

TRAJETÓRIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAGEM: ABORDAGEM INICIAL DAS NOÇÕES DE PROBABILIDADE

HYPOTHETICAL TRAJECTORY OF LEARNING: APPROACH OF THE INITIAL NOTIONS OF PROBABILITY

Rubens de Souza Cabral Junior*

Armando Traldi Junior**

Resumo

Neste artigo apresenta-se as contribuições e dificuldades dos professores em planejar e desenvolver uma trajetória hipotética de aprendizagem (THA) sobre noções iniciais de probabilidade para alunos do Ensino Médio. A justificativa da investigação vai ao encontro do que afirma Simon (1995) que existem muitas pesquisas na área de aprendizagem com abordagem construtivista, porém muito pouco dos seus resultados estão incorporados nas elaborações de aulas dos professores. Foi elaborada uma sequência de ensino de probabilidade e apresentada para três professores, inicialmente fazerem sugestões e, depois desenvolverem com os alunos, na expectativa de avaliar a THA e ao mesmo tempo elaborar novas hipóteses sobre o processo de ensino e aprendizagem de probabilidades em um trabalho conjunto entre o pesquisador e os professores envolvidos. A pesquisa mostra que os professores que participaram do estudo têm conhecimento da abordagem laplaciana na introdução do conceito de probabilidade, no entanto falta embasamento teórico sobre a possibilidade de apreensão da noção de probabilidade utilizando-se da confrontação dos enfoques frequentista e laplaciano. Este fato limitou as suas contribuições na elaboração e desenvolvimento da THA, conduzindo os professores a uma atitude mais contemplativa do que crítica em relação às atividades apresentadas.

Palavras-chave: Probabilidade. Currículo de Matemática no Ensino Médio. Educação Matemática. Trajetória Hipotética de Aprendizagem.

Abstract

This article shows some contributions and some difficulties for some teachers for planning and develop the hypothetical trajectory of learning (HTL) about some initial notions of probability to some students in high school. The justification in this investigation brings us like Simon (1995) has said before, there are some researches in learning about constructive approach, however a few of its results are incorporated in some teachers planning classes. it was elaborated a sequence of learning of probability and showed for three professors , initially for sharing suggestions and , afterward develop with students, hoping to assess the (HTL) and at the same time elaborate new hypotheses about the process of learning and the probabilities of working in groups . The research shows that professors who work on this study have the knowledge of laplaciana introducing the definition of probability, however it's missing the theoretical base about the probabiliy using the confrontation approaching costumers and laplaciano. This fact was limited to its contributions in elaborating the development of THA, leading professors to an attitude more contemplative than critical of activities shown .

Keywords: Probability. Curriculo of Mathematics in High School. Mathematics Education. The Hypothetical Trajectory of Learning.

* PUCSP E-mail: rubensplus@ig.com.br

** IFSP. E-mail: traldijr@ig.com.br

Introdução

Neste artigo iremos apresentar uma investigação sobre o ensino e aprendizagem das noções iniciais de probabilidade, pois este tema tem apresentado um grande número de questionamentos e resoluções equivocadas por parte de alunos.

Utilizamos como fundamentação teórica a pesquisa de Simon (1995) que coletou dados a partir de uma sala de aula composta por 25 alunos em que observou um professor de Matemática desenvolvendo atividades concernentes à construção do conceito de área. Concentrou esforços para formular uma “Pedagogia da Matemática” a partir de alguns teóricos.

A análise do episódio de ensino vivenciado por Simon (1995) colaborou para o desenvolvimento do Ciclo de Ensino de Matemática (Figura 1), como modelo esquemático de inter-relações cílicas dos aspectos do conhecimento do professor, reflexão e tomada de decisão.

