto é, a pertinência da técnica e da tecnologia utilizadas; a lógica da argumentação.

As tarefas foram propostas após terem sido desenvolvidas várias atividades envolvendo os conceitos de retas paralelas e transversais, ângulos colaterais internos e colaterais externos, ângulos alternos internos e alternos externos, ângulos complementares e suplementares. A congruência entre ângulos alternos internos, entre ângulos correspondentes e entre ângulos alternos externos foi postulada. De igual modo foi admitido que os ângulos colaterais internos e os colaterais externos são suplementares entre si. Várias atividades foram desenvolvidas envolvendo essas propriedades.

## As Tarefas Propostas

Conforme já visto as tarefas eram proposta visando à utilização da argumentação como elemento integrante da técnica de resolução, como tecnologia e também como procedimento didático. Uma das primeiras tarefas consistia em provar que ângulos opostos pelo vértice são congruentes. As figuras 1 e 2 mostram o enunciado e a figura dessa tarefa.

> Na figura abaixo temos que r e s são retas paralelas (r//s) e t é transversal. Os ângulos x e y são opostos pelo vértice (o.p.v.). **Afirma-se que "ângulos opostos pelo vértice são congruentes", isto é, têm a mesma medida.**
>
> *Será que essa afirmação é verdadeira? Por quê?*
>
> Deixem registrados os esboços que fizerem e as explicações que escreverem. Usem caneta e não borrem nenhum risco ou palavra que fizerem/escreverem mesmo que julguem errados. Podem usar também o verso da folha e, se fizerem rascunho em outra folha, entreguem junto.

Figura 1-Enunciado da tarefa

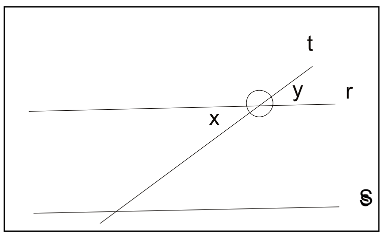

Figura 2-Figura que compunha a tarefa

Algumas técnicas e respectivas tecnologias usadas pelos acadêmicos são expostas a seguir. Além da técnica canônica, isto é, daquela comumente usada nos livros didáticos, outras duas foram apresentadas.

Uma dessas técnicas e que chamamos de $\tau_1$ é apresentada na figura a seguir (fig. 3).

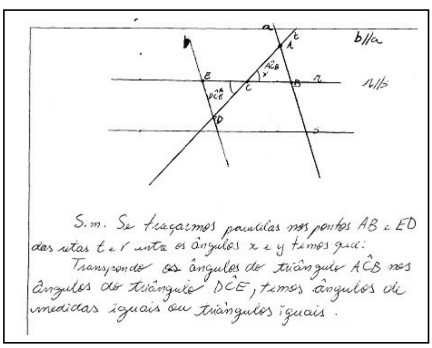

Figura 3-Técnica $\tau_1$ para provar a congruência de o.p.v.

Como concluíram que os ângulos são congruentes e que os triângulos também são congruentes? Por abdução, certamente. Se os ângulos eram congruentes então seria possível traçar retas paralelas e equidistantes do vértice (ponto C) e obter triângulos congruentes. Uma propriedade confirmaria a outra.[3]

Uma segunda técnica ($\tau_2$) apresentada (fig. 4) baseou-se em parte na abdução e em parte na indução pelo *resultado padrão de generalização.* A idéia foi a da porta giratória que, segundo a Física Clássica, descreve ângulos iguais ao girar em torno do eixo central.

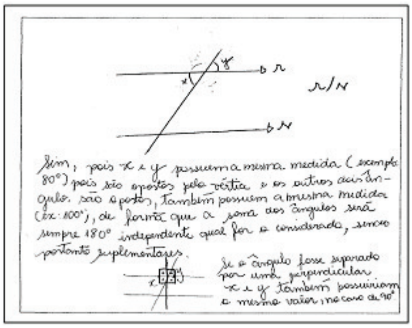


Figura 4-Segunta técnica utilizada na resolução da tarefa

Ao “fazer girar” a reta transversal sobre o eixo (vértice dos ângulos o.p.v.) obtêm-se ângulos opostos iguais e os seus respectivos suplementares também iguais. Essa prática de argumentar como tecnologia e também norteando toda organização didática conduziu a um crescente na complexidade das tarefas e também no nível de exigência com relação à própria argumentação.

## O “Nascimento” de um Teorema

Outra tarefa proposta partia de uma figura (fig. 5) e o seguinte enunciado:

“sabendo que r//s, calcule x”.

