PERSPECTIVAS EM DIÁLOGO: Revista de Educação e Sociedade – ISSN 358-1840
https://periodicos.ufms.br/index.php/persdia/index

"PULANDO AMARELINHA": UM JOGO PARA FOMENTAR A DETERMINAÇÃO DE UM ESPAÇO AMOSTRAL NÃO EQUIPROVÁVEL EM UM EXPERIMENTO ALEATÓRIO

Paulo Jorge Magalhães Teixeira[1]

Resumo

Este trabalho objetiva tornar conhecida uma investigação acerca do ensino e aprendizagem de conceitos básicos de probabilidade por meio de um jogo de tabuleiro nomeado "Pulando Amarelinha", parte integrante de uma sequência didática destinada a estudantes dos anos iniciais Ensino Fundamental. Tal jogo está em consonância com indicações presentes na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), (BRASIL, 2018). Visa fomentar a compreensão, apropriação, exercício e desenvolvimento do raciocínio probabilístico, enquanto o estudante quantifica as chances de ocorrência de eventos simples resultantes de possibilidades de apostas na soma dos números mostrados nas faces voltadas para cima de dois dados cúbicos distintos, que são lançados ao chão durante o desenrolar do jogo, a cada rodada. Ao final de duas partidas em disputa se espera possibilitar que o estudante construa uma tabela dupla entrada e um gráfico de colunas com o propósito de enumerar todos os eventos simples, formando assim o correspondente espaço amostral, e em seguida quantificar as chances de cada. Trata-se de uma pesquisa bibliográfica que culminou com a necessidade de criação do jogo e o desenvolvimento de atividades segundo uma metodologia do tipo Design Experiment, com as quais objetiva-se dimensionar a importância da sua proposição de modo a contribuir para a melhoria dos processos de ensino e aprendizagem da temática.

Palavras-chave: Jogo; Probabilidade; Raciocínio Probabilístico; Espaço Amostral.

"JUMPING HOPSCOTCH": A GAME TO ENCOURAGE THE DETERMINATION OF A NON-EQUIVALENT SAMPLE SPACE IN A RANDOM EXPERIMENT

Abstract:

This work aims to make known an investigation about the teaching and learning of basic concepts of probability through a board game called "Pulando Amarelinha", an inte part of a didactic sequence aimed at students in the early years of Elementary School. Such a game is in line with indications present in the Common National Curriculum Base (BNCC), (BRASIL, 2018). It aims to promote understanding,

[1] Doutor em Educação Matemática pela UNIBAN – Universidade Bandeirante de São Paulo (2012). Professor Associado, Departamento de Análise, Instituto de Matemática e Estatística, UFF - Universidade Federal Fluminense. Membro do GEPEMATEC – Grupo de Estudos e Pesquisas do Ensino da Matemática e Tecnologias da UEMA – Universidade Estadual do Maranhão. Contato: paulojorge@id.uff.br

appropriation, exercise and development of probabilistic reasoning, while the student quantifies the chances of occurrence of simple events resulting from betting possibilities on the sums of the numbers shown on the faces facing upwards of two different cubic dice, which are thrown to the ground during the course of the game, each round. At the end of two matches in dispute, it is expected to allow the student to build a double entry table and a column chart with the purpose of enumerating all the simple events, thus forming the corresponding sample space, and then quantifying the chances of each. This is bibliographic research that culminated in the need to create the game and the development of activities according to a Design Experiment methodology, with which the objective is to measure the importance of its proposition in order to contribute to the improvement of processes of teaching and learning on the subject.

Keywords: Game; Probability; Probabilistic Reasoning; Sample Space.

1. Introdução

Alguns documentos curriculares nacionais: Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (BRASIL, 1997) e Base Nacional Curricular Comum - BNCC (Brasil, 2018) - e pesquisadores da educação matemática (GRANDO, 2000; MUNIZ, 2010; LOPES; REZENDE, 2010; TEIXEIRA; 2021, 2022) defendem a utilização do jogo como um recurso didático que possibilita não apenas o desenvolvimento de conhecimentos matemáticos, mas também no que refere a formas de pensamento. Entretanto, para caracterizar o jogo como um recurso de ensino faz-se necessário que ele apresente desafios às crianças, além da diversão.

Por um jogo extra-matemático entendemos todo jogo que nos permita considerar e valorizar contextos reais como motivadores e geradores de conhecimento matemático, embora o seu desenvolvimento nem sempre seja justificado do ponto de visto epistemológico em detrimento possível dificuldades se considerar as conexões metafóricas. Os jogos didáticos matemáticos e os didáticos extra-matemáticos possibilitam o estabelecimento de conexões e aprendizados que incluem: a criação de estratégias; o levantamento e testes de hipóteses; a reflexão, análise, debate, argumentação, compreensão, exercício, apropriação e o desenvolvimento de um dado conceito.

Quando da proposição de um jogo pelo professor, em sala de aula, como é o caso do presente jogo "Pulando Amarelinha", é possível que os estudantes elaborem estratégias variadas com o propósito de sair vencedor em uma partida, bem como, também, o de compartilhá-las com os colegas. Procedendo desse modo, eles estarão ampliando seus conhecimentos a partir de reflexões e discussões entre eles, e entre eles e o professor, de preferência estimuladas por este.

O professor pode fazer bom uso dos jogos, e a partir deles poderá observar os conhecimentos que tenham sido apropriados por seus estudantes bem como, também, poderá identificar uma ou outra fragilidade de um ou mais estudantes em relação aos conceitos que estão sendo tratados ou que não tenham sido claramente compreendidos, ou acerca dos conceitos que porventura tenham deixado dúvidas em relação à sua correta compreensão.

O processo investigativo, presente neste estudo, buscou responder à seguinte questão principal: Quais ferramentas são necessárias utilizar e como proceder para permitir ao estudante estar em condições de construir o espaço amostral do particular experimento aleatório objeto do jogo, de maneira a subsidiar o desenvolvimento de conhecimentos de probabilidade que estão em consonância com o que é defendido pela literacia probabilística (letramento probabilístico)?

Entendemos que a importância e a necessidade de estudos como este se fazem presentes por conta de a BNCC (BRASIL, 2018), apontar como uma de suas temáticas o ensino de Probabilidade e Estatística desde os anos iniciais do ensino fundamental, o que até então não era considerado, neste segmento de ensino.

Por outro lado, embora os autores da BNCC descrevam os objetos de aprendizagem e enumerem as habilidades que eles consideram devem ser exploradas, desenvolvidas e aprendidas a cada ano deste segmento de ensino, por professores e estudantes, o que em si se configura um grande avanço para a formação matemática dos estudantes, apenas isso não atende às necessidades do professor, em seu diuturno trabalho docente.

Apesar deste considerável avanço, a BNCC deixou de exemplificar sugestões de atividades; possibilidades de ensino e a utilização de ferramentas que são necessárias ao ensino das temáticas. Também, como tal trabalho poderia ser feito pelos professores de modo que eles estabeleçam condições favoráveis para o oferecimento de ensino qualificado aos seus estudantes segundo o qual eles se preparem adequadamente para atingir os objetivos de conhecimento, para cada uma das habilidades descritas no texto da BNCC em cada um dos nove anos do ensino fundamental. Ademais, a partir da promulgação da BNCC (BRASIL, 2018) se espera dos currículos que estão sendo elaborados pelas Secretarias de Educação municipais e estaduais Brasil afora, documentos que cubram todas essas lacunas.

O período pandêmico da Covid-19, que atravessamos de 2019 a 2022, contribuiu para um atraso considerável em relação a essa imperiosa necessidade. Por estas razões, entendemos que se faz necessário fomentar espaços de construção de conhecimentos, por meio dos quais possam ser contempladas todas as habilidades presentes na BNCC no que concerne, em particular, à temática probabilidade. Finalizando, se espera que este estudo subsidie diretamente o trabalho docente do professor que ensina matemática em relação às habilidades contempladas, oferecendo-lhes referencial teórico, metodológico e de conteúdo para que o trabalho docente possibilite aos estudantes obterem domínio sobre tais habilidades e a apropriação de conhecimentos subjacentes a elas.

2. Referencial teórico

Segundo Gal (2005), a literacia probabilística constitui-se de três construtos: *alfabetização* (conjunto de habilidades de probabilidade que fundamentam os conceitos, tais como a leitura, o entendimento do contexto em jogo e as ferramentas matemáticas que dão sustentabilidade à teoria); *numeracy* (conjunto de informações que são quantificáveis), e *literacia estatística* (refere-se, de maneira ampla, à capacidade de as pessoas interpretarem e avaliarem criticamente uma informação estatística (fenômenos estocásticos) que pode ser encontrada em diferentes contextos, e o quanto de conhecimentos são necessários para que esses sujeitos discutam e comuniquem suas compreensões, reações e posições que são provenientes de análises acerca de implicações acerca do que tal informação possa interferir na aceitabilidade ou não das conclusões que sejam apresentadas a partir dela) (GAL, 2002).

