

Uma Aplicação de Geometria Diferencial à Indústria: Molde para Empacotamento Automático

A. M. P. ZAHER^{1,*}, C. M. S. MENEGHETTI^{2,†}, R. B. SOARES^{2,‡},

[1] Bacharel em Matemática Aplicada, IMEF/FURG,

[2] Instituto de Matemática, Estatística e Física - IMEF,
Universidade Federal do Rio Grande - FURG, Rio Grande, RS, Brasil,

Submetido em 03/03/2015; Aceito em 15/08/2015; Publicado em 24/12/2015

Resumo. Neste trabalho, fazemos uma descrição matemática para a obtenção do molde de uma máquina de empacotar e apresentamos passo a passo a construção de um caso particular quando a parametrização da curva que determina a forma do molde é gráfico de uma função. A fim de ilustrarmos o molde obtido, utilizamos o *software* GeoGebra. Para construir o molde, usamos conceitos clássicos de Geometria Diferencial. O principal conceito de Geometria Diferencial envolvido é um caso particular de superfícies regradas, que são conhecidas como superfícies desenvolvíveis. Tais superfícies apresentam uma série de propriedades que as tornam eficazes para aplicações em diferentes áreas e acreditamos que este modelo se assemelha a muitos que existem no mercado. Nosso objetivo principal é apresentar uma aplicação de Geometria Diferencial à indústria, contribuindo para justificar a importância da presença de um matemático colaborando na elaboração do projeto e execução de equipamentos mais eficazes e produtivos. Como base, utilizamos os trabalhos de Boersma e Molenaar [1] e Mot [2].

Palavras-chave. Geometria Diferencial, Superfície Desenvolível, Molde.

Abstract. This paper makes a mathematical description of obtaining the shoulder of a packaging machine, with the construction of a particular case presented step by step, when the parametrization of the curve that determines the form of the shoulder is graphic of a function. GeoGebra software was used to illustrate the resulting shoulder, and concepts of classical Differential Geometry were used to build it. The main concept of Differential Geometry involved is the particular case of ruled surfaces, which are known as developable surfaces. Such surfaces have a number of properties that make them effective for applications in different areas, and this model seems to resemble many models available on the market. The main objective is to present an industrial application of Differential Geometry in order to justify the importance of having a mathematician collaborate in the project elaboration and execution of more effective and productive equipment. As a basis, we use the works of Boersma and Molenaar [1] and Mot [2].

*adrianomansur@yahoo.com.br

†cinthyaaschneider@furg.br, Prof^aOrientadora

‡rodrigosoares@furg.br, Professor Orientador

1. Introdução

A criação de um processo suave para embalar itens de produção é um problema bastante comum na indústria. Geralmente, o material utilizado para embalar é desenrolado de um rolo horizontal e desliza em uma superfície curva, chamada de molde, a qual serve para auxiliar o material a formar um cilindro vertical onde ele, o material, molda-se contra a parede cilíndrica e é selado ao longo da borda dianteira a fim de formar um tipo de embalagem (por exemplo, uma embalagem de plástico). Os itens de produção são então colocados na embalagem, a parte superior é fechada e a embalagem é retirada do cilindro (o leitor pode imaginar um pacote de arroz, por exemplo). O problema com esse processo é que se o molde não possuir a forma apropriada, o material utilizado na embalagem pode apresentar dobras fazendo com que o processo seja interrompido. Veja a Figura 1.

Desta maneira, o problema geométrico que surge é determinar a forma apropriada do molde (parte azul na Figura 1) para que o processo ocorra da forma mais suave possível, ou seja, sem dobras ou rasgos. Como o molde é uma superfície de transição de um plano para um cilindro, é esperado que ele seja isométrico ao plano, bem como ao cilindro. Segundo Forsyth [3], Kreyszig [4] e Struik [5], isto significa que o molde deve ser uma superfície desenvolvível.

O conceito fundamental que é estudado no trabalho é o de superfície desenvolvível. Essas superfícies são utilizadas também para construir cascos de navios, roupas, calçados e partes de carro. Elas possuem o mesmo plano tangente em todos os pontos ao longo de uma geratriz, são casos particulares de superfícies regradas, isométricas ao plano e, portanto, possuem a mesma Curvatura Gaussiana do plano, que é identicamente nula.