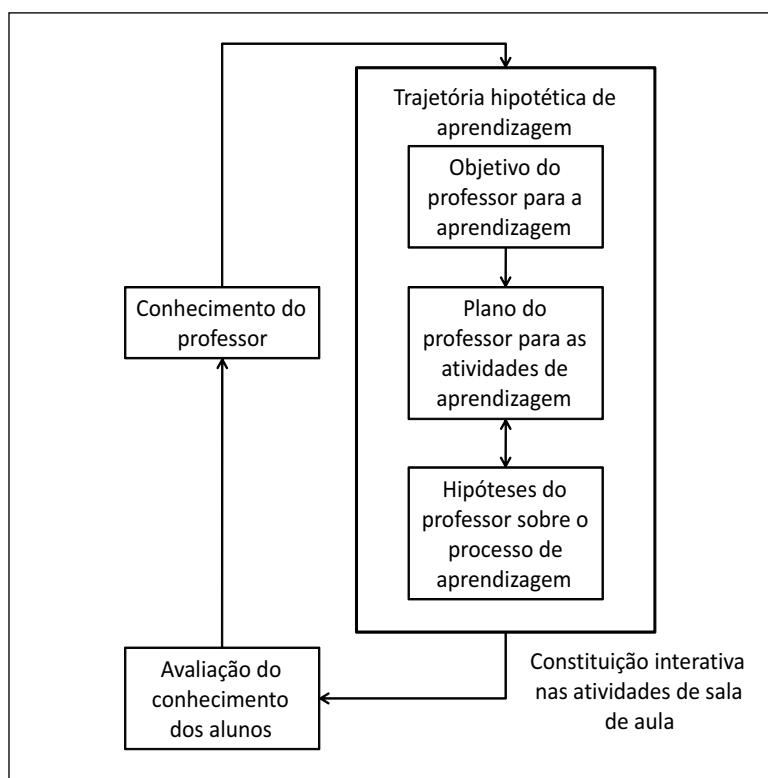


Figura 1. Ciclo de ensino de matemática abreviado (SIMON, 1995, p. 136).

De acordo com Simon (1995, p. 136), uma trajetória hipotética de aprendizagem (THA) consiste de: “objetivos para a aprendizagem dos alunos, tarefas matemáticas que serão utilizadas para promover a aprendizagem dos alunos e nas hipóteses sobre o processo de aprendizagem dos alunos”. Simon & Tzur (2004, p. 93) elucidam as principais características da noção de THA inseridas no ciclo de ensino de matemática da seguinte forma:

[...] enquanto o objetivo do professor para a aprendizagem dos alunos aponta uma direção para as outras componentes, a seleção de tarefas de aprendizagem e as hipóteses sobre o processo de aprendizagem dos alunos são interdependentes. As tarefas são selecionadas com hipóteses acerca do processo de aprendizagem; as hipóteses sobre o processo de aprendizagem se baseiam nas tarefas propostas. Este construto se fundamenta nos seguintes pressupostos:

- A construção de uma THA se baseia na compreensão do conhecimento atual dos alunos aos quais será oferecido um dado ensino.
- Uma THA é um veículo para planejar a aprendizagem de um determinado conceito matemático.
- As tarefas matemáticas proporcionam as ferramentas para promover a aprendizagem de um determinado conceito matemático e, portanto, são um elemento chave do processo de ensino.
- Dada à natureza hipotética e inherentemente incerta deste processo, o professor ver-se-á obrigado a modificar sistematicamente cada aspecto da THA.

Como pressupostos teóricos para elaboração das atividades nos baseamos em pesquisas de Coutinho (1996, 2001, 2002), Godino, Batanero & Cañizares (1996) e Silva (2002), pois se preocuparam com sequências de ensino de probabilidade que confrontassem o enfoque frequentista com o clássico em uma perspectiva construtivista.

A probabilidade combinatória é a mais conhecida e estudada na Educação Básica. O enfoque clássico ou combinatório é aquele em que a probabilidade é expressa como a razão entre o número de sucessos que realizam o evento que se quer estudar e o número total de resultados possíveis do experimento aleatório (LOPES & COUTINHO, 2009).