Segundo Bryant et al., (2012), para o entendimento da probabilidade é preciso que um estudante se aproprie das competências listadas a seguir - sem a dispensa de nenhuma delas -, como condições para a caracterização e o desenvolvimento do pensamento probabilístico: Compreender a natureza e as consequências do uso do conceito de aleatoriedade, no dia a dia; Categorizar características dos elementos de modo a formar espaços amostrais; Quantificar e comparar probabilidades; Estabelecer e entender correlações entre eventos em um espaço amostral, relacionando-os entre si, se for o caso.

Uma Sequência Didática é uma série de situações que se estruturam ao longo de uma quantidade pré-fixada de aulas. Estas situações, devidamente estruturadas, têm como objetivo tornar possível a aquisição de saberes bastante claros, não esgotando o assunto trabalhado. O saber matemático vai sendo construído durante todo o desenvolvimento da Sequência Didática. Essa construção do saber só evolui em função das decisões do ator (aquele que resolve) e das condições objetivas.

Desse modo, uma Sequência Didática não pode, a priori, ter o seu tempo de duração estipulado de acordo com o programado, pois o seu cumprimento leva em conta as necessidades e dificuldades dos estudantes durante o processo (TEIXEIRA; PASSOS, 2013).

Foi adotada a metodologia *Design Experiment in Educational Research*, de Cobb et al., (2003), e a escolha se deu por conta dessa metodologia permitir uma flexibilidade para adaptar o desenho inicialmente proposto, para desenvolver as diferentes atividades, nos distintos momentos, levando em consideração a produção (aproveitamento) apresentada pelos sujeitos da pesquisa.

Para tal, o desenho é preliminarmente elaborado, e fica sujeito a remodelações, reformulações, em idas e vindas, as quais permitem que se possam fazer novas conjecturas, novas perguntas de pesquisa, a qualquer tempo, as quais devem ser testadas a posteriori.

Por essas razões, as análises são feitas nos sujeitos da pesquisa, no estudo das suas trajetórias, na coleta das dificuldades, facilidades, e nos avanços obtidos. Ou seja, é previsto elaborar experimentos de ensino de conceitos e procedimentos da

Matemática com o propósito de obter inovações diversas mediante avanços obtidos pelos sujeitos da pesquisa. Sendo assim, trata-se de um processo amplo, flexível, cíclico, iterativo, ajustável.

O desenvolvimento do ensino e da aprendizagem de noções de probabilidade com estudantes dos anos iniciais deve ser feito em um crescente - considerando as quatro competências acima -, por meio do uso de recursos didáticos, como a proposição de jogos e de situações-problema a eles associados, segundo a Teoria de Resolução de Problemas tal como aponta Onuchic (1999). Todo e qualquer trabalho didático que seja feito com esses propósitos configura-se parte importante da compreensão, apropriação, exercício e o desenvolvimento do raciocínio probabilístico. De maneira geral, contribui decisivamente para o desenvolvimento do pensamento matemático.

O jogo que ora está sendo apresentado foi pensado e planejado com o propósito de permitir que o estudante mobilize o raciocínio probabilístico e exercite as três primeiras competências listadas acima, bem como objetiva favorecer a apropriação de competências presentes na BNCC, como as que serão elencadas a seguir.

A BNCC apresenta habilidades a respeito do ensino e da aprendizagem de probabilidade básica, sugeridas para serem trabalhadas com os estudantes dos anos iniciais do ensino fundamental. Dentre as habilidades que estão próximas aos objetivos se espera sejam atendidos com o jogo "Pulando Amarelinha", que ora está sendo proposto, destacam- se as seguintes:

> Para o 3º Ano do Ensino Fundamental, o Objeto de conhecimentos é a "Análise da ideia de acaso em situações do cotidiano: espaço amostral", e a habilidade requerida é: (EF03MA25) Identificar, em eventos familiares aleatórios, todos os resultados possíveis, estimando os que têm maiores ou menores chances de ocorrência"; Para o 4º Ano do Ensino Fundamental, o Objeto de conhecimentos é a "Análise de chances de eventos aleatórios", e a habilidade requerida é: (EF04MA26) Identificar, entre eventos aleatórios cotidianos, aqueles que têm maior chance de ocorrência, reconhecendo características de resultados mais prováveis, sem utilizar frações; Para o 5º Ano do Ensino Fundamental, o Objeto de conhecimentos é o "Espaço amostral: análise de chances de eventos aleatórios", e a habilidade requerida é: (EF05MA22) Apresentar todos os possíveis resultados de um experimento aleatório, estimando se esses resultados são igualmente prováveis ou não (BRASIL, 2018, p. 235).

Estamos considerando que a brincadeira "Pulando Amarelinha" está próxima do cotidiano dos estudantes, estudem eles em uma escola localizada em uma cidade, no campo ou em uma comunidade quilombola ou indígena, por exemplo. Por essa razão, esperamos que o presente jogo seja familiar aos estudantes, seja próximo do cotidiano dos estudantes.

Em uma rápida leitura das habilidades apresentadas acima, é possível observar que o reconhecimento de todos os resultados possíveis em um experimento aleatório é sugerido ser feito em diferentes momentos que permeiam os estudos, estendendo-se do 3º ao 5º ano do ensino fundamental. Assim, é sugestivo que tal reconhecimento seja feito em um crescente a partir de experimentos presentes no cotidiano dos estudantes.

Por outro lado, uma vez que a identificação dos eventos simples - elementos do espaço amostral - decorre de efeitos oriundos da incerteza, da aleatoriedade e de estimativas, entendemos que apenas identificar e enumerar esses elementos e estabelecer as chances (o cálculo da probabilidade) de cada um não seja o bastante para fomentar a interpretação e o conhecimento dos estudantes acerca dos demais conceitos que estão presentes na *literacia probabilística*.

3. Propósitos e sujeitos do estudo

Para o desenvolvimento deste estudo contamos com a colaboração de quatro estudantes A_1, A_2, A_3 e A_4, todos do 4º ano do ensino fundamental, com a devida interviência e autorização de seus país e de dois professores P_1 e P_2, que trabalham em turmas nos anos iniciais do ensino fundamental, mas não são os professores dos quatro estudantes, tendo sido convidados pelo proponente. Doravante, todos os colaboradores serão designados como sujeitos de estudo.

O estudo reuniu um forte cunho descritivo em relação às regras do jogo, incluindo os diálogos havidos entre os estudantes e entre eles e os professores e o proponente. Esta proposta deste jogo também se direciona a todos os professores que se dispuserem a aplicá-lo com os seus estudantes. Em Teixeira (2021) encontram-se outros jogos do universo da temática probabilidade, os quais poderão vir a fazer parte do portfólio de opções do professor.

O jogo em questão foi elaborado levando em conta o relato das duas professoras tanto em relação às suas experiências pedagógicas com estudantes deste segmento, quanto aos possíveis conhecimentos dos seus estudantes no tocante à temática envolvida. O pesquisador refletiu com as professoras acerca dos resultados da avaliação prévia que foi aplicada no tocante aos aspectos da literacia probabilística que precisam ser desenvolvidos em sala de aula no que refere às habilidades que foram apresentadas acima, conforme as orientações presentes na BNCC (2018), uma vez que tais habilidades permeiam o desenrolar das partidas do jogo.

Para atender os propósitos do jogo um planejamento precisou ser elaborado tomando por base o objetivo de favorecer os sujeitos de estudo para o desenvolvimento dos conceitos segundo os significados que permeiam a construção de uma tabela de dupla entrada e de um gráfico de colunas, aliado com a importância destes para o encaminhamento dos cálculos referentes às probabilidades de eventos simples e de eventos compostos.

Inicialmente foi pensada e elaborada uma breve avaliação prévia de sondagem composta de seis questões, a qual será apresentada mais adiante. Anteriormente à apresentação e o desenvolvimento do jogo que está sendo objeto deste trabalho os sujeitos do estudo foram instados a responder tal avaliação. As respostas à avaliação, as explicacões a respeito das regras do jogo, a disputa de duas partidas do jogo por todos os sujeitos do estudo, e as reflexões e discussões que se seguiram demandaram um total de cinco encontros, com duração aproximada de 50 minutos cada.