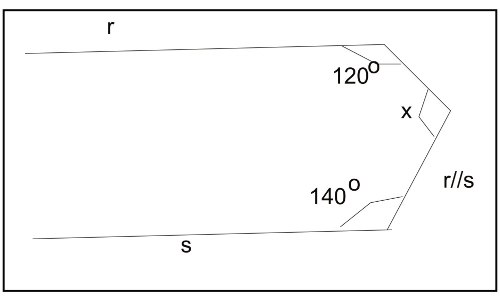


Figura 5. A tarefa proposta
(GONÇALVES JR, 1995 , p. 57)

[3] Sales (2010, p. 159) afirma que “é possível demonstrar a mesma proposição pela soma dos ângulos internos do triângulo” e procede a demonstração utilizando as propriedades da semelhança de triângulo.

Levando em conta o contexto em que a tarefa estava inserida a técnica que se esperava fosse usada na sua resolução consistia na construção de uma reta passando pelo vértice do ângulo cuja medida se quer determinar e que seja paralela às retas *r* e *s*. A soma dos ângulos suplementares, dos alternos internos dos ângulos dados no problema, seria a solução imediata do problema. Dessa forma: x= [(180º -120º) + (180º - 140º)] = 100º

No entanto, a técnica apresentada por uma dupla de acadêmicos foi outra. Damos, a seguir, a solução apresentada: *"a soma dos três ângulos é 360º, logo, 120º+140º+x=360º e x=100º".*

Foi a primeira dupla a apresentar a solução e como não houve esclarecimentos as perguntas se fizeram necessárias. A pergunta-chave, formulada pelos acadêmicos, foi: como concluíram que a soma dos três ângulos é 360º?

A resposta foi lacônica: "um quadrilátero tem 360º". O enigma permaneceu e a tarefa inicial se transformou em: podemos afirmar que, dadas duas retas paralelas se elas forem interceptadas por duas transversais que, por sua vez, se interceptam na região interior das paralelas, a soma dos ângulos que estiverem do um mesmo lado das transversais será 360º?

Enquanto os acadêmicos se reorganizavam para resolver a nova tarefa, procurávamos reafirmar a norma institucional de que toda afirmação dessa natureza é válida desde que devidamente provada usando os recursos que a teoria nos proporciona. Precisávamos ser convencidos de que a soma dos três ângulos era realmente 360º, a pergunta da turma, portanto, fazia sentido.

Os grupos trabalharam por mais alguns instantes quando um deles informou que alguém dentre eles já estava com a resposta. O acadêmico que representava o grupo foi ao quadro e resolveu conforme mostra a foto (fig. 6).

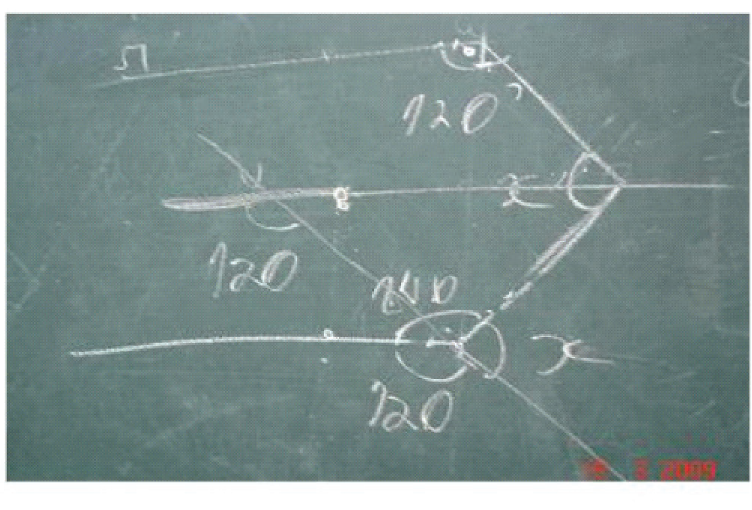


Figura 6. Foto da resolução apresentada pelo acadêmico.
Obtida pelo pesquisador

Não houve registro algébrico e não houve registro na língua materna. Somente registros orais, gestuais, geométricos e numéricos. Mas esses registros constituíram uma argumentação explicativa e justificativa Ele trabalhou com ângulos correspondentes no caso do ângulo de 120º e ângulos alternos internos, no caso do ângulo x. Fez uma abdução ao concluir que o ângulo constituído pelas duas retas traçadas por ele era de 120º (correspondente ao ângulo de 120º dado), trabalhou com uma reta a mais do que o necessário e não formalizou, por escrito, o processo. A técnica utilizada foi um esboço, mas pode ser aperfeiçoada (eliminar o traçado da reta paralela a *r* e *s,* por exemplo) e resolve plenamente a tarefa. É inteligível e de fácil emprego.