De acordo com Ara (2006) a probabilidade de ocorrência de um evento A pode ser definida como o limite da freqüência relativa do evento A , quando o número de repetições do experimento, sob as mesmas condições, tende ao infinito. Na prática, podemos aproximar o valor da probabilidade de ocorrência de um evento A realizando um grande número de ensaios idênticos e independentes.

Coutinho (1996) elaborou uma sequência de ensino para a aquisição dos primeiros conceitos de probabilidade utilizando-se da visão frequentista.

Um dos resultados deste estudo, realizado com alunos do Ensino Médio francês e alunos do primeiro ano do Ensino Superior brasileiro, foi a identificação do obstáculo da equiprobabilidade, que é aquele em que na ausência de informações se atribui a mesma probabilidade aos eventos elementares. Além da identificação deste tipo de obstáculo, foi constatado também que a resistência ao ensino formal de probabilidade aumenta proporcionalmente à idade dos alunos. As escolhas didáticas do professor podem influenciar na diminuição da resistência ao ensino, caso se adote um enfoque frequentista para a introdução ao conceito de probabilidade e quando é feita por meio de problemas que envolvam situações de não equiprobabilidade.

A autora salienta que determinadas concepções errôneas continuam existindo mesmo depois do suposto aprendizado das noções básicas de probabilidade. Fato que ratifica a importância do seu estudo desde as séries iniciais. Coutinho (2001, 2002) mostra a necessidade de confrontar os 2 enfoques para a construção do conceito.

O trabalho de Silva (2002) propõe uma integração das concepções frequentista e clássica de probabilidade com o intuito de tornar a aprendizagem significativa e abrangente no que tange aos seus conceitos iniciais.

Silva (2002) enumera suas hipóteses de pesquisa da seguinte forma:

- a. Para que haja uma apreensão abrangente dos conceitos de probabilidade é necessário que sejam trabalhados os seguintes itens: experimentos aleatórios, experimentos determinísticos, noção de acaso, espaços amostrais equiprováveis e não-equiprováveis e tipos de evento.
- b. Tendo como base o estudo histórico e epistemológico, o conceito de probabilidade foi se consolidando principalmente sobre duas óticas: a frequentista e a clássica. Caso se privilegie uma em detrimento da outra, estaríamos oferecendo ao aluno uma visão limitada do conceito de probabilidade.
- c. Os PCN recomendam que o aluno entenda a sociedade como algo em constante reconstrução, inserida num processo contínuo e, portanto, o estudo da história torna-se um instrumento importante para o seu entendimento. Desse modo, a inserção do contexto histórico em que se desenvolveu a teoria das probabilidades auxilia numa apreensão mais significativa de seus conceitos.
- d. Os itens citados anteriormente só serão contemplados tendo como ponto de partida uma situação-problema que desencadeie uma série de questionamentos, culminando em última instância com a sua institucionalização.

Segundo o autor, uma sequência de ensino deve conter os seguintes aspectos: introdução da situação-problema, leitura da atividade proposta, debate entre professor e alunos para incentivá-los a responderem as questões propostas, “correção” da atividade, institucionalização do conceito, realização de uma “atividade complementar” para uma revisão, memorização e aprofundamento da idéia em estudo e, finalmente, correção dessa última atividade.

Partindo dos resultados das pesquisas de Coutinho (1996, 2001, 2002) e Silva (2002) acrescentamos a utilização de jogos entre os alunos para que tivessem o primeiro contato com a probabilidade por uma maneira lúdica e assim instigá-los a investigar propriedades matemáticas envolvidas nas jogadas.

