Revista de Divulgação Científica em
Ciências Exatas e Tecnológicas
PORANDU Vol. 1, n. 1, 2015, pg.78-86

Controle Ótimo de um Foguete

L. S. FASSARELLA[1,*], M. S. ARAÚJO[2], A. S. GAZZOLI[3],

[1] Departamento de Matemática Aplicada-DMA, Centro Universitário Norte do Espírito Santo-CEUNES, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, ES, Brasil,

[2] Graduanda do curso de Engenharia Química do CEUNES/UFES,

[3] Granduando do curso de Engenharia de Petróleo do CEUENS/UFES,

Submetido em 14/12/2014; Aceito em 03/12/2015; Publicado em 24/12/2015

Resumo. Formulamos sob condições gerais o problema de maximizar a altitude alcançada por um foguete que se move na direção vertical propelido por combustão, incluindo a dedução da equação de movimento. Discutimos a natureza do problema e indicamos uma técnica promissora para sua resolução, mas resolvemos somente o caso especialmente simples no qual a taxa de combustão é mantida constante e são desprezadas a força de resistência do ar e a variação da aceleração gravitacional. Nesse caso, o problema pode ser resolvido com técnicas básicas do Cálculo Diferencial e Integral e a solução obtida pode ser verificada com facilidade, para o que recorremos a análise dimensional e uma análise qualitativa. Ilustramos o resultado e sua verificação com gráficos pertinentes. O artigo constitui um trabalho realizado com alunos de graduacão cursistas das disciplinas introdutórias do Cálculo, possuindo o apelo didático de tratar de uma situação realística que combina modelagem matemática, física e otimização.

Palavras-chave. Controle, Otimização, Cálculo.

Abstract. We discuss the nature of the problem and indicate a promising technique for its resolution, but only an especially simple case is solved, in which the combustion rate is kept constant, ignoring air resistance and the variation of the gravitational acceleration. In this case, the problem can be solved with the basic techniques of differential and integral calculus and the obtained solution can be checked easily, for what we use dimensional analysis as well as a qualitative analysis. We illustrate the results and their verification with relevant graphics. The article is a work made with undergraduate students having introductory classes in Calculus, and has the pedagogical appeal to deal with a realistic situation that mixes mathematical modeling, physical and optimization.

1. Introdução

Nosso objetivo neste artigo é apresentar uma formulação matemática geral e resolver explicitamente um caso particularmente simples do seguinte

*lucio.fassarella@ufes.br, Professor Orientador

Problema: Um foguete propelido por combustão deve ser lançado numa trajetória retilínea vertical; *determinar a taxa de combustão que maximiza a altitude atingida no instante em que o combustível acaba.*

Este é um problema de modelagem matemática que envolve conceitos de Física e da Teoria do Controle. Matematicamente, pode ser enquadrado como um *problema de controle ótimo* e acreditamos que pode ser resolvido pela aplicação do *Princípio do Máximo de Pontryagin*, um teorema sofisticado que estabelece condições necessárias para que uma estratégia de controle maximize um funcional (*índice de performance*) [1, 2, 3, 4]. Entretanto, o problema geral é demasiadamente complicado e mesmo algumas adaptações implicam dificuldades técnicas, *e.g.*, controle do tipo *singular*. Tais complicações nos levam a abordar analiticamente casos simplificados antes de tratar o caso geral ou de tentar alternativas numéricas. Por essa razão, apresentamos aqui uma formulação geral do problema, mas resolvemos apenas um caso especialmente simples, tendo em vista seu apelo didático: o caso em que a taxa de combustão é mantida constante e a força de resistência do ar e a variação da aceleração gravitacional são desprezíveis. Nessa situação específica, a equação de movimento pode ser resolvida analiticamente e a altitude alcançada pelo foguete pode ser escrita como função explícita da taxa de combustão, de modo que a taxa ótima pode ser obtida como ponto crítico da função altitude.