Neste trabalho, faremos uma descrição matemática para a obtenção do molde de uma máquina de empacotar. Tal descrição foi proposta por Boersma e Molenaar [1], Mot [2] e foi apresentada em detalhes em [6]. Apresentamos o passo a passo da construção de um caso particular, estudado pelos autores deste artigo, quando a parametrização da curva que determina a forma do molde é do tipo gráfico de uma função.

2. Fundamentação Teórica

Considerando o processo de formação da embalagem descrito na introdução, sabemos que a superfície a ser estudada é denominada superfície desenvolvível.

Definição 2.1. *Uma superfície regrada*

$$X(t, m) = \beta(t) + mw(t)$$

é chamada desenvolvível se

$$\langle \beta'(t) \times w(t), w'(t) \rangle \equiv 0,$$

com $|w(t)| = 1$, onde $\beta(t)$ é uma curva parametrizada, $w(t)$ é um vetor do \mathbb{R}^3 e $m \in \mathbb{R}$.

Neste trabalho a parte da máquina que se enquadra neste tipo de superfície será chamada de molde e o restante da máquina assemelha-se a um cilindro vertical.

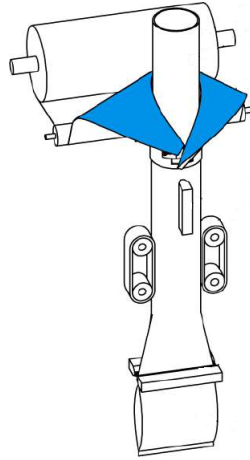


Figura 1: Exemplo de Máquina de Empacotamento Automático

Primeiramente, consideramos duas curvas que irão nos auxiliar na construção do molde. Uma delas é plana e será chamada de \overline{BC} . Suponha que \overline{BC} é côncava. Dizemos que uma curva plana parametrizada diferenciável α que é gráfico de uma função real z é côncava se $\alpha(s) = (s, z(s))$ é tal que $z''(s) < 0 \forall s \in I$, onde o parâmetro s é o comprimento de arco. A outra curva, chamada de BC , é obtida quando dobramos a curva \overline{BC} em torno de um cilindro circular, veja a Figura 2.

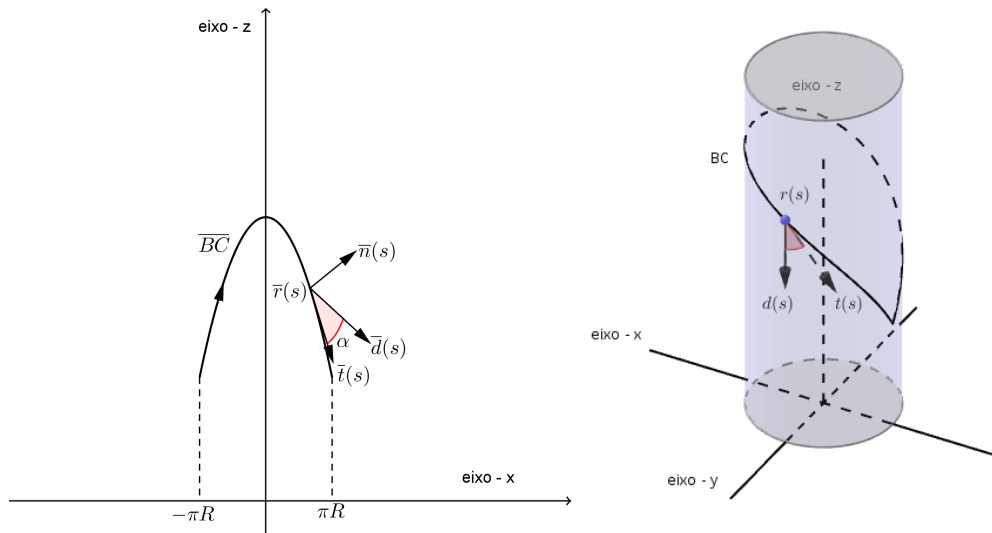


Figura 2: Representação das curvas \overline{BC} e BC

Como temos uma curva no plano que está em transição para um cilindro, é esperado que determinados aspectos relacionados as curvas \overline{BC} e BC tais como comprimentos e ângulos sejam preservados.