Metodologia e procedimentos metodológicos

A metodologia de pesquisa do tipo qualitativa descrita por Bogdan e Biklen (1994) contempla alguns aspectos que podem compô-la e que, consideramos que estão próximos da investigação realizada, são eles:

- O ambiente natural é aquele em que serão retirados os dados pelo pesquisador. No caso da investigação que realizamos, foi na escola que os professores atuam que coletamos os dados.
- As aulas foram acompanhadas pelo pesquisador para elaboração de relatórios, sendo que o foco principal foi a análise do desenvolvimento da THA em sala de aula caracterizando assim a nossa preocupação com o processo e não com o produto.

Nessa investigação as propostas didáticas foram submetidas à análise dos professores antes e após seu desenvolvimento em sala de aula com o objetivo de incitarem reflexões que possam resultar em sugestões de mudança tanto na primeira versão da THA como em sua prática de ensino.

Os professores responderam a um questionário, com o propósito de traçar-se um perfil em seus aspectos acadêmico e profissional, quais as metodologias empregadas em suas aulas e também as noções concebidas sobre o processo de ensino e aprendizagem. Posteriormente, para esclarecimentos sobre as respostas contidas nos questionários realizamos entrevistas semi-estruturadas (Bogdan & Biklen, 1994). Após o desenvolvimento das atividades também foram arguidos sobre procedimentos e atitudes realizados no desenvolvimento das aulas.

A pesquisa foi realizada com três professores da rede pública estadual (SP), em uma escola de ensino médio no período da manhã, contando com um total de 96 alunos, que desenvolveram as THA acompanhadas pelo pesquisador. Foram elaborados relatórios das oito aulas (de cinqüenta minutos cada) baseados em observações efetuadas durante as aulas, denominada por Bogdan & Biklen (1994) como “observação participante”, pois o investigador inseriu-se no universo das pessoas (professores e alunos) a fim de conhecê-las e documentando por escrito suas constatações.

Definições para a análise de dados

Iniciar a análise de dados é começar o processo de busca e organização sistemática dos dados coletados por meio das entrevistas semi-estruturadas, observações em sala de aula e análise de documentos (Bogdan e Biklen, 1994). O objetivo desta etapa da pesquisa é compreender o material que temos coletado, frente ao quadro teórico para melhor compreensão do problema de pesquisa e responder as questões de investigação.

Essa análise pode acontecer em diferentes momentos do estudo, isto é, concomitantemente com a coleta de dados, ou após a mesma (Bogdan e Biklen, 1994). No estudo que realizamos, os dados foram na sua maioria coletados antes da análise.

Partindo do objetivo de estudo e do quadro teórico de referência elegemos como unidade de análise: o professor no processo de (re) elaboração da trajetória hipotética de aprendizagem e o desenvolvimento da THA em sala de aula. Em relação à unidade de análise, definimos as seguintes categorias, que foram observadas em dois momentos distintos, conforme tabela a seguir:

Re (elaboração) da THA	Desenvolvimento em sala de aula
Conhecimentos e dificuldades dos professores em relação ao conteúdo matemático proposto	Abordagem da THA com os alunos
Conhecimentos e dificuldades dos professores em relação à metodologia recomendada para a abordagem dos conceitos propostos	A interação entre professor-aluno-conhecimento
Sugestões dos professores na ampliação e modificação da THA	Sequência de desenvolvimento escolhida pelo professor

Síntese da análise dos dados

No momento da (re) elaboração da THA:

Conhecimentos e dificuldades dos professores em relação ao conteúdo matemático proposto

Os professores tinham domínio sobre a introdução das idéias iniciais de probabilidade utilizando-se da abordagem laplaciana, mas não haviam ainda concebido uma tentativa de mudança de prática em sala de aula que combinasse o enfoque frequentista com o enfoque clássico na construção das noções elementares de probabilidade. O desconhecimento por parte dos professores da “lei dos grandes números” foi o principal fato que gerou as dificuldades iniciais no entendimento das atividades propostas na THA para desenvolvimento com os alunos.

Conhecimento e dificuldades dos professores em relação à metodologia recomendada para a abordagem dos conceitos propostos.