Por conta do momento de isolamento social e restrições de contatos dos estudantes em grupos provenientes da pandemia de Covid-19, é propício que o estudo inicial (o estabelecimento das regras do jogo) seja encaminhado pelo professor por meio de aulas *on-line*, e a sugestão de os estudantes se reunirem em pares, na casa de um deles, para jogar. Quando do retorno às aulas presenciais, recomenda-se que o estudo seja retomado, agora em um ambiente natural (sala de aula), para a coleta direta de dados das produções dos estudantes - tendo ao menos uma partida sido disputada por cada estudante -, após reflexões, intervenções e discussões entre si e estes com o professor - momentos em que o professor poderá exercer o papel de mediador, na promoção de reflexões e discussões coletivas. O período de distanciamento das salas de aula por um longo período devido à pandemia não permitiu que se avaliasse a eficácia do jogo com o contingente de estudantes de toda uma turma.

4. Procedimentos metodológicos e tipo de investigação

Este trabalho está em consonância com as ideias defendidas por Bogdan e Biklen (1994), no que refere ao tipo de pesquisa qualitativa, desde a elaboração da sequência didática segundo a qual o jogo ora proposto faz parte. Em prosseguimento, tem-se a elaboração e a proposição do jogo, a análise dos benefícios de se propor o jogo e o jogar, pelos estudantes, e os resultados que foram obtidos de modo a avaliá-los.

A metodologia Design *Experiment in Educational Research,* de Cobb et al., (2003) foi a adotada para estruturar a apresentação do jogo, o seu desenrolar e as atividades que se desenvolveram em prosseguimento. Durante a primeira avaliação do jogo - feita pelos professores colaboradores -, ajustes fizeram-se necessários serem feitos no design inicial, bem como ajustes finos finais foram feitos após a testagem com os sujeitos de estudo. Assim, a escolha da metodologia mostrou-se pertinente, uma vez que se deu em função de ser dotada de flexibilidade de adaptação ao desenho inicial proposto considerando as produções fornecidas pelos sujeitos do estudo, e as reflexões finais do proponente.

Segundo a metodologia um desenho básico flexível (que pode ou não sofrer modificações ao longo de todo o processo do estudo) deve ser preliminarmente elaborado. Por conta de possíveis modificações, a metodologia permite que sejam geradas novas conjecturas, como é preciso, as quais precisam ser testadas a posteriori. Além do mais, tal metodologia prevê a elaboração de experimentos de ensino de conteúdos da Matemática com vistas à obtenção de inovações.

Um dado importante da metodologia, aplicável neste trabalho, é que a fonte direta de obtenção dos dados se dê em um ambiente natural, a sala de aula, tendo o professor investigador como elemento central na mediação das atividades. Em virtude das restrições sanitárias, tal não foi possível com este trabalho.

Salienta-se a importância de o professor responsabilizar-se por identificar as adaptações que considere sejam necessárias serem implementadas ao longo e após o desenrolar de sua utilização enquanto assume o papel de orientador/mediador, intervindo somente em momentos críticos considerados por ele como de bloqueio, durante o desenrolar das tarefas que estão sendo propostas.

O estudo - previsto para ser desenvolvido ao longo de 3 a 4 aulas de 50 minutos cada - deve ter o seu início a partir do momento em que o propósito pedagógico for o de analisar a produção dos estudantes no tocante ao conhecimento, apropriação e exercício do raciocínio probabilístico; a construção de espaços amostrais e nas resoluções e a comunicação de respostas referentes a um conjunto de problemas, os quais devem ser propostos ao final de ao menos duas partidas do jogo para todos os estudantes de uma mesma turma. O jogo se propõe ser um instrumento que contribuí para o ensino e a aprendizagem de conceitos da literacia probabilística, como a quantificação de probabilidades e a comparação de chances de eventos entre si.

Estudos de Teixeira (2021, 2022) têm constatado que a resolução de problemas em estreita relação com o conteúdo sublimar presente em um jogo que o estudante tenha dele participado, como jogador, torna-se agradável, prazeroso e desafiador. Ademais, as aulas também se revestem de maior participação dos estudantes e são mais atraentes, do ponto de vista de fomento às reflexões e discussões conjuntas que se sucedem ao jogar. Tal prática permite aos estudantes tornarem-se mais ativos e protagonistas de sua própria aprendizagem, na construção de seus conhecimentos. O jogo é parte integrante de uma sequência didática de ensino que objetiva introduzir noções relacionadas com a determinação do espaço amostral de um experimento aleatório, que é familiar ao universo dos estudantes.

Uma vez que a *literacia* probabilística tem o propósito de permitir o cálculo, a análise e a interpretação da probabilidade de eventos simples e compostos, o comprometimento teórico que subsidia este estudo está em estreita consonância com os conceitos, definições e resultados presentes no escopo desta, como não poderia deixar de ser. Por sua vez a metodologia *Design Experiment* de Cobb et al., (2003) que subsidia e estrutura o estudo, permite a participação efetiva dos estudantes no processo de construção do conhecimento. Fato é que após a disputa de ao menos duas partidas do jogo têm-se momentos em que os estudantes constroem a tabela de dupla entrada e o gráfico de colunas de maneira autônoma com base no jogo, e ao final, quando participam de reflexões e discussões - respondendo a indagações que são feitas pelo professor - efetivamente estarão construindo seus conhecimentos por meio de procedimentos metodológicos de ensino que objetivam o aprender de modo efetivo. Ademais, a flexibilidade da metodologia também permite que o professor modifique, insira e/ou retire, se for o caso, questões que visem melhorar todo o processo de ensino e aprendizagem da temática.

Antes que o jogo em questão tivesse sido testado pelos sujeitos de estudo, uma análise preliminar - por meio do questionário, que será apresentado em prosseguimento – lhes foi proposta com o objetivo de o proponente conhecer os conhecimentos e as concepções prévias dos estudantes relativamente ao conteúdo objeto do jogo.

Por conta do limitado espaço disponível para este trabalho, as análises das respostas apresentadas pelos sujeitos do estudo, para cada questão, tiveram de ser reduzidas a apenas duas delas. Do universo de respostas para cada questão foram escolhidas as mais representativas, tanto em relação às que estão corretas quanto às incompletas ou erradas.

O jogo "Pulando Amarelinha" tem como principal foco, o ensino de ideias iniciais acerca do estabelecimento do espaco amostral do experimento aleatório "Lançamento de dois dados cúbicos distintos ao chão e a determinação da soma dos números mostrados nas faces voltadas para cima".

De conhecimento e posse de todos os eventos simples (elementos do espaço amostral), os estudantes poderão determinar e comparar, agora, as chances entre eles, como parte das habilidades que integram o conteúdo de probabilidade básica.

Em prosseguimento, apresentamos a descricão e o desenvolvimento do jogo autoral.

5. Descrevendo o Jogo "Pulando Amarelinha"

O presente jogo pode ser proposto para crianças dos anos iniciais do ensino fundamental, como parte do trabalho de um professor que ensina Matemática na Educação Básica. Também pode ser proposto para estudantes de anos avançados da Educação Básica, como um instrumento pedagógico que tenha por objetivo o de contribuir para a aprendizagem inicial da temática probabilidades.

5.1 Materiais que precisam ser disponibilizados para o Jogo "Pulando Amarelinha"

Trata-se de um jogo que é disputado entre dois jogadores: A e B. Os dois jogadores devem responder ao questionário apresentado conforme o quadro 1, a seguir, antes mesmo de ter início uma partida, de modo a subsidiar o trabalho do professor quando da sua mediação durante as reflexões que devem ser feitas após a disputa de pelo menos duas partidas.

Quadro 1: Questionário que antecede o início de uma partida do Jogo "Pulando Amarelinha".

Questionário que antecede o início de uma partida do Jogo "Pulando Amarelinha" **Respostas do Jogador A ( )** **Respostas do Jogador B ( )**
1. a) Eis os números escolhidos por mim, para a disputa da próxima partida (no máximo, 8 (oito) números): (..., ..., ..., ..., ..., ..., ..., ...)

b) Há uma razão, pessoal ou não, para você ter feito a escolha desses números? ...... Explique-nos: .... c) Se as regras do jogo permitissem a escolha de 15 números, no máximo, que outros números você acrescentaria na lista acima (ou não acrescentaria nenhum outro número)? .... 2. Você acha que a escolha dos números para fazer as apostas, feita por você, constitui um fator decisivo e único para a sua possivel vitória? .... Quais razões o fazem pensar assim? .... 3. Ao lançar dois dados diferentes ao chão e observar os números mostrados nas faces que estão voltadas para cima, você acha que a quantidade de possibilidades de a soma desses números ser igual a 6 é menor, igual ou maior que a quantidade de possibilidades de a soma desses números ser igual a 8? .... Quais razões o fazem pensar assim? .... 4. Ao lançar dois dados diferentes ao chão e observar os números mostrados nas faces voltadas para cima, você acha que a quantidade de possibilidades de a soma desses números ser igual a 10 é o dobro da quantidade de possibilidades de a soma desses números ser igual a 5? .... Quais razões o fazem pensar assim? ....