Em termos de tecnologia o argumento usado foi racional, muito próximo da forma canônica da Matemática, coerente e utilizou os recursos tecnológicos disponíveis. A argumentação foi dedutiva, partiu de premissas verdadeiras e facilmente é transformada em uma demonstração conforme será visto a seguir.

A técnica utilizada na resolução da tarefa, a argumentação explicativa, embora verbal e gestual, e a argumentação justificativa apresentadas revelam que a tarefa pode ser enunciada na forma de um teorema, que a classe denominou de teorema Kamyle, e cuja demonstração carece apenas que se dê forma ao que foi apresentado pelo acadêmico.

O enunciado seria: "dadas duas retas paralelas e duas retas transversais, se essas transversais se interceptam na região interior das paralelas então a soma dos ângulos internos, que estão de um mesmo lado das transversais, é 360º".

*Hipótese: r* e *s* são paralelas, *t* e *u* são transversais que se interceptam na região interior das paralelas.

*Tese:* a soma dos ângulos internos que estão de um mesmo lado das transversais é 360º (a+b+c=360º).

Para melhor entendimento e antecipando a generalização suponha que sejam a, b e c os ângulos em questão e que a e c sejam dados.

Demonstração:

Por *c* passa-se a reta v, tal que c'+c"=c (fig.7)

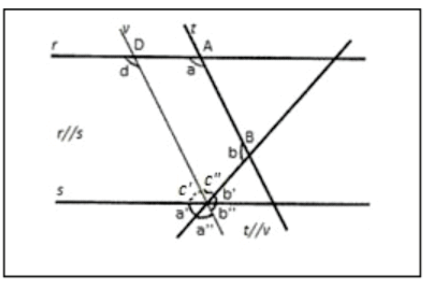


Figura 7. Demonstração do teorema.
Elaborada pelo pesquisador

d=a (por serem correspondentes)

b=b´+b" (são alternos internos em relação às paralelas t e v e à transversal u)

d=a´+a" (por serem correspondentes)

c'+c"+a´+a"+b´+b" = 360º

Logo, a+b+c =360º

Esta demonstração não é única, mas foi produzida seguindo um raciocínio próximo ao usado pelo acadêmico.

Não houve, na resolução apresentada inicialmente, uma demonstração segundo os critérios estabelecidos de que ela deve possuir uma linguagem técnica e uma sequência de registros simbólicos e na língua materna, revelando as articulações presentes. Mas houve uma conjetura e uma prova conduzida por um raciocínio lógico-dedutivo onde todos os recursos teóricos disponíveis foram utilizados. Faltou a forma e o detalhamento, através de um registro de caráter permanente, mas esteve presente o poder de convencimento.

Em um estágio inicial o convencimento talvez seja mais importante do que a forma, e a compreensão mais importante do que os registros. Registros corretos e completos, forma e síntese são fatores importantes como culminância de um processo.

Há que destacar ainda que quando o estudo da Matemática é conduzido na perspectiva de um processo onde o sujeito desempenha um papel ativo, os registros "voláteis" (gestuais e orais) aparecem, inicialmente, com mais frequência do que os registros gráficos. No entanto, na medida em que o processo avança os registros de caráter permanente e os elementos formais tendem a ocupar o espaço que lhes é devido.

## Considerações Finais

Observamos nesses fragmentos de uma pesquisa um processo em que a argumentação norteou a prática. Constatamos que o seu uso como tecnologia produziu um crescimento qualitativo da argumentação natural para a racional e da argumentação para um esboço de demonstração. Dessa forma, o processo vivenciado pelos acadêmicos mostra que a argumentação, como técnica didática, tem alcance satisfatório e pode ser melhorada e evoluir para uso no estudo de outros temas.

Cumpre destacar também que a geometria foi estudada na perspectiva em que teoria e descoberta caminham juntas e se imbricam através da argumentação. Dessa forma o estudo da matemática escolar não se distancia da forma de estudo da matemática acadêmica, embora estejam em dimensões diferentes.

## Referências Bibliográficas

ABREU, Antônio Suárez. **A Arte de Argumentar**: gerenciando razão e emoção. 11. ed. Cotia, SP: Ateliê Editorial, 2006.

ARSAC, Gilbert et all. **Initiation au Raisonnement Déductif au Collège**. Lyon: Presses Universitaires de Lyon, 1992.