Didaticamente, é interessante notar que o problema ilustra uma característica típica dos modelos matemáticos: embora ele possua formulação geral em termos de conceitos básicos, somente com a imposição de hipóteses simplificadoras é possível resolvê-lo analiticamente. Portanto, o problema não apenas ilustra a utilidade dos conceitos e técnicas do *Cálculo Diferencial e Integral* numa situação realística e bastante interessante, como também mostra algumas de suas limitações e nos permite apontar para teorias mais avançadas e poderosas. A consciência desses fatos é um elemento importante para a maturidade matemática de qualquer estudante de ciências exatas.

A estrutura do artigo é simples. Na *Seção 2.*, modelamos matematicamente o movimento do foguete e formulamos o problema enunciado em termos gerais, deduzindo previamente a equação de movimento. Na *Seção 3.* especializamos o modelo e resolvemos o problema. Na *Seção 4.* discutimos os resultados e apresentamos algumas propostas para novos trabalhos.

2. Modelagem Matemática

Nesta seção, modelamos matematicamente o *Problema* enunciado na *Introdução* usando conceitos básicos do Cálculo e os princípios da Mecânica Newtoniana. Primeiro, definimos os parâmetros relevantes e fixamos a notação; depois deduzimos a equação de movimento do foguete e obtemos sua evolução; finalmente, formulamos o problema tecnicamente.

Consideramos o caso em que o foguete se move exclusivamente na direção vertical e atribuimos o sinal positivo ao sentido "para cima". Os parâmetros e funções relevantes do problema são os seguintes:

- $t \geq 0$: tempo de vôo do foguete, sendo $t = 0$ o instante de lançamento do foguete);

- $y(t)$: altitude do foguete no instante t;
- $y_0 = y(0) = 0$ é a altitude inicial;
- $v(t) = \dot{y}(t)$: velocidade do foguete no instante t;
- $v_0 = v(0) = 0$ é velocidade inicial;
- $m(t)$: massa do combustível do foguete no instante t
- $m_0 = m(0) > 0$: massa inicial do combustível;
- M_0 : massa útil do foguete (*i.e.*, sem contar o combustível);
- $M_0 = M_1 + m_0$: a massa inicial do foguete com combustível;
- $M(t) = M_1 + m(t)$: massa do foguete com combustível armazenado no instante t;
- $\mu(t) = M_1 - m(t)$: massa de combustível queimado desde o lançamento até o instante t;
- u : velocidade (constante) dos gases propelidos pelo foguete;
- $g = g(y)$: intensidade da aceleração gravitacional na altitude y;
- $\varphi = \varphi(v) \geq 0$: intensidade da força de resistência do ar, dependente da velocidade v do foguete.

Como é usual em Física, denotamos a taxa de variação em relação ao tempo por um ponto sobrescrito, *e.g.*,

$$v = \dot{y} = \frac{dy}{dt}.$$

Assim, a taxa de combustão do foguete é dada por $\dot{\mu}(t) = -\dot{m}(t)$, sendo

$$\dot{m}(t) \leq 0,\ m(0) = m_0,\ m(T) = 0$$

e

$$\dot{\mu}(t) \geq 0,\ \mu(0) = 0,\ \mu(T) = m_0;$$

O tempo de vôo do foguete $T > 0$ desde o instante inicial do vôo até o instante em que o combustível acaba é fixado por qualquer das duas condições

$$m(T) = 0 \quad ou \quad \mu(T) = m_0.$$

Dedução da equação de movimento do foguete†

Denotamos por $P(t) = M(t)\,v(t)$ o momento linear do foguete e por $F(t)$ a força externa atuante no instante t. Como a velocidade dos gases propelentes em relação ao observador inercial (em repouso na superfície da Terra) é $u - v(t)$, o momento do foguete