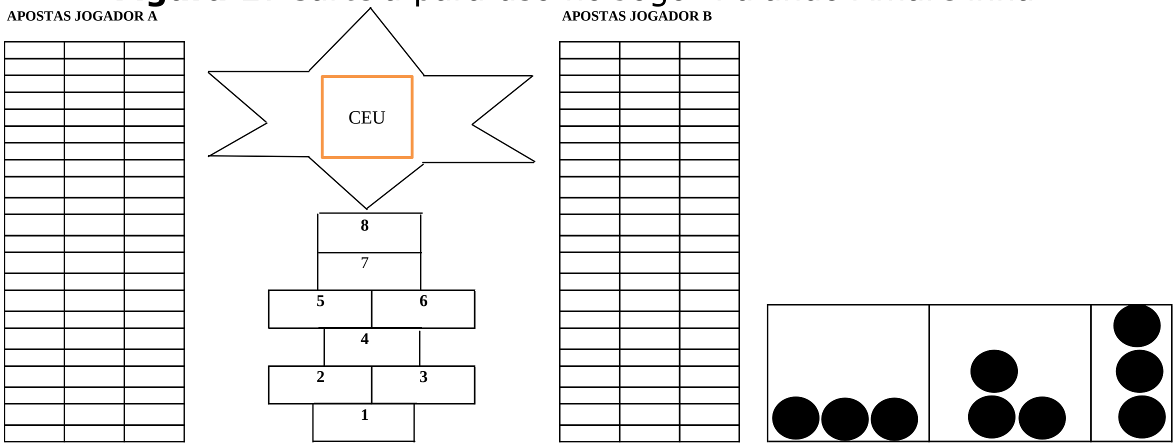
Fonte: o autor (2022).

Os números que foram escolhidos como resposta para a primeira pergunta do questionário, por cada jogador, mesmo antes que uma partida tenha início, serão aqueles que ele considera estarão disponíveis para fazer as apostas no decorrer da partida, a cada rodada. Após todas as perguntas iniciais terem sido respondidas pelos dois jogadores, a partida terá início, e não será permitido fazer alterações nas anotações das respostas e nas escolhas dos números durante o decorrer de uma partida. Serão benvindas quaisquer alterações nas respostas, mas apenas ao final da partida, e tais anotações devem ser escritas no verso da folha do “Questionário”, cuidando para que fiquem preservadas as anotações iniciais. O mesmo ocorre cada vez que um jogador tenha que decidir acerca da suas aposta, feita antes que os dois dados sejam lançados ao chão.

É importante salientar que antes mesmo do início de uma partida, cada jogador já estará mobilizando o pensamento probabilístico em relação ao teor de cada uma de suas respostas às perguntas presentes no “Questionário que antecede o início de uma partida do Jogo “Pulando Amarelinha”, como acima, no quadro 1.

Uma cartela, para uso durante o desenrolar das partidas do jogo “Pulando Amarelinha” deve ser utilizada, tal como a que é mostrada na figura 1, a seguir:

Figura 1: Cartela para uso no Jogo "Pulando Amarelinha".



Fonte: o autor (2022).

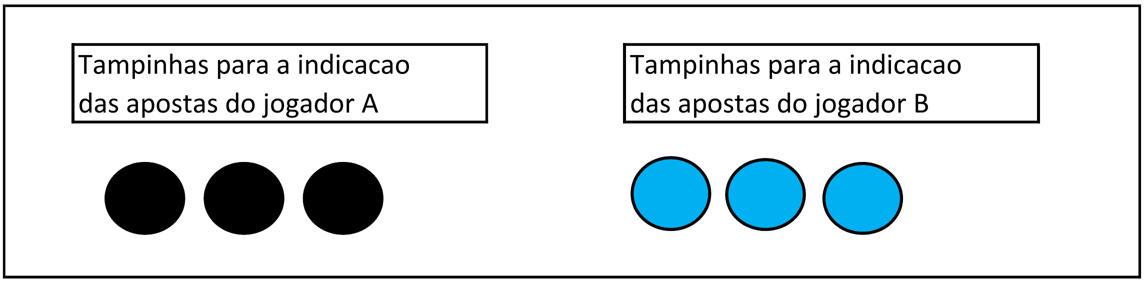
O Jogo "Pulando Amarelinha" se desenrola por meio do uso de dois dados cúbicos, distintos entre si (dados com 6 faces numeradas como 1, 2, 3, 4, 5 e 6), como mostrado na figura 2, a seguir, os quais são lançados juntos ao chão, a cada rodada em disputa, de modo a quantificar a soma dos números mostrados nas faces dos dois dados voltadas para cima.

Figura 2: Dois dados cúbicos, distintos entre si, usados no Jogo "Pulando Amarelinha".

Fonte: o autor (2022).

Para o registro das apostas dos jogadores a cada rodada são utilizadas três tampinhas de garrafa pet de apostas (TGPA), nas cores preta e azul. A figura 3, a seguir, mostra-nos três TGPA de cor preta disponíveis para as apostas do jogador A, e três TGPA de cor azul disponíveis para as apostas do jogador B. Na cartela do jogo, figura 1, direita, como acima, cada jogador deve posicionar suas TGPA nos retângulos, rodada a rodada, conforme seja o tipo de sua aposta: três apostas simples (escolher três números e colocar as suas três TGPA sobre três retângulos), uma aposta dupla e outra aposta simples, ou uma aposta tripla (escolher um único número e colocar as suas três TGPA sobre um retângulo com o único número por ele escolhido).

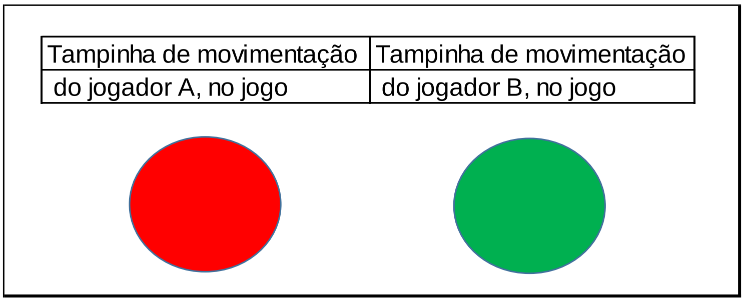
Figura 3: Tampinhas de garrafa pet de apostas (TGPA) - Jogo "Pulando Amarelinha".



Fonte: o autor (2022).

Para identificar a movimentação do progresso de cada jogador durante uma disputa do jogo, são utilizadas tampinhas garrafa pet de movimentação (TGPM), a serem posicionadas nos quadrados numerados de 1 a 8 até a regiao da vitória, denominada de Céu, tal como mostrado no desenho da cartela do jogo "Pulando Amarelinha", e tanto pode ser feita por cada jogador em disputa quanto por alguém que esteja acompanhando o desenrolar do jogo. A TGPM de cor vermelha é destinada para as movimentações do jogador A, e a TGPM de cor verde é destinada para as movimentações do jogador B, como mostrado na figura 4, a seguir:

Figura 4: Tampinhas de garrafa pet de movimentação (TGPM) – Jogo "Pulando Amarelinha".



Fonte: o autor (2022).

A cada rodada de uma disputa do jogo, os dois dados cúbicos distintos são lançados juntos ao chão por um dos jogadores, alternando ou não esses lançamentos entre eles. Com os números mostrados nas faces voltadas para cima dos dois dados, o valor da soma entre eles é calculado. Se o resultado obtido com a soma coincidir com o valor apostado por um jogador (ou pelos dois), ele(s) avança(m) uma posição ou duas posições (avança com a sua TGPM, posicionando-a no segundo quadrado após o quadrado de onde se encontra a sua TGPM, ou avança para a região Céu (tornando-se ganhador da disputa)) ou avança três posições com a sua TGPM (avança, posicionando-a no terceiro quadrado após o quadrado de onde se enconta a sua TGPM, ou avança para a região Céu), conforme a aposta tenha sido simples, dupla ou tripla, respectivamente).