Representamos os pontos de \overline{BC} e BC pelos vetores $\overline{\mathbf{r}}(s)$ (bidimensional) e $\mathbf{r}(s)$ (tridimensional), onde estas curvas estão parametrizadas por comprimento de arco e são de classe C^3 .

Em seguida, introduzimos para cada curva seus respectivos Referenciais de Frenet. Para a curva \overline{BC} , temos os vetores tangente $\overline{\mathbf{t}}$ e normal $\overline{\mathbf{n}}$ e, como \overline{BC} é côncava, então o seu vetor normal tem a segunda coordenada não-negativa, enquanto para a curva BC temos os vetores tangente \mathbf{t} , normal \mathbf{n} e binormal \mathbf{b} , pois BC encontra-se no espaço.

Como o molde é uma superfície desenvolvível (ver definição 2.1), ele é completamente determinado pelas suas geratrizes. Portanto, por cada ponto de $\mathbf{r}(s)$ de BC passa uma geratriz cuja direção é dada por $\mathbf{d}(s)$ e, analogamente, para \overline{BC} temos uma direção descrita por $\overline{\mathbf{d}}(s)$. Os vetores $\overline{\mathbf{d}}(s)$ e $\mathbf{d}(s)$ são expressos respectivamente nas bases ortonormais $\{\overline{\mathbf{t}}, \overline{\mathbf{n}}\}$ e $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ onde $\overline{\mathbf{t}}$ e $\overline{\mathbf{n}}$ representam os vetores tangente e normal da curva \overline{BC} e $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ representam os vetores tangente, normal e binormal da curva BC . De acordo com [1], temos que

$$\overline{\mathbf{d}}(s) = \cos(\alpha(s))\overline{\mathbf{t}}(s) + \text{sen}(\alpha(s))\overline{\mathbf{n}}(s), \quad (2.1)$$

$$\mathbf{d}(s) = \cos(\alpha(s))\mathbf{t}(s) + \text{sen}(\alpha(s))[\cos(\phi(s))\mathbf{n}(s) + \text{sen}(\phi(s))\mathbf{b}(s)]. \quad (2.2)$$

Nas expressões dos vetores que representam as direções das geratrizes (veja a Figura 3), temos dois ângulos: $\alpha(s)$ e $\phi(s)$, onde $\alpha(s)$ representa o ângulo entre a direção da geratriz e o vetor tangente em ambas as superfícies (pois elas são isométricas) e $\phi(s)$ é o ângulo entre o vetor normal $\mathbf{n}(s)$ e a projeção de $\mathbf{d}(s)$ sobre $\{\mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$.

Com as quantidades definidas acima, podemos olhar para as superfícies desenvolvíveis associadas a $\overline{\mathbf{r}}(s)$ e $\mathbf{r}(s)$.

Como exigimos que o processo de transição de uma superfície para a outra ocorra de maneira isométrica, então algumas condições aparecem nas derivadas em relação aos parâmetros (s, u) das formas paramétricas $\overline{\boldsymbol{\rho}}(s, u)$ e $\boldsymbol{\rho}(s, u)$ das superfícies plano e molde, respectivamente. Tais condições são dadas por

i) $|\overline{\boldsymbol{\rho}}_u| = |\boldsymbol{\rho}_u|,$

ii) $\overline{\boldsymbol{\rho}}_u \cdot \overline{\boldsymbol{\rho}}_s = \boldsymbol{\rho}_u \cdot \boldsymbol{\rho}_s,$

iii) $|\overline{\boldsymbol{\rho}}_s| = |\boldsymbol{\rho}_s|,$

onde os índices u e s representam as derivadas de primeira ordem. Ou seja, essas condições surgem pois exigimos que os coeficientes da primeira forma fundamental de ambas sejam iguais. A partir destas condições, conseguimos determinar as derivadas das direções das geratrizes e, juntamente com as Fórmulas de Frenet, obtivemos uma equação para o ângulo $\phi(s)$ e outra para o $\alpha(s)$ em termos da curvatura e torção. Essas equações fornecem dois pares de soluções (α_1, ϕ_1) e (α_2, ϕ_2) , a partir dos quais determinamos duas geratrizes que passam por um ponto $\mathbf{r}(s)$ de BC com direções