†Embora a dedução da equação de movimento do foguete possa ser encontrada em muitos livros de graduação em Física, acrescentamos ao artigo pelo bem da completeza.

e gases expelidos durante um intervalo de tempo $\Delta t \neq 0$ suficientemente pequeno é dado por

$$P(t+\Delta t) \approx M(t+\Delta t)\, v(t+\Delta t) + \left[M(t+\Delta t) - M(t)\right]\left[u - v(t)\right].$$

Pela *Segunda Lei de Newton*, $F(t)$ é igual a taxa de variação do momento em relação ao tempo, portanto

$$\begin{aligned} F(t) &\approx \frac{P(t+\Delta t) - P(t)}{\Delta t} \\ &\approx \frac{M(t+\Delta t)\, v(t+\Delta t) + \left[M(t+\Delta t) - M(t)\right]\left[u - v(t)\right] - M(t)\, v(t)}{\Delta t} \\ &= \frac{M(t+\Delta t)\left[v(t+\Delta t) - v(t)\right] + \left[M(t+\Delta t) - M(t)\right] u}{\Delta t}. \end{aligned}$$

No limite $\Delta t \to 0$, obtemos a equação

$$F(t) = M(t)\frac{d}{dt}v(t) + u\frac{d}{dt}M(t).$$

Como $M = M_1 + m = M_0 - \mu$, segue que a equação de movimento do foguete sob ação de uma força externa $F(t)$ é dada por

$$\frac{d}{dt}v(t) = \frac{u\dot{\mu}(t)}{M_0 - \mu(t)} + \frac{F(t)}{M_0 - \mu(t)}. \tag{2.1}$$

Considerando que o foguete sofre ação externa da gravidade da Terra e da resistência do ar (apenas), e que ambas atuam no mesmo sentido "para baixo" durante o movimento (ascencional), podemos escrever

$$F(t) = -M(t)\, g(y(t)) - \varphi(\dot{y}(t)). \tag{2.2}$$

Pela *Lei da Gravitação Universal* de Newton, a intensidade da aceleração gravitacional é dada por

$$g(y) = \frac{GM_T}{(R_T + y)^2} \tag{2.3}$$

onde G é a constante de Newton e M_T e R_T são a massa e o raio da Terra, respectivamente. A intensidade da força de resistência do ar depende de modo complexo da velocidade do foguete, mas é razoável assumir que seja proporcional ao quadrado da velocidade em velocidades medianas,

$$\varphi(v) = \lambda v^2. \tag{2.4}$$

Substituindo Eq.(2.3) e Eq.(2.4) em Eq.(2.2), obtemos da Eq.(2.1) a seguinte equação de movimento para o foguete

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) = \frac{u\dot{\mu}(t)}{M_0 - \mu(t)} - \frac{GM_T}{(R_T + y(t))^2} - \frac{\lambda \dot{y}^2(t)}{M_0 - \mu(t)}. \tag{2.5}$$

Formulação Matemática do *Problema*

Considerando a notação e desenvolvimento precedentes (onde assumimos algumas hipóteses), o problema proposto na introdução possui a seguinte formulação: *determinar a função "combustível consumido"* $\mu : [0,T] \to [0,\infty)$ *de modo a maximizar a altitude* $y(T)$*, considerando* $T > 0$*,* $\dot{\mu} \geq 0$*,* $\mu(0) = 0$*,* $\mu(T) = m_0$ *e* $y(t)$ *é solução da Eq.(2.5).* Em termos sintéticos:

$$\begin{array}{l} \textit{Maximizar} \\ Y[\mu(t)] = y(T) \\ \textit{sujeito a}: \\ \bullet\ \frac{d^2}{dt^2}y(t) = \frac{u\dot{\mu}(t)}{M_0-\mu(t)} - \frac{GM_T}{(R_T+y(t))^2} - \frac{\lambda\dot{y}^2(t)}{M_0-\mu(t)},\ 0 < t < T; \\ \bullet\ T > 0\ ,\ \dot{\mu} \geq 0\ ,\ \mu(0) = 0\ ,\ \mu(T) = m_0. \end{array} \tag{2.6}$$

Este é um problema complexo, especialmente porque a equação de movimento é não-linear e depende tanto de $\mu(t)$ quanto de sua derivada. Na próxima seção, vamos simplificar bastante a equação de movimento e impor severas restrições a função $\mu(t)$, de modo que seremos capazes de resolver o problema usando somente recursos elementares do Cálculo.