A partida prossegue, e torna-se vencedor da partida o jogador que primeiro posicionar a sua TGPM na região Céu. Pode ser que ocorra empate (caso em que os dois jogadores chegam juntos à região Céu). Nesse caso, uma nova partida terá de ser disputada entre ambos de modo a conhecer o vencedor.

Ao longo do desenrolar de cada uma das duas partidas do jogo, que são sugeridas ser disputadas por cada estudante de uma turma, a ficha “Informações do desenvolvimento disputas no Jogo “Pulando Amarelinha””, conforme o quadro 2, a seguir, deve ser preenchida, preferencialmente por um estudante que não seja um dos dois jogadores, talvez o professor. As informações registradas tanto servem para informar o professor a respeito das decisões que foram tomadas pelos jogadores, a cada rodada em disputa, quanto para o conhecimento pessoal de cada jogador acerca dos progressos e recuos. Também tem o propósito de permitir que os jogadores façam reflexões pessoais e coletivas no grupo como um todo. Tomando por base a movimentação das tampinhas e os registros feitos na referida ficha, entre uma partida e outra, o professor pode dirigir perguntas aos jogadores indagando, por exemplo, se há uma razão especifica para terem feito determinada aposta.

Quadro 2: Ficha Informações do desenvolvimento disputas no jogo “Pulando Amarelinha”.

Informações do desenvolvimento disputas no Jogo “Pulando Amarelinha”
Resultados das somas dos números mostrados faces dos dados jogados ao chão: 1ª rod.: ApostaA:(...,...,...) ApostaB:(...,...,...) Soma:...PosiçãoA:... PosiçãoB:... 2ª rod.: ApostaA:(...,...,...) ApostaB:(...,...,...) Soma:...PosiçãoA:... PosiçãoB:... 3ª rod.: ApostaA:(...,...,...) ApostaB:(...,...,...) Soma:...PosiçãoA:... PosiçãoB:... continua ...
Vencedor do jogo? Jogador A .... Jogador B ....

Fonte: o autor (2022).

5.2 Objetivos gerais do jogo

O propósito do jogo é que a cada rodada cada jogador reflita para tomar a decisão - considerando os números disponíveis para as suas apostas - de fazer a sua aposta em relação ao possível valor da soma que considere ser possivel obter entre os números que ele supõe serão os números que irão ser mostrados nas faces voltadas para cima dos dois dados cúbicos distintos após eles terem sido lançados ao chão.

Nesses momentos cada jogador pode/deve refletir acerca de quais números considera que terão maior ou menor possibilidade de ocorrer como resultado da soma, e que o número de possibilidades, para cada número, está associado à chance de ocorrência em relação ao número total de possibilidades de soma que podem ser consideradas. Também, que qualquer que seja o resultado da soma a considerar, este resultado poderá ser obtido por no mínimo duas possibilidades (caso da soma igual a 2 ou da soma igual a 12), e qualquer número maior que 12 não é resultado da soma de números presentes nas faces de dois dados cúbicos. Assim, nesse sentido qualquer escolha de um número que tenha sido feita de início, quando das respostas ao questionario inicial, para que pudesse vir a ser escolhido como uma aposta, não terá serventia alguma ser utilizado como uma aposta para o resultado da soma entre os números mostrados nas faces dos dois dados cúbicos.

Espera-se que cada jogador se comporte como um jogador pro ativo, ou seja, um jogador que deseja vencer o jogo. Olhando sob o viés de disputa do jogo em si apenas, o objetivo de cada jogador enquanto joga é o de chegar com a sua TGPM à região denominado Céu, de modo a sair vencedor da partida antes do seu oponente. O professor pode/deve mediar as disputas lançando questões correlatas para os jogadores possam ir pensando enquanto jogam, considerando o que cada jogador respondeu por ocasião do questionário inicial.

5.3 Objetivos pedagógicos do jogo

O principal objetivo pedagógico do jogo é o de oportunizar aos jogadores refletirem acerca da determinação do total de possibilidades para cada uma das somas possíveis dos números, mostradas nas faces dos dois dados cúbicos (cada resultado da soma associado com o total de possibilidades de ela ocorrer, uma vez que cada resultado da soma será considerado como um evento simples (um elemento do conjunto, denominado espaço amostral), relativamente ao experimento aleatório “lançar dois dados cúbicos distintos ao chão e quantificar a soma dos números mostrados nas faces voltadas para cima”). Ademais, a cada evento simples tem o bjetivo de que os jogadores associem a chance de ocorrência dessa soma em relação ao total de possibilidades de ocorrerem as somas dos números mostradas nas faces dos dois dados cúbicos. Após duas partidas em disputa, se espera que cada jogador tenha aproveitado o bastante para compreender como deve proceder para determinar o valor da chance de ocorrência de cada um dos eventos simples pertencentes ao espaço amostral do experimento aleatório. Também, que cada jogador tenha identificado a necessidade de ter de anotar um total de onze números, como possíveis resultados para as somas, de modo que a cada rodada de uma partida eles sejam objeto de escolha para fazer as apostas possíveis de serem feitas.

É esperado que cada jogador saiba determinar qual valor da soma é mais provável ocorrer e quais valores da soma têm menores chances de ocorrer. Se for o caso, também se espera que os jogadores identifiquem que um ou mais números por eles anotados no início de uma disputa são eventos impossíveis ocorrer, isto é, número(s) natural(s) de valor(es) maior(es) que 12 ou de valor(es) menor(es) que 2. Ademais, também se espera que o jogo permita-lhes o aprendizado de saber determinar o valor da chance de ocorrência de alguns eventos compostos próprios a este experimento aleatório, uma vez que é bastante grande o quantitativo de eventos compostos possíveis de serem feitos. Portanto, um objetivo pedagógico do jogo é o de permitir ao jogador que avalie as chances de cada evento simples a cada rodada e também possa mobilizar o pensamento probabilístico na busca de respostas para as perguntas do questionário, bem como oportuniza que possa identificar que o espaço amostral associado ao experimento aleatório em questão é um espaço amostral não equiprovável.

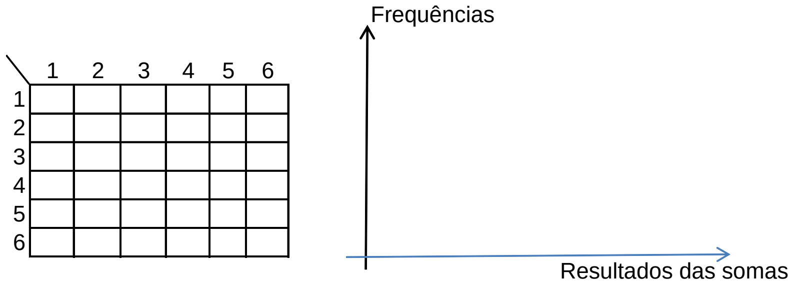
Salientamos que não se coloca oposição ao fato de os jogadores trocarem ideias entre si durante o desenrolar de uma partida do jogo, bem como os demais estudantes da turma uns com os outros entre si. Tal comunicação tem o propósito de oportunizar o entendimento relacionado com os cálculos das chances de eventos simples do experimento aleatório em questão.

Sendo assim, espera-se que a partir de então cada jogador esteja preparado para identificar, com segurança e desenvoltura, todos os elementos do espaço amostral em questão. E, como consequência dessas reflexões, aproprie-se de conhecimentos que o permitam vir a resolver problemas de probabilidade que estejam relacionados com o experimento aleatório ou em proximidade com este.

Alem do mais, o professor deve aproveitar a oportunidade e pedir aos estudantes que preencham uma tabela de dupla entrada - a qual deve ser apresentada por ele -, como a mostrada na Figura 5, a seguir, a qual mostre todas os possibilidades como cada soma pode ser obtida. Ressaltamos, também, que os conhecimentos acerca da construção de tabelas de dupla entrada são sugeridos na BNCC para serem desenvolvidos com os estudantes a partir do 2º ano do ensino fundamental.

De posse da tabela de dupla entrada que tenha sido construída pelos estudantes, o professor deve orientá-los no tocante à construção de um gráfico de colunas - como o que está esboçado na figura 5, a seguir -, o qual visa mostrar as frequências absolutas de todas as somas possíveis. Se o professor considerar oportuno, pode aprofundar o conhecimento acerca da proximidade de tal gráfico com o gráfico de uma distribuição normal.

Figura 5: Esboço de um gráfico de colunas e de uma tabela de dupla entrada.



Fonte: o autor (2022).