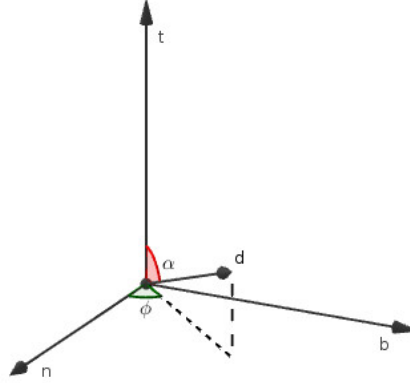


Figura 3: Representação dos ângulos α e ϕ

dadas por $\mathbf{d}_1(s)$ e $\mathbf{d}_2(s)$, onde $\mathbf{d}_1(s)$ está contida no molde, enquanto $\mathbf{d}_2(s)$ pertence ao cilindro.

De acordo com [1], temos que

$$\operatorname{tg}(\alpha) = -\frac{\kappa \operatorname{sen}(\phi)}{(\phi_s + \tau)} \quad \text{e} \quad (2.3)$$

$$\cos(\phi) = \frac{\bar{\kappa}}{\kappa}, \quad (2.4)$$

onde $\bar{\kappa} = \bar{\kappa}(s) = |\bar{\mathbf{t}}_s(s)|$ e $\kappa = |\mathbf{t}_s(s)|$ são as curvaturas, $\tau = \frac{\mathbf{t}(s) \cdot (\mathbf{t}_s(s) \times \mathbf{t}_{ss}(s))}{\kappa^2(s)}$ é a torção, \mathbf{t} representa o vetor tangente e o índice s é a derivada de primeira ordem.

Diversos aspectos técnicos estão relacionados com a construção do molde e, de certa forma, alguns deles estão diretamente ligados a conceitos de Geometria Diferencial, com especial interesse o ângulo $\theta(s)$. Ele representa o ângulo entre os planos tangentes ao molde e ao cilindro em um ponto $\mathbf{r}(s)$ de BC . Este ângulo determina a inclinação do molde para que o material possa ser desenrolado durante o processo. Como pode ser visto em [1], temos

$$\cos(\theta) = 1 - 2 \left(\frac{\bar{\kappa}}{\kappa} \right)^2. \quad (2.5)$$

Uma maneira de fazer a construção explícita do molde é considerar uma parametrização da curva \overline{BC} que seja gráfico. Esta possibilidade é descrita na seção 3. Os cálculos para determinar as equações genéricas (2.1), (2.2), (2.3), (2.4) e (2.5) foram desenvolvidos no trabalho de conclusão de curso que deu origem a este artigo [6].

3. Exemplo: caso particular de molde

Mostraremos como construir o molde a partir de uma parábola cuja equação é dada pela função

$$z(v) = \frac{(1-h)}{\pi^2 R^2} v^2 + h, \quad (3.1)$$

onde h é a altura em que a curva \overline{BC} intercepta o eixo z (veja Figura 2) e sua parametrização é

$$x(v) = R \cos(v/R), \quad (3.2)$$

$$y(v) = R \sin(v/R), \quad (3.3)$$

$$z(v) = \frac{(1-h)}{(\pi R)^2} v^2 + h, \quad (3.4)$$

onde $v \in [0, 2\pi]$. Calculando as derivadas primeira e segunda da equação (3.1), temos

$$z_v(v) = 2 \left(\frac{1-h}{\pi^2 R^2} \right) v \quad (3.5)$$

e

$$z_{vv}(v) = 2 \left(\frac{1-h}{\pi^2 R^2} \right). \quad (3.6)$$

Calculando as curvaturas através dos métodos clássicos de Geometria Diferencial e substituindo na equação (2.4), temos

$$\cos(\phi) = -\frac{Rz_{vv}}{(R^2 z_{vv}^2 + z_v^2 + 1)^{1/2}}, \quad (3.7)$$

onde omitimos a dependência da variável v para não carregar demasiadamente a notação. Calculando o denominador da equação (3.7), onde substituímos as equações (3.6) e (3.5), temos