3. Problema Simplificado

Assumimos que g é constante e que a força de atrito é desprezível ($\varphi \equiv 0$), a equação de movimento Eq.(2.5) reduz-se à seguinte

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) = \frac{u\dot{\mu}(t)}{M_0 - \mu(t)} - g. \tag{3.1}$$

Integrando essa equação e levando em conta que $\dot{y}(0) = 0$, obtemos

$$\frac{d}{dt}y(t) = u\ln\left(\frac{M_0}{M_0 - \mu(t)}\right) - gt. \tag{3.2}$$

Assumindo que a taxa de queima de combustível é constante $\dot{\mu} = c > 0$, segue

$$\mu(t) = ct. \tag{3.3}$$

Da condição $\mu(T) = m_0$, segue da Eq.(3.3) que

$$T = m_0/c. \tag{3.4}$$

Dada a expressão da Eq.(3.3) para $\mu(t)$, podemos integrar Eq.(3.2) e obter a expressão explícita da altitude em função do tempo, para cada valor de $c > 0$:

$$y(c,t) = ut - \frac{g}{2}t^2 - \frac{u}{c}(M_0 - ct)\ln\left(\frac{M_0}{M_0 - ct}\right),\ 0 \leq t \leq \frac{m_0}{c}. \tag{3.5}$$

Agora, especializamos o problema original para a seguinte formulação matemática:

Problema simplificado: *determinar a taxa de queima de combustível $c > 0$ de modo a maximizar a altitude do foguete no instante em que o combustível acaba, i.e.,*

$$\begin{array}{l} \textit{Maximizar } Y(c) = y(c, m_0/c) \\ \textit{sujeito a :} \\ \bullet\ c > 0. \end{array} \tag{3.6}$$

Este problema pode ser resolvido pela aplicação da *técnica dos pontos críticos*, baseada no fato básico de que *o ponto de máximo ou mínimo de uma função real diferenciável é um ponto crítico ou um ponto na fronteira do seu domínio* – vide [5]. Em nosso caso, a função real de interesse é $Y(c) = y(c, m_0/c)$:

$$Y(c) = \left(m_0 - (M_0 - m_0)\ln\left(\frac{M_0}{M_0 - m_0}\right)\right)\frac{u}{c} - \frac{gm_0^2}{2c^2}\ , \quad c > 0. \tag{3.7}$$

A derivada de Y é dada por

$$\frac{dY}{dc} = -\frac{um_0}{c^2} + \frac{gm_0^2}{c^3} + (M_0 - m_0)\ln\left(\frac{M_0}{M_0 - m_0}\right)\frac{u}{c^2}. \tag{3.8}$$

Nesse caso, Y possui um único ponto crítico (zero de sua derivada):

$$\frac{dY}{dc}(c_{\max}) = 0 \iff c_{\max} = \frac{gm_0^2/u}{m_0 - (M_0 - m_0)\ln\left(\frac{M_0}{M_0 - m_0}\right)}. \tag{3.9}$$

Substituindo a Eq.(3.9) na Eq.(3.8), obtemos

$$Y_{\max} = \left[m_0 - (M_0 - m_0)\ln\left(\frac{M_0}{M_0 - m_0}\right)\right]^2 \frac{u^2}{2gm_0^2}. \tag{3.10}$$