5.4 Explorando algumas possíveis variações do jogo

O jogo em si é bastante flexível, uma vez que há a possibilidade de ele poder ser disputado por mais de dois jogadores, em conjunto. Para tal, a cada novo jogador que seja incluído em uma mesma disputa será preciso dispor de novas cartelas de jogo, TGPA de cores diferentes das que estejam sendo utilizadas, e novas TGPM de mesma cor e cores distintas das das demais TGPM que estejam sendo utilizadas. Tal procedimento se repete a cada inclusão de dois novos jogadores.

5.5 Estudantes comunicando a aprendizagem e a proposição de problemas

Recomenda-se ao professor que oportunize aos estudantes a possibilidade de eles mostrarem o que aprenderam com o jogo, por meio de algumas situações didáticas. O professor pode propor que os estudantes criem problemas a partir da problemática presente no estudo inicial de probabilidade presente no jogo, e a sugestão para que os demais estudantes da turma resolvam tais problemas propostos antes mesmo de ele pensar na possibilidade de estes problemas virem a ser incorporados em uma futura sequência didatica.

Ademais, novos problemas serão sempre acolhidos para análise, mesmo que eles não sejam incorporados a um novo jogo no futuro. Ademais, os problemas propostos pelos estudantes deverão ser merecedores de reflexões e discussões com o propósito de serem validadas as resoluções corretas entre todos, bem como será preciso fazer as necessárias modificações nas resoluções que estiverem incompletas. Também será preciso que todos estejam atentos em relação à redação dos enunciados dos problemas propostos, melhorando/alterando/excluindo o que for preciso ser feito sempre que necessário assim proceder. Tais momentos têm o propósito de motivar os estudantes a resolverem outros problemas e a oportunizar que eles próprios validem escolhas relativas às estratégias de resolução dos problemas que tenham sido propostos por eles mesmos. A sugestão é que o professor atue como um mediador das discussões e, se ele achar necessário, pode/deve propor outros problemas que considere oportuno que os estudantes resolvam. Principalmente os tipos de problemas que não tenham sido contemplados nas escolhas feitas pelos estudantes.

6. Questionário de sondagem aplicado aos sujeitos de estudo em um momento anterior ao de o jogo lhes ser apresentado

Aos sujeitos do presente estudo foi proposto que respondessem às seis questões listadas a seguir. Para cada questão selecionamos duas respostas mais representativas do grupo, com o propósito de fazer as respectivas análises.

Questão 1: Se duas pessoas lançarem, cada uma, um dado não viciado ao mesmo tempo - uma pessoa lança um dado de cor preta e a outra lança um dado de cor branca -, qual dado tem maior chance de mostrar o número 5 na face voltada para cima: o dado de cor preta ou o dado de cor branca? Por quê você acha isso? Explique.

Respostas: A_1: “Os dados têm a mesma chance, a cor não muda as chances de cada um”. A_4: “Tanto faz cair um ou outro dado”.

Constatou-se que os seis sujeitos do estudo responderam a esta questão de modo bastante parecido com as apresentadas acima, atendendo às expectativas que se esperava embora não tenham sido respostas suficientes para que demonstrassem conhecimentos acerca da plena compreensão acerca do conceito, no que refere ao estabelecimento do espaço amostral do experimento aleatório em questão.

Questão 2: Antes de iniciar a disputa de uma partida desse jogo, quais 5 números não deixariam de fazer parte de possíveis apostas que você poderia vir a fazer no decorrer da disputa? Você acha que um desses 5 números tem maior chance de você escolher, em todas as rodadas, de modo a avançar no jogo? Com essa estratégia você considera estar certo de que vencerá a disputa? Por quê você acha isso? Explique.

Respostas: P_2: "Os números 7, 8, 9, 10 e 11. O 7 tem mais chances. Vou escolher sempre o 7". A_1: "Os 5 números: 2, 3, 4, 5, 6. Acho que o 6, por ter o valor maior".

Constatou-se que cada um dos seis sujeitos de estudo apresentou os números por ele escolhidos, mas o restante de cada uma das respostas estava incompleto - como as respostas que estão apresentadas acima e as respostas para as demais questões, em prosseguimento. Eles não apresentaram justificativas, talvez porque considerassem serem os números escolhidos os que teriam mais chances de ocorrer, que outros números, dispensando explicações. O estudante A_1 (também o estudante A_2) relacionam chance ao maior número por ele escolhido: o número 6. Também não foi identificada uma relação entre a resposta e uma possível estratégia de jogo.

Questão 3: Paulo participou da disputa de uma partida desse jogo e fez a sua aposta, em uma rodada, colocando suas duas fichas de apostas no número 6. Qual a chance de Paulo sair vencedor nessa rodada? Por quê você acha isso? Explique. Já Mateus, oponente de Paulo, apostou suas duas fichas no número 9. Qual a chance de Mateus sair vencedor nessa rodada? Por quê você acha isso? Explique. Qual dos dois: Paulo ou Mateus, tem maior chance de sair vencedor nessa rodada?

Respostas: P_1: "Ambos têm chances equivalentes: Paulo (1 + 5, 2 + 4 e 3 + 3); Mateus (2 + 6, 3 + 5 e 4 + 4) ". A_2: "A chance de Paulo é de duas 1 e 5 e 2 e 4 e a chance de Mateus também é de duas 4 e 5 e 3 e 6. Os dois tem a mesma chance de ganhar".

Constatou-se que o professor P_1 respondeu parcialmente certo, quando comparou o que chamou de chances ao invés de possibilidades de somas, mas em quantidade menor de possibilidades que a correta. O conceito de chance não parece ser conhecido, tanto pelo professor quanto pelo estudante.

Questão 4: João participou da disputa de uma partida desse jogo, e em uma rodada ele fez a sua aposta colocando uma ficha de apostas no número 5 e a outra ficha no número 1. Você acha que João tem boa chance de vencer a disputa, nessa rodada, e assim avançar no jogo? Por quê você acha isso? Explique.

Respostas: A_3: "Acho que sim, porque ele tem a chance de cair em metade dos pontos". A_2: "Acho que a chance dele ganhar é a mesma de escolher outros 2 números".

Constatou-se que nenhum dos seis sujeitos do estudo percebeu tratar-se de um evento impossível quando da escolha do número 1 como possivel resultado de uma soma. O estudante A_2 parece compreender que a escolha de quaisquer dois números representa chances iguais independentemente das frequências absolutas de combinações com igual soma. O estudante A_1 parece querer dizer que as escolhas em 5 e 1, cuja soma é igual a 6, parece ter chance boa por se tratar de metade de 12, 6 + 6 =12.

Questão 5: Ana participou da disputa de uma partida desse jogo, e fez a sua aposta, em uma rodada, colocando uma ficha no número 5 e a outra ficha no número 2. Já Eva, oponente de Ana, fez a sua aposta colocando uma ficha no número 9 e a outra ficha no número 12. Quem você acha tem maior chance de sair vencedora nessa rodada, Ana ou Eva? Por quê você acha isso? Explique.

Respostas: P_2: "A chance de Eva é maior porque 9 e 12 são maiores que 5 e 2". A_3: "A Ana tem as chances de cair 1 e 4 e 3 e 2 e a Eva só tem 3 chances de cair porque o 12 só pode cair 6 e 6".

Constatou-se que a resposta do professor P_2 considera a comparação entre os valores absolutos das somas como chance maior ou menor de vencer. A resposta de A_3 considere a comparação da possibilidade de soma igual a 5 e da soma igual a 12 parcialmente, desconsiderando a soma igual a 2 e a soma igual a 9. Observamos que os sujeitos do estudo mostraram desconhecimento em relação ao cômputo de todas as possibilidades relacionadas com as somas possíveis.

Questão 6: Fabi participou da disputa de uma partida desse jogo, e fez a sua aposta, em uma rodada, colocando uma ficha no número 5 e a outra ficha no número 7. Qual a chance de Fabi sair vencedora nessa rodada? Por que você acha isso? Explique. Já Lulu, oponente de Fabi, apostou as suas duas fichas no número 8. Qual a chance de Lulu sair vencedora nessa rodada? Por quê você acha isso? Explique.

Respostas: P_1: "Os números de Fabi tem mais chances de sair 1 + 4, 2 + 3, 1 + 6, 2+ 5 e 3 + 4, e os números de Lulu tem menos chances 2 + 6, 4 + 4 e 5 + 3 ". A_4: "Fabi tem 5 chances: 1 e 4 2 e 3 1 e 6 2 e 5 3 e 4 e Lulu só tem 3 chances: 2 e 6, 3 e 5 e 4 e 4. É mais fácil cair o número em 2 dados porque pode sair mais. O 8 não tem muita chance porque não sai muitos números".