$$\begin{aligned} (R^2 z_{vv}^2 + z_v^2 + 1)^{1/2} &= \sqrt{R^2 4 \frac{(1-h)^2}{\pi^4 R^4} + \frac{4(1-h)^2 v^2}{\pi^4 R^4} + 1} \\ &= \sqrt{\frac{4(1-h)^2 R^2}{\pi^4 R^4} + \frac{4(1-h)^2 v^2}{\pi^4 R^4} + \frac{\pi^4 R^4}{\pi^4 R^4}} \\ &= \frac{\sqrt{4(1-h)^2 (R^2 + v^2) + \pi^4 R^4}}{\pi^2 R^2}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Substituindo as equações (3.6) e (3.8) na equação (3.7), obtemos

$$\begin{aligned} \cos(\phi) &= \frac{-2R \left(\frac{1-h}{\pi^2 R^2} \right) (\pi^2 R^2)}{\sqrt{4(1-h)^2 (R^2 + v^2) + \pi^4 R^4}} \\ &= \frac{-2R(1-h)}{\sqrt{4(1-h)^2 (R^2 + v^2) + \pi^4 R^4}}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Para calcularmos o valor de seno utilizamos a relação trigonométrica fundamental, obtendo

$$\begin{aligned}
 \text{sen}(\phi) &= \frac{\sqrt{1 + \frac{4(1-h)^2 v^2}{\pi^4 R^4}}}{\sqrt{4(1-h)^2 (R^2 + v^2) + \pi^4 R^4}} \pi^2 R^2 \\
 &= \frac{\sqrt{\pi^4 R^4 + 4(1-h)^2 v^2}}{\sqrt{4(1-h)^2 (R^2 + v^2) + \pi^4 R^4}} \\
 &= \sqrt{\frac{\pi^4 R^4 + 4(1-h)^2 v^2}{4(1-h)^2 (R^2 + v^2) + \pi^4 R^4}}. \tag{3.10}
 \end{aligned}$$

Em seguida, calculamos o valor da tangente através da equação (2.3). Substituindo as equações (3.5), (3.6) e (3.10) na equação (2.3), temos

$$\begin{aligned}
 \text{tg}(\alpha) &= \frac{\left(4(1-h)^2 (R^2 + v^2) + \pi^4 R^4\right)}{\pi^4 R^4} \\
 &= \frac{\left(1 + \frac{4(1-h)^2 v^2}{\pi^4 R^4}\right) \left(\frac{2(1-h)v}{\pi^2 R^2}\right) - R^2 \left(\frac{2(1-h)v}{\pi^2 R^2}\right) \left(\frac{4(1-h)^2}{\pi^4 R^4}\right)}{-\left(4(1-h)^2 (R^2 + v^2) + \pi^4 R^4\right) \pi^2 R^2} \\
 &= \frac{2(1-h)v (\pi^4 R^4 + 4(1-h)^2 (v^2 - R^2))}{- \left(4(1-h)^2 (R^2 + v^2) + \pi^4 R^4\right) \pi^2 R^2}. \tag{3.11}
 \end{aligned}$$

Para calcular o valor de $\cos(\alpha)$, utilizamos a relação

$$\cos^2(\alpha) = \frac{1}{1 + \text{tg}^2(\alpha)}. \tag{3.12}$$

Substituindo a equação (3.11) na equação (3.12), temos

$$\begin{aligned}
 \cos^2(\alpha) &= \frac{1}{1 + \frac{\left(4(1-h)^2 (R^2 + v^2) + \pi^4 R^4\right)^2 \pi^4 R^4}{4(1-h)^2 v^2 (\pi^4 R^4 + 4(1-h)^2 (v^2 - R^2))^2}} \\
 &= \frac{4(1-h)^2 v^2 (\pi^4 R^4 + 4(1-h)^2 (v^2 - R^2))^2}{\epsilon} \\
 \cos(\alpha) &= \pm \frac{2(1-h)v (\pi^4 R^4 + 4(1-h)^2 (v^2 - R^2))}{\epsilon^{1/2}}, \tag{3.13}
 \end{aligned}$$

onde $\epsilon = 4(1-h)^2 v^2 (\pi^4 R^4 + 4(1-h)^2 (v^2 - R^2))^2 + (4(1-h)^2 (v^2 + R^2) + \pi^4 R^4)^2 \pi^4 R^4$.