Concluimos que o ponto de máximo de Y é realmente dado pela expressão Eq.(3.9) levando em conta que o valor de $Y_{\max}$ dado pela Eq.(3.10) é positivo e maior do que os limites de $Y(c)$ nos extremos do seu domínio,

$$\lim_{c \to 0+} Y(c) = -\infty \ \textit{e} \ \lim_{c \to +\infty} Y(c) = 0.$$

Ilustramos os resultados (Figura 1) com o gráfico de $Y = Y(c)$ no intervalo de c variando de $M_0 g/u$ a $4M_0 g/u$, para os valores $g = 9.8\text{m/s}^2$, $mo = 50\text{kg}$, $M_0 = 100\text{kg}$, $u = 500\text{m/s}$ (caso em que $c_{\max} \approx 5.2\text{kg/s}$ e $Y_{\max} \approx 456\text{m}$).‡

Validação da solução

Para certificamos que a solução para nosso problema é realmente dada pela Eq.(3.9), primeiro verificamos que a expressão de $Y_{\max}$ está dimensionalmente correta *i.e.*, é dada em unidades de comprimento:

$$[Y_{\max}] = [\text{massa}]^2 \frac{[\text{comprimento}]^2 / [\text{tempo}]^2}{[\text{massa}]^2 \times [\text{comprimento}] / [\text{tempo}]^2} = [\text{comprimento}]\,.$$

‡Observamos que o valor $M_0 g/u$ é o menor valor de c para o qual a aceleração inicial do foguete não é negativa!

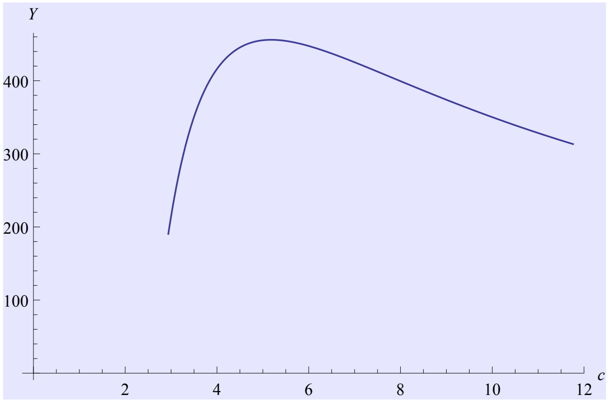

Figura 1: Gráfico de $Y = Y(c)$.

Agora, comparamos a altitude alcançada pelo foguete no instante em que o combustível acaba para diferentes valores da taxa de combustão $c > 0$. Para fazer isso de modo independente dos cálculos precedentes, utilizamos um recurso computacional/numérico partindo diretamente da Eq.(3.6): com os mesmos valores numéricos da Figura 1, obtemos o seguinte resultado gráfico para as soluções numéricas da Eq.(3.1) com $\mu(c) = ct$, para os valores de c iguais a, respectivamente, $gM_0/u \approx 2.9$, 3.3, 4, $c_{\max} \approx 5.2$, 6, 7, 10:[§]

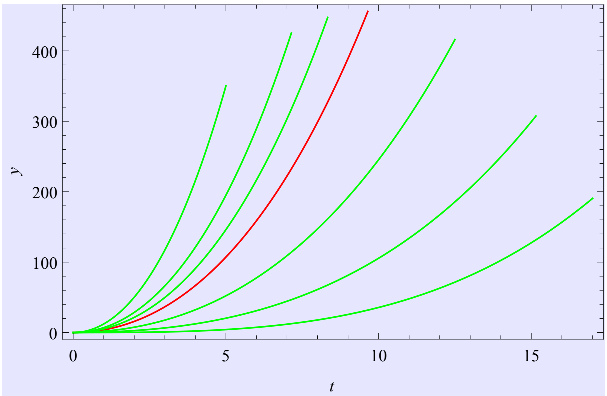

Figura 2: Gráficos de $y_c = y_c(t)$, para alguns valores de c.