Constatou-se que a pergunta da questão 6 foi direta em relação ao cálculo das chances das particulares somas serem iguais a 5, 7 e 8. A resposta de P_1 considera apenas metade das possibilidades a serem consideradas em relação às chances de cada uma das somas que foram escolhidas por Fabi e por Lulu, compará-las entre si, mas não faz o cálculo da chance que cada uma delas tem de vencer. O estudante A_4 procede de modo análogo ao professor e também conclui que a escolha de dois números é mais fácil ocorrer que a escolha de um só número. Assim, observamos que os sujeitos do estudo ou mostraram desconhecimento em relação aos cálculos de chances que precisavam fazer ou simplesmente esqueceram de responder.

De modo geral, analisando as respostas dos sujeitos do estudo identificamos que as perguntas do tipo " Por quê você acha isso? Explique." não foram bem aceitas por eles, se considerarmos o grande número total de respostas que deixaram de ser apresentadas para as perguntas com esse teor. Talvez o melhor teria sido que esse tipo de pergunta tivesse sido feita de maneira informal, no momento, diretamente pelo professor, e não constar nos enunciados de cada uma das questões. Não obstante tal constatação e sugestão consideramos importante para o estudo não deixar que essa pergunta seja feita, de modo que o professor/investigador conheça mais de perto o que cada sujeito do estudo está pensando quando indagado a esse respeito.

Levando em conta as respostas apresentadas pelos sujeitos do estudo e a flexibilidade que a metodologia utilizada oferece nesse sentido foram feitas alterações nas perguntas, para futuras proposicoes do jogo - como pode ser observado no novo questionário que foi apresentado se comparadas as perguntas presentes em um e no outro. Ademais, é oportuno considerar a necessidade de desenvolver os conceitos de probabilidade com bastante diligência e atenção - principalmente os conceitos próprios com experimentos aleatórios, tais quais os presentes nesse -, por considerarmos ser o ponto de partida do estudo de probabilidades com os estudantes dos anos iniciais. Também, o propósito de contribuir com mudanças acerca da realidade que aquí foi constatada, quicá uma realidade bastante próxima de muitas outras realidades Brasil afora. Portanto, por consideramos que é premente não apenas constatar mas, igualmente, agir, tal qual Freire (2013) ressalta com veêmencia, levamos em conta que enquanto professor/investigador o

> [...] meu papel no mundo não é só o de quem constata o que ocorre, mas também o de quem intervém como sujeito de ocorrências. Não sou apenas objeto da história, mas eu sujeito igualmente. No mundo da história, da cultura, da política, constato não para me adaptar, mas para mudar (FREIRE, 2013, p. 74-75).

De modo a contribuir com mudanças, possívelmente em relação a diversas outras realidades de ensino as quais consideramos sejam similares a esta que constatamos com este pequeno grupo de sujeitos de estudo, partimos para a elaboração do presente jogo. Esperamos que o jogo e a sequência didática contribuam para os estudantes se apropriarem de conhecimentos relacionados com probabilidade e seus significados.

7. Reflexões e discussões ocorridas após a disputa de duas partidas

Após a disputa de duas partidas o proponente reuniu todos os sujeitos do estudo sentados em uma roda, em uma sala de aula. O esboço de uma tabela de entrada e de um gráfico de colunas, tais quais os mostrados acima, foram apresentados no quadro branco de modo que fossem preenchidos, como complementação da sequência didática da qual o jogo é parte integrante. O proponente começa por lembrar aos sujeitos do estudo que o jogo e o experimento aleatório "Lançamento de dois dados cúbicos distintos ao chão e a determinação da soma dos números mostrados nas faces dos dois dados voltadas para cima" estão em consonância um com o outro. Em seguida, segue perguntando a todos:

1. Dentre os até oito números escolhidos para as suas apostas é possível que, agora, tanto em relação à primeira partida quanto em relação à segunda partida objeto de disputa, quais números você não escolheria?

2. Entre os valores das somas que são obtidas entre os números mostrados nas faces voltadas para cima dos dois dados cúbicos distintos lançados ao chão, qual

delas tem menor valor? Quantas possibilidades há para se obter esse menor valor da soma? Um de vocês vai até o quadro branco e mostre-nos a respectiva representação na tabela de dupla entrada, escrevendo S = , e um outro colega faz uma representação em relação ao gráfico de colunas. Assim, a soma S é a soma de menor valor que pode ser obtida.

3. Entre os valores das somas que são obtidas entre os números mostrados nas faces voltadas para cima dos dois dados cúbicos distintos que são lançados ao chão, qual delas tem maior valor? Quantas possibilidades há para se obter esse maior valor da soma? Um de vocês vai até o quadro branco e mostre-nos a respectiva representação na tabela de dupla entrada, escrevendo S =, e um outro colega faz uma representação em relação ao gráfico de colunas, fazendo esse registro em uma posição bastante distante da posição de S = 2. Assim, a soma S é a soma de maior valor que pode ser obtida.

4. Entre os valores das somas que são obtidas entre os números mostrados nas faces voltadas para cima dos dois dados cúbicos distintos lançados ao chão, quantas delas tem valor igual a 3? Quantas possibilidades há para se obter esse valor 3 como soma? Um de vocês vai até o quadro branco e mostre-nos as respectivas representações dos resultados desta soma na tabela de dupla entrada, escrevendo S = 3, e um outro colega faz uma representação em relação ao gráfico de colunas, fazendo esse registro em uma posição ao lado da posição de S = 2. Assim, a soma S = 3 é obtida por meio de distintas possibilidades.

5. Tal procedimento ocorre até que a tabela de dupla entrada seja completada. Cada uma das diferentes somas que podem ser obtidas é um elemento de um conjunto, denominado espaço amostral do experimento aleatório em questão. Assim, esse espaço amostral é formado por um total de tantos eventos simples, correspondentemente a um total de tantas distintas somas que podem ser obtidas.

6. Observando a tabela de dupla entrada totalmente preenchida, qual é o total de possibilidades de ocorrência de soma entre os números mostrados nas faces dos dois dados? Esse total de possibilidades também pode ser obtido pela quantidade de possbilidades dos números do dado A combinado com a quantidade de possibilidades dos números do dado B, assim: multiplicando uma quantidade pela outra e obtendo o resultado do produto.

7. Dizemos que a chance de ocorrer soma igual a 3, por exemplo, é igual a tanto, em um total de tantas possibilidades. Igualmente, dizemos que a probabilidade de a soma S = 3 (ou o evento simples S = 3) ocorrer é de tanto em tantas. Tal probabilidade é representada pela razão entre uma e outra. Escreve-se assim: p(S = 3) = .

8. Calcule a probabilidade de ocorrência para cada uma das somas possíveis, escrevendo esses resultados no quadro branco.

9. Qual valor da soma tem maior chance de ocorrer?

10. O evento soma de valor maior que ou igual a 10 é dito um evento composto, formado pelos eventos simples S=10, S =11 e S =12. A probabilidade da soma de valor maior que ou igual a 10 é representada por $p(soma \geq 10) = p(S = 10)+p(S = 11)+p(S = 12) =$.

11. Ana escolhe uma soma qualquer com resultado par e Bia escolhe uma soma qualquer com resultado ímpar e fazem uma aposta entre si. Você considere essa aposta justa? Explique.

8. Considerações finais

A BNCC sugere que os primeiros contatos com as noções de probabilidade - em particular com o conceito de aleatoriedade - sejam explorados a partir do 1º ano do ensino fundamental.

Tal proposta precisa ser desenvolvida com cuidado de maneira que desde o início da escolaridade os exemplos de situações aleatórias permitam ao estudante romper com a visão puramente determinística, que se apresenta principalmente em conceitos da álgebra (explorada antes da probabilidade e da estatística) e deslumbre o amplo universo de incertezas que o rodeiam. Ademais tal prática favorece a formação de um espírito questionador e crítico já desde cedo, contribuindo para fomentar a formação de pensamentos/raciocínios críticos a respeito, o que é bastante salutar. Também contribui para diferentes ações de questionamentos acerca de resultados apresentados, obtidos e/ou estimados e não apenas os que estão presentes na própria Matemática, mas também em outras áreas do conhecimento.

Assim, quando o estudante tem contato com o jogo ele já reúne alguns conhecimentos da temática que foram estudados desde os primeiros anos do ensino fundamental, como é o caso da construção e a exploração de uma tabela de dupla entrada. E, a partir daí, objetiva-se que o estudante se aproprie e desenvolva conhecimentos acerca de conceitos mais avançados. Eis, pois, um importante e motivacional argumento para que os estudantes empenhem-se com o jogo, uma vez que a experiência com os estudantes mostrou considerável melhoria no conhecimento dos estudantes no tocante a esses importantes conceitos, melhoria essa em razão da proposta do jogo como parte importante da sequência didática.