Para calcular o $\text{sen}(\alpha)$, utilizamos a relação trigonométrica fundamental. Substituindo (3.13) na relação trigonométrica fundamental, temos

$$\text{sen}(\alpha) = \sqrt{1 - \frac{4(1-h)^2 v^2 (\pi^4 R^4 + 4(1-h)^2 (v^2 - R^2))^2}{\epsilon}}. \tag{3.14}$$

Agora calcularemos os vetores tangente, normal e binormal à curva cujas equações podem ser vistas em [1]. Para não carregar a notação, omitiremos novamente a variável v . Começaremos pelo vetor tangente que é dado pela equação

$$\mathbf{t} = \frac{1}{\sqrt{1+z_v^2}} (\mathbf{e}_2 + z_v \mathbf{e}_3). \quad (3.15)$$

Além disso, podemos encontrar em [1] as equações para \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 e \mathbf{e}_3 que são dadas respectivamente por

$$\mathbf{e}_1(v) = (\cos(\gamma), \sin(\gamma), 0) \quad (3.16)$$

$$\mathbf{e}_2(v) = (-\sin(\gamma), \cos(\gamma), 0) \quad (3.17)$$

$$\mathbf{e}_3(v) = (0, 0, 1), \quad \text{onde } \gamma = \frac{v}{R}. \quad (3.18)$$

Substituindo na equação (3.15) as equações (3.17) e (3.18), temos o vetor tangente

$$\mathbf{t} = \frac{1}{\sqrt{1+z_v^2}} (-\sin(\gamma), \cos(\gamma), z_v). \quad (3.19)$$

O vetor normal é dado pela equação abaixo:

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\kappa R(1+z_v^2)^2} [(1+z_v^2)\mathbf{e}_1 + Rz_v z_{vv} \mathbf{e}_2 - Rz_{vv} \mathbf{e}_3]. \quad (3.20)$$

Calculando separadamente cada componente do vetor normal com o auxílio das equações (3.16), (3.17) e (3.18), temos

$$n_1 = \frac{1}{R\kappa(1+z_v^2)} [(1+z_v^2)\cos(\gamma) - Rz_v z_{vv} \sin(\gamma)], \quad (3.21)$$

$$n_2 = \frac{1}{R\kappa(1+z_v^2)^2} [(1+z_v^2)\sin(\gamma) + Rz_v z_{vv} \cos(\gamma)], \quad (3.22)$$

$$n_3 = \frac{-z_{vv}}{\kappa(1+z_v^2)^2}. \quad (3.23)$$

Portanto, o vetor normal é dado por:

$$\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3). \quad (3.24)$$

Analogamente, calculamos o vetor binormal que é dado por:

$$\mathbf{b} = \frac{1}{R\kappa(1+z_v^2)^{3/2}} [-Rz_{vv} \mathbf{e}_1 + z_v \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3]. \quad (3.25)$$

Calculando separadamente cada componente do vetor binormal com o auxílio das equações (3.16), (3.17) e (3.18), temos

$$b_1 = \frac{1}{R\kappa(1+z_v^2)^{3/2}} [-Rz_{vv} \cos(\gamma) - z_v \sin(\gamma)], \quad (3.26)$$

$$b_2 = \frac{1}{R\kappa(1+z_v^2)^{3/2}} [-Rz_{vv} \sin(\gamma) + z_v \cos(\gamma)], \quad (3.27)$$

$$b_3 = -\frac{1}{R\kappa(1+z_v^2)^{3/2}}. \quad (3.28)$$

Portanto, o vetor binormal é dado por:

$$\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3). \quad (3.29)$$

Com todos os vetores e as funções trigonométricas calculados podemos construir o molde. Utilizando o *GeoGebra 3D*, geramos o modelo apresentado na Figura 4.