Na Figura 2, todos os gráficos estão delimitados pelo correspondente intervalo $[0, m_0/c]$, para cada valor de c. O gráfico em vermelho corresponde a $c_{\max}$, enquanto os gráficos

[§]No software *Mathematica 9.0*, usamos os seguintes comandos para obter a resolução numérica da Eq.(3.1) e plotagem do correspondente gráfico, para cada valor especificado de c (neste caso, $c = 3$):

```
g=9.8; M1=100; mo=50; M0=M1+mo; u = 500; c = 3; T=mo/c;
Dyn=y''[t]==u*c/(M1-c*t)-g;
s=NDSolve[Dyn,y[0]==0,y'[0]==0,y,{t,0,T}];
Plot[Evaluate[y[t]/.s1],t,0,T,PlotStyle->Green]
```

em verde correspondem aos demais valores de c, crescendo da direita para a esquerda. Nossa solução é corroborada pelo fato do gráfico correspondente a $c_{\max}$ atingir a maior altura dentre todos os demais gráficos.

4. Conclusão

Neste artigo, resolvemos um problema de otimização formulado para o controle de um sistema dinâmico específico, considerando hipóteses simplificadoras para tornar o tratamento matemático acessível (elementar). Apesar de bastante idealizado, o caso tratado serve como aproximação para modelos menos restritivos, de modo que o resultado obtido nos permite estimar as respostas para problemas análogos que flexibilizem as restrições físicas e/ou a forma de controle.

Observamos que o problema resolvido aqui pode ser extendido de diversas formas, tanto visando maior verossimilhança com situações reais quanto no sentido de aplicar técnicas matemáticas mais sofisticadas. Elencamos algumas possibilidades que podem servir como temas de trabalhos acadêmicos:

- *Manter as condições físicas restritas, mas flexibilizar a taxa de queima de combustível, admitindo que ela pode variar linearmente.* Essa situação pode receber tratamento análogo ao desenvolvido aqui, com todas as funções pertinentes possuindo expressões elementares; nesse caso, a resolução também pode ser levada a cabo com uso dos conceitos básicos do Cálculo.

- *Manter as condições físicas restritas, mas admitir que a taxa de queima de combustível possa ser controlada arbitrariamente.* Acreditamos que a resolução desse problema extrapola o nível básico do Cálculo, requerendo o uso do Cálculo Variacional, da Teoria do Controle Ótimo ou de outra técnica otimização mais sofisticada.

- *Considerar a variação da aceleração gravitacional e/ou a ação da resistência do ar na dinâmica do foguete, mantendo constante a taxa de queima de combustível ou admitindo que ela possa ser controlada arbitrariamente.* Nesse contexto geral, a resolução do problema é realmente desafiadora e provavelmente deve requerer a aplicação de conceitos matemáticos e técnicas numéricas avançados – algo realmente digno de um projeto arrojado de iniciação científica em Teoria do Controle ou Otimização.

Referências

[1] J. BAUMEISTER and A. LEITÃO, *Introdução a Teoria do Controle e Programação Dinâmica.* Rio de Janeiro: IMPA, 2008.

[2] R. V. GAMKRELIDZE, *Discovery of the Maximum Principle in Optimal Control*, pp. 160–173. In: BOOB-BAVNBEK, B., HOYRUP, J. (eds.) **Mathematics and War**, Berlin: Birkhäuser Verlag, 2003.

[3] A. LOCATELLI, *Optimal Control: An Introduction.* Berlin: Birkhäuser Verlag, 2001.

[4] L. S. PONTRYAGIN, V. G. BOLTAYANSKII, R. V. GAMKRELIDZE, and E. F. MISHCHENKO, *The Mathematical Theory of Optimal Processes.* New York: Interscience Publishers, 1962.

[5] J. STEWART, *Cálculo*, vol. 1. São Paulo-SP: Cengage, 2013.