BICUDO, Irineu. Demonstração em Matemática. **BOLEMA**: Boletim de Educação Matemática, Ano 15, nº 18, p.79-90. Rio Claro: UNESP, 2002.

BICUDO, Irineu. História da Matemática: o pensamento da filosofia grega antiga e seus reflexos na educação matemática do mundo ocidental. *In*: BICUDO, M.A.V. (org.). **Pesquisa em Educação Matemática***:* concepções e perspectivas. São Paulo: Editora da UNESP, 1999.

BOSCH, Marianna; GASCÓN, Joseph. **Organizer l´Etude**. *2*... Theories & Empires. In: DORIER, J.L et al.(eds). Actes de la 11ª École d´Été de Didactique des Mathématiques-corps 21 -30 Août 2001, p.23-40.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais***:* Matemática. Brasília: MEC/SEF,1998.

CASABÓ, Marianna Bosch. **Un punto de vista antropológico**: la evolución de los "instrumentos de representación" en la actividad matemática. Quarto Simpósio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Huelva: Universidade de Huelva, 2001. Disponível em < http://www.seiem.es/publicaciones/archivos publicaciones/actas/Actas04SEIEM/IVsimposio.pdf > Acesso em 11 de jun de 2009.

CHEVALLARD, Y.; BOSCH, M. Ostensivos e sensibilidade aos ostensivos na atividade matemática. **Recherches en Didatique des Mathématiques**. Nº 19, Ano 1999.

CHEVALLARD, Yves. Organizer L´Etude. 1. Strutures & Fonctions. In: DORIER, J.L et al.(eds). **Actes de la 11ª École d´Été de Didactique des Mathématiques**-corps 21 -30 Août 2001, p. 3-22.

CHEVALLARD, Yves; BOSCH, Marianna; GASCÓN, Josep. **Estudar Matemáticas**: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem. Porto Alegre: Artmed Editora, 2001.

CHEVALLARD, Yves. **La transposición didáctica**. 3.ed. 2. reimp. Buenos Aires: Aique Grupo Editor, 2005

HARIKI, Seiji. La ambiguedad en el discurso matemático. **Epsilon nº 22**, 1992, p. 99-103.

DUVAL, Raymond. Argumenter, demontrer, expliquer: continuite ou rupture cognitive? "**Petit X"** nº 31, p. 37-61, 1992-1993.

GASCÓN, Josep. A necessidade de utilizar modelos em didática das Matemáticas. **XI JAEM** (Jornada de aprendizagem e ensino das Matemáticas), Tenerife e Gran Canárias, julho de 2003.

GONÇALVES JÚNIOR, O. **Matemática por assunto***:* geometria plana e espacial. São Paulo: Scipione, 1995.

MALINOWSKI, Bronislaw. **Uma teoria científica da cultura**. 2. ed. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1970.

OLÉRON, P. **L´Argumentation**. 2.ed.Paris: Presses Universitaires de France, 1987.

OSÓRIO, Victor Larios. Demostraciones y conjeturas en la escuela media. **Revista Electrónica de Didáctica de las Matemáticas**. Año 2, num.3. Enero, 2002. Disponível em: < http://www.uaq.mx/matematicas/redm/> Acesso em: ago 2007.

PASTOR, J. Rey; ADAM, P. Puig. **Metodologia de la matemática elemental**. 2. ed. Buenos Aires: Editorial Ibero-Americano, 1948.

PEDEMONTE, Bettina. **Etude didactique et cognitive des rapportes de l´argumentation et de la démosntration dans l´aprentissagem des mathetmatiques**. Grenoble,Fr:Université Joseph Fourier-Grenoble I; Gênova, It: Université de Genova, 2002.Tese (doutorado).

PEIRCE, Charles Sanders. **Escritos coligidos**. 3.ed. São Paulo: Abril Cultural, 1983.(Coleção Pensadores)

SALES, Antonio. **Práticas argumentativas no estudo da geometria por acadêmicos de Licenciatura em Matemática.** Campo Grande, MS: PPGEDU/UFMS, 2010 (Tese de Doutorado).

SILVA, Jairo José. Demonstração Matemática da Perspectiva da Lógica Matemática. **BOLEMA***:* Boletim de Educação Matemática, Ano 15, nº 18, p. 68-78. Rio Claro: UNESP, 2002.

TOULMIN, Stephen Edelston. **Os usos do argumento.** 2.ed. São Paulo: Martins Fontes, 2006.

**Submetido em maio de 2011**

**Aprovado em julho de 2011**