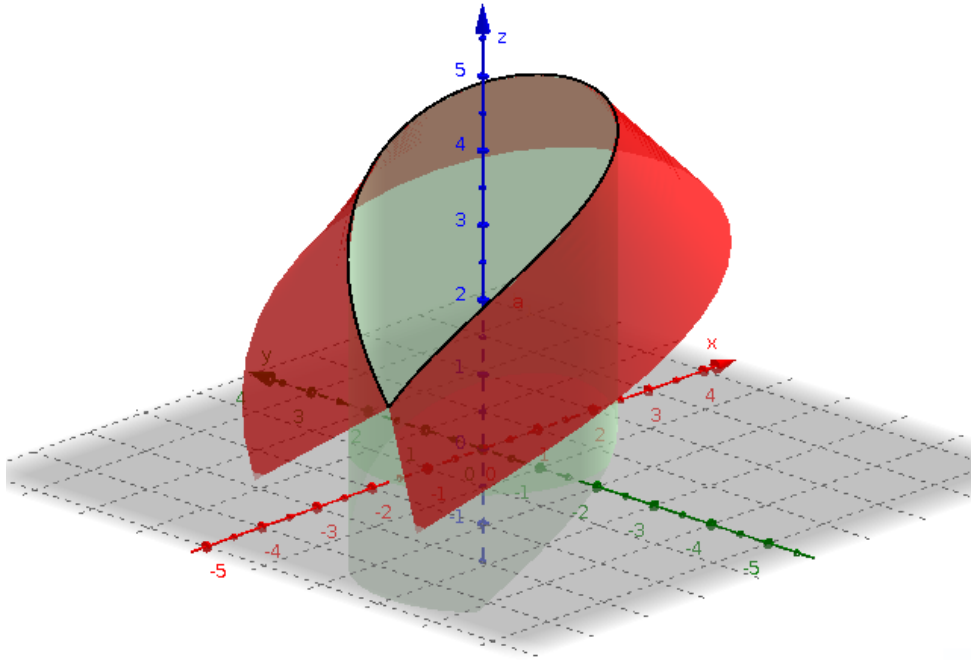


Figura 4: Molde

Outras curvas, como por exemplo uma catenária, podem ser utilizadas para iniciar o processo, contanto que satisfaçam as condições descritas ao longo do trabalho. A principal motivação para a escolha da parábola foi a simplicidade de sua parametrização, bem como dos cálculos relacionados a ela.

4. Conclusão

Neste trabalho, apresentamos uma proposta para a construção do molde de uma máquina de empacotamento automático utilizando uma superfície desenvolvível. Percebemos que a utilização de superfícies desenvolvíveis na projeção de equipamentos industriais para a confecção de embalagens apresenta vantagens em relação a outros tipos de superfícies, já que podem ser desenroladas ou enroladas em um plano de forma isométrica sem que hajam rasgos ou rugas no material. Além disso, podemos localizar suas singularidades e, portanto, é possível antecipar qualquer auto-intersecção de modo a não prejudicar o processo de fabricação da embalagem.

O estudo feito neste trabalho proporcionou aos autores a possibilidade de compreender melhor os conceitos de Geometria Diferencial envolvidos, bem como o instinto investigativo de diferentes abordagens como: analisar se a embalagem estudada é de fato a que apresenta a melhor forma, se durante a produção existe uma maneira de otimizar o processo e consequentemente minimizar os custos de produção visando o maior lucro, entre outras possibilidades do ponto de vista econômico. Concluímos que o uso da Geometria Diferencial na indústria é de grande importância, pois através dela podemos determinar maneiras mais eficazes de projetar equipamentos.

Referências

- [1] J. BOERSMA and J. MOLENAAR, “Geometry of the Shoulder of a Packaging Machine,” *Siam Review*, vol. 37, no. 3, pp. 406–422, 1995.
- [2] E. MOT, “The Shoulderproblem of Forming, Filling and Closing Machines for Pouches,” *Applied Scientific Research*, vol. 27, no. 1, pp. 1–13, 1973.
- [3] A. R. FORSYTH, *Lectures on the Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Cambridge: Cambridge University Press, 1912.
- [4] E. KREYSZIG, *Differential Geometry*. New York: Dover, 1991.
- [5] D. J. STRUIK, *Lectures on Classical Differential Geometry*. New York: Dover, 1988.
- [6] A. P. ZAHER, *Uma Aplicação de Geometria Diferencial à Indústria: molde para empacotamento automático*. Trabalho de Conclusão de Curso, Instituto de Matemática, Estatística e Física, Universidade Federal de Rio Grande, Rio Grande, RS, Brasil, 2014.