Os professores tinham conhecimento da resolução de problemas como uma opção de metodologia para construção de conceitos, no entanto, revelaram que não haviam elaborado ainda uma sequência de ensino que proporcionasse um ambiente de exploração e investigação para aprendizagem de probabilidade.

Sugestões dos professores na ampliação e modificação da THA

Não houve sugestões de ampliações e/ou modificações na primeira versão THA apresentada aos professores. Eles alegaram que por ser uma experiência nova, gostariam de opinar após o término de seu desenvolvimento com os alunos.

Sendo assim, após a conclusão das atividades desenvolvidas com os alunos e o esclarecimento que para a frequência relativa ser considerada uma estimativa de probabilidade deve-se ter um grande número de experimentos. Foi proposto pelo professor P1, um aumento na quantidade de partidas referente à aula 1 – jogo da diferença (parte 1) – passaria de uma partida de 20 jogadas realizadas por cada dupla para a realização de 10 partidas de 20 jogadas por dupla de alunos, aumentando de 340 para 3400 jogadas na sala de aula, pois a classe contou com 34 alunos. Isto permitiria confrontar os valores calculados pela probabilidade laplaciana e os obtidos pela probabilidade frequentista.

No momento do desenvolvimento em sala de aula:

Abordagem da THA com os alunos

Os professores expuseram que seriam necessárias, aproximadamente, duas semanas (oito aulas) para que fosse apresentado um novo tema em matemática, de uma forma diferente das que eles estavam acostumados, inicialmente, não foi mencionado aos alunos que se tratava de noções elementares de probabilidade. As aulas iriam se configurar da seguinte forma:

- Em seis primeiras aulas seriam solicitadas atividades utilizando-se de duplas
- Na sétima aula uma atividade individual
- Na primeira parte da oitava aula uma atividade individual que seria complementada, em seguida, pela mesma dupla utilizada anteriormente.

Todo o material necessário ao desenvolvimento das aulas também seria fornecido: cópias do texto, dados, moedas, trena, cronômetro, régua e papel milimetrado.

Os professores ressaltaram que somente após a leitura cuidadosa por parte dos alunos das instruções contidas em cada xerox que seriam feitos eventuais esclarecimentos.

A interação entre professor-aluno-conhecimento

Constatamos que os professores no afã de atingir suas metas iniciais de aprendizagem das noções iniciais de probabilidade pularam algumas etapas no processo de entendimento dos alunos. Ainda notamos a ênfase do professor ao se referir aos alunos quando se expressa dizendo que algum resultado está certo ou errado, sem se preocupar com o processo utilizado para sua obtenção.

Uma situação que exemplifica este fato ocorreu na aula 2, quando é solicitado ao aluno que enumerasse e posteriormente contasse os elementos do espaço amostral referente ao lançamento de dois dados. Uma dupla apresentou como resposta 34, não atentando ao fato que deveria considerar os dois pares já apresentados no início como modelo. O professor não analisou a causa do engano, simplesmente disse que estava errado.

Sequência de desenvolvimento escolhida pelo professor

Os professores seguiram a sequência pré-estabelecida na primeira versão apresentada a eles sem alterações, por se julgar sem embasamento teórico e sem conhecimento prático sobre essa abordagem que lhes permitisse opinar com mais propriedade.

Considerações finais

A elaboração da primeira versão da THA foi constituída de modo a compatibilizar perspectivas construtivistas de aprendizagem com um planejamento de ensino. Os trabalhos que mais se aproximaram do nosso objetivo foram os de Coutinho (1996, 2001, 2002), Lopes & Coutinho (2009), e Silva (2002), pois se preocuparam com sequências de ensino de probabilidade que confrontassem o enfoque frequentista com o clássico em uma perspectiva construtivista.