O objetivo que permeia o desenvolvimento deste trabalho foi o de investigar a potencialidade do Jogo “Pulando Amarelinha” no tocante à sua contribuição para que o estudante dos anos iniciais do ensino fundamental reúna condições poder identificar e quantificar todas as possibilidades obter cada uma das somas possíveis sejam feitas entre os números mostrados nas faces voltadas para cima de dois dados cúbicos distintos lançados ao chão. De posse de todas essas possibilidades se espera, em prosseguimento, que o estudante, sozinho, construa uma tabela de dupla entrada que mostre todas essas possibilidades para que em seguida possa agrupá-las, de modo a conhecer a frequência com que cada uma se apresenta, servindo de base para a construção de um correspondente gráfico de colunas, o qual tem o propósito de facilitar a visualização/identificação das frequências de cada uma das somas.

A tabela de dupla entrada e o gráfico de colunas podem e devem ser propostos para serem construídos pelos estudantes, por conta de os seus dados estarem subjacentes durante as jogadas do jogo “Pulando Amarelinha” e não apenas por conta disso, mas como uma tarefa escolar. Assim, uma vez que a tabela de dupla entrada e o gráfico de colunas já tenham sido construídos, se espera que os estudantes estejam preparados para construir o espaço amostral associado ao experimento e para fazer os cálculos da probabilidade de todos os eventos simples (elementos do espaço amostral do particular experimento aleatório, objeto do jogo), com o propósito de, em seguida, vir a identificá-lo como um espaço amostral não equiprovável.

Entendemos que o conhecimento prévio do estudante e o contexto da Matemática em que ele se encontra, associado com a flexibilidade da metodologia escolhida, e o jogo em si, podem contribuir para um satisfatório desenvolvimento de novos conhecimentos da probabilidade, como visto. O desenrolar do texto mostrou ser possível indicar avanços nos conhecimentos dos estudantes a esse respeito, inclusive com a ampliação de novos conceitos da probabilidade. Esperamos que o contato com todos os colegas estudantes, em sala de aula, em grupos de até 4 estudantes, constituam momentos nos quais os estudantes troquem ideias entre si e ampliem seus conhecimentos ainda mais.

Importante salientar que o conhecimento acerca das frequências dos resultados de cada uma das somas não deve se configurar como um obstáculo inicial ao desenrolar de uma partida do jogo. Pelo contrário, configura-se como importante conhecimento matemático associado ao jogo, que o estudante se apropria durante o seu desenrolar. Tanto a constatação de se estar diante de um espaço amostral não equiprovável (pelos sujeitos que participam do jogo enquanto jogadores, ou por outro estudante que assista), quanto o fato de tal característica do espaco amostral não guardar relação com o conceito de aleatoriedade, configuram-se em conhecimentos que são aprendidos com o jogo. Os problemas propostos em prosseguimento ao jogo têm o objetivo de fazer com que os jogadores compreendam essas questões sem a necessidade de ter de construir o espaço amostral por completo, para em seguida vir a resolvê-los.

A partir das situações de jogo configura-se de vital importância para o aprendizado das noções iniciais de probabilidade o lançar luz com respeito ao estudante reunir condições para refletir acerca do conceito de aleatoriedade, bem como sobre as chances (quantificar e comparar possibilidades, probabilidade clássica) para cada aposta que será feita. Por sua vez, também a identificação de que estas apostas recaem sobre cada um dos elementos do espaço amostral - presentes em todas as ações para as tomadas de decisão de apostar durante o desenrolar de uma partida.

Enquanto atividade lúdica que deve ser desenvolvida em sala de aula entendemos que o jogo contribui decisivamente para a apropriação de conceitos um pouco mais avançados, por meio de um recurso didático que está em consonância com o desenvolvimento cognitivo da criança, Não prescindindo, pois, que esse mesmo jogo tenha também vir a ser proposto/desenvolvido com estudantes de anos escolares mais avançados. Ressaltamos, também, que o bom uso de um jogo e a sua adequada exploração pode contribuir para o professor melhorar os seus instrumentos observacionais em relação ao rendimento e os conhecimentos de seus estudantes de maneira mais amiúde. Tudo isso, porque o jogo permite ao professor conhecer melhor as dificuldades de seu estudante e as interpretações que ele faz quando da leitura do enunciado de um problema, por exemplo. Também em relação às fragilidades conceituais que porventura o estudante possa vir a ter, mais facilmente identificáveis durante o desenrolar de uma partida, bem como as concepções e as crenças que um estudante tenha a respeito do conhecimento matemático objeto do jogo, e em relação às atividades que se seguem ao seu desenrolar. Com base em todas essas considerações o professor pode/deve refletir acerca de quais conhecimentos e competências terão de considerar de maneira a poder ajudar os seus estudantes a superarem as dificuldades que eles tenham e, assim, contribuir para a melhoria do rendimento escolar dos seus estudantes no tocante ao ensino e a aprendizagem da Matemática como um todo.

Apresentamos um jogo que tem o propósito de despertar nos estudantes dos anos iniciais do Ensino Fundamental a compreensão acerca do cálculo de probabilidades, com o qual se espera que o estudante proceda a identificação dos elementos de um particular espaço amostral e venha a fazer comparações entre as chances de eventos simples entre si, ou entre eventos compostos. Tudo isso, conforme sejam as proposições presentes na sequência didática ou a manifestação de outros colegas e/ou do seu professor. Enfatizamos a pertinência de se realizarem futuros estudos que abordem propostas de jogos, similares a este, de modo a conhecer mais amiúde como se dá a compreensão e o exercício do pensamento probabilístico em uma dimensão mais ampla, e em diferentes contextos; para o estabelecimento de outros espaços amostrais e posterior quantificação e comparação de probabilidades, em consonância com o desenvolvimento de habilidades e competências presentes na BNCC (BRASIL, 2018).

REFERÊNCIAS

BOGDAN, Robert; BIKLEN, Sari Knopp. **Investigação qualitativa em educação uma introdução à teoria e aos métodos**. Porto, PT, 1994.

BRASIL. Ministério da Educação/Secretaria de Ensino Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. 1º e 2º ciclos**. Volume 3. Brasília, DF, 1997. 142 p. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf. Acesso em: 12 nov. 2021.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/04/BNCC_19mar2018_versaofinal.pdf. Acesso em: 12 nov. 2021.

COBB, Paul; CONFREY, Jere; DISESSA, Andrea; LEHRER, Richard; SCHAUBLE, Leona. **Design Experiments in Educational Research**. American Educational Research Association, 2003, v. 32(1), p. 9-13.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa**. São Paulo: Paz e Terra. 143 p. 2013.

GAL, Ivo. **Towards "probability literacy" for all citizens: Building blocks and instructional dilemmas**. In: Exploring probability in school. Springer, Boston, MA, pp.39-63, 2005.

GRANDO, Regina Célia. **O conhecimento e o uso de jogos na sala de aula**. 2000. 224p. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2000.

LOPES, José Marcos; REZENDE, Josiane de Carvalho. **Um Novo Jogo para o Estudo do Raciocínio Combinatório e do Cálculo de Probabilidade**. Bolema, Rio Claro (SP), v.23, n. 36, pp.657-682, 2010.

MUNIZ, Cristiano Alberto. **Brincar e jogar: enlaces teóricos e metodológicos no campo da educação matemática**. Belo Horizonte: Autêntica. 2010.

ONUCHIC, Lourdes de La Rosa. **Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas**. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999. p. 199-218.

TEIXEIRA, Paulo Jorge Magalhães; PASSOS, Cláudio Cesar Manso. **Um pouco da teoria das situações didáticas (tsd) de Guy Brousseau**. Zetetiké – FE/Unicamp, v.21, n.39, p.155-168, 2013.

TEIXEIRA, Paulo Jorge Magalhães. **Curiosidades, Passatempos, Desafios e Jogos Combinatórios**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2021.

TEIXEIRA, Paulo Jorge Magalhães. **Jogo "Grelha Retangular 3 x 4": uma proposta para o desenvolvimento do raciocínio combinatório**. REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática. Florianópolis, v.16, n.1, p.1-21, 2021b.

TEIXEIRA, Paulo Jorge Magalhães. **Jogo "Grelha Retangular 3 x 4"**. Educação Matemática Pesquisa. São Paulo, v.24, n.1, p.486-522, 2022.

Recebido em: 29 de junho de 2022.
Aceito em: 10 de novembro de 2022.
Publicado em: 31 de janeiro de 2023.