De acordo com os autores, devem-se propor situações em que os estudantes realizem atividades, as quais considerem seus contextos, e possam observar e construir os eventos possíveis, por meio de experimentação concreta e concluem que para haver uma aprendizagem significativa é imprescindível considerar situações familiares a eles, que sejam contextualizadas, investigadas e analisadas. Portanto, foram planejadas atividades que partissem de situações concretas (como por exemplo: jogos de azar) para que os alunos observassem, registrassem e analisassem experimentos aleatórios, tendo em vista que muitos já brincavam com dados e moedas desde a infância.

Outro aspecto importante na elaboração das nossas atividades foi a preocupação em não limitar o contexto às situações equiprováveis, pois pode conduzir a certas concepções errôneas tais como: “se existem dois resultados possíveis, então a ocorrência de cada um deles é 1/2” (COUTINHO, 2001).

O estudo da combinatória, de acordo com os autores pesquisados, não é um pré-requisito para uma primeira familiarização com as idéias probabilísticas, podendo acrescentar dificuldades à aprendizagem da probabilidade. Sendo assim, evitamos situações que envolvessem cálculos complexos em análise combinatória.

Esses autores deixaram claro a preocupação com que os alunos da Educação Básica vivenciassem os processos de experimentação científica, permitindo-lhes desenvolver as bases do raciocínio probabilístico: a apreensão do acaso, a idéia de experiência aleatória e o conceito de probabilidade. A THA elaborada propôs atividades que permitiram distinguir um experimento determinístico de um experimento aleatório e também, por meio da frequência relativa acumulada de experimentos aleatórios estimar a probabilidade de alguns eventos e compará-la com seu cálculo *a priori*.

Tínhamos como meta também apresentar aos professores a primeira versão da THA e por meio de discussões fazê-los sentir como co-autores na sua re-elaboração e desenvolvimento. Neste caso, as pesquisas que fundamentaram nosso trabalho foram as de Simon (1995), Simon & Tzur (2004); Gómez & Lupiáñez (2007) e Pires (2009).

Os professores, considerados no estudo, tinham familiaridade com o desenvolvimento de jogos e experimentos nas aulas de matemática, somente quando fossem realizados de maneira fictícia, simulando uma situação real. Segundo eles, nunca haviam propostos jogos e experimentos de maneira concreta, ou seja, os alunos participando de disputas com dados e moedas reais. Os professores mencionaram que ao desenvolverem o conteúdo sobre probabilidade, utilizavam dados e moedas apenas como exemplo de geradores de acaso.

Nos questionários preenchidos pelos professores, citaram que a maior parte das aulas ao abordarem este tema, eram conduzidos a partir das propostas dos livros didáticos o que não salienta a diferenciação entre experimento determinístico e experimento aleatório e não realizam uma confrontação do enfoque combinatório com o frequentista.

Houve alguns comentários que deixaram claro que o ensino de probabilidade é considerado de extrema complexidade, contribuindo e muito para que eles prescindissem desse conteúdo em seu planejamento de ensino, ou que o colocassem como o último tópico no seu planejamento anual que só seria desenvolvido caso houvesse tempo.

Ao serem questionados a respeito de suas sequências de ensino sobre probabilidade, um dos professores citou que iniciava o assunto pela definição clássica (n° de casos favoráveis / n° de casos possíveis); relembrava alguns tópicos de análise combinatória e utilizava os resultados possíveis das faces de um dado após seu lançamento, sem realizar o experimento concretamente, apenas em nível mental, para enumerar um espaço amostral.

Ao iniciarem a THA a partir das atividades com jogos, os professores se depararam com uma nova abordagem sobre o processo de aprendizagem. A participação dos alunos na

construção dos conhecimentos matemáticos impôs um novo ritmo as aulas. Percebemos que em algumas situações o professor acabou intervindo diretivamente, atropelando o processo de construção do conhecimento por parte do aluno. Após a intervenção do professor houve uma homogeneização, por parte dos alunos, na execução das atividades que impossibilitou uma percepção efetiva sobre o que realmente foi apropriado por eles sobre o tópico em estudo naquele momento.

O motivo principal alegado pelos professores para não proporem alterações na primeira versão apresentada a eles, foi que se sentiam inseguros ao elaborarem atividades com a finalidade de construir as primeiras noções de probabilidade com abordagem frequentista, pelo fato de desconhecerem as pesquisas que se utilizam dessa visão e também por ignorarem a “Lei dos Grandes Números”, que é o suporte teórico para esta abordagem.

Outra constatação foi que os professores não trabalhavam com espaços amostrais não equiprováveis, privando assim os alunos de um contraponto importante na compreensão de espaços amostrais que estão presentes no cotidiano. Portanto, as contribuições dos professores, após o desenvolvimento da THA em sala de aula se limitaram à adequação das atividades ao tempo de aula e a quantidade de vezes que deveríamos lançar os dados e as moedas nos jogos propostos.

Nosso intuito foi de que os professores utilizassem a THA sobre probabilidade adequando-a a um contexto com alunos em uma situação concreta de sala de aula. Portanto, a sequência de atividades da THA poderia servir como um exemplo ou um marco de referência e não como apenas uma mera sequência de ensino.

Referências bibliográficas

- ARA, A. B. **O ensino de estatística e a busca do equilíbrio entre os aspectos determinísticos e aleatórios da realidade**. São Paulo, 2006. 113 p. Tese (Doutorado em Educação). Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo.
- BOGDAN, R.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação**: uma introdução às teorias e aos métodos. Trad. Maria J. Álvares, Sara B. dos Santos e Telmo M. Batista. Porto: Porto Editora, 1994.
- COUTINHO, C. Q. S. **Introdução ao conceito de probabilidade**: uma visão freqüentista: estudo epistemológico e didático. São Paulo: EDUC, 1996.
- _____. **Introduction aux situations aléatoires dès le Collège**: de la modélisation à la simulation d'expériences de Bernoulli dans l'environnement informatique Cabri-géomètre II. Grenoble, 2001. 338 p. Tese (Doutorado em Didática da Matemática). Université Joseph Fourier, Grenoble I.
- _____. Probabilidade geométrica: um contexto para a modelização e a simulação de situações aleatórias com Cabri. In: **Anais da reunião anual da Anped, GT19**, 2002, n°25, Caxambu/MG. Disponível em: <http://www.anped.org.br/reunioes/25/tp251.htm#gt19>. Acesso em: 29 jun. 2009.
- GODINO, J. D.; BATANERO, M. C.; CAÑIZARES, M. J. **Azar y probabilidad** (Colección: Matematicas: cultura y aprendizaje). Madrid: Síntesis, 1996.
- LOPES, C. A. E.; COUTINHO, C. Q. S. Leitura e escrita em educação estatística. In: **Educação matemática, leitura e escrita**: armadilhas, utopias e realidade. Campinas: Mercado de Letras, 2009.

PIRES, C. M. C. **Perspectivas construtivistas e organizações curriculares: um encontro com as formulações de Martin Simon.** v. 11, nº 1, pp. 70 - 89. São Paulo: Revista Educação Matemática Pesquisa, 2009.

PONTE, J. P. M. Da formação ao desenvolvimento profissional. In: **Actas do ProfMat 98.** Lisboa: APM, 1998. (pp. 27- 44).

SILVA, I. A. **Probabilidades:** a visão laplaciana e a visão freqüentista na introdução do conceito. São Paulo, 2002. (cr de Mestrado em Educação) s entre THA, design experimental e engenharia did aluno visando a aprendizagem de uma noçao 174 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

SIMON, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. **Journal for Research in Mathematics Education**, 26(2), 114-145.

SIMON, M. A.; TZUR, Ron. (2004). Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: an elaboration of the hypothetical learning trajectory. **Mathematical Thinking and Learning**, 6(2), 91-104.

Submetido em setembro de 2011

Aprovado em novembro de 2011