Revista de Divulgação Científica em
Ciências Exatas e Tecnológicas
PORANDU
Vol. 3, n. 1, 2019, pg. 41-48

Uma Interpretação Combinatória para os Números de Catalan

I. M. CRAVEIRO[1,*] , M. A. G. TEIXEIRA[1,†] .

[1] Universidade Federal da Grande Dourados, MS, Brasil,

Submetido em 14/09/2018; Aceito em 12/12/2018; Publicado em 06/09/2019

Resumo. O escopo desse trabalho é explorar a sequência numérica conhecida como números de Catalan através de uma abordagem com o uso de funções geradoras. Pretende-se introduzir conceitos e aspectos algébricos para algumas propriedades relacionadas a essas sequências e explorar uma interpretação combinatória por meio do conceito de triangulações de um poligono convexo.

Palavras-chave. Função Geradora , Números de Catalan, Triangulação.

Abstract.The scope of this work is to explore the numeric sequence known as Catalan numbers through a approach with the use of generating functions. It is intended to introduce concepts and algebraic aspects for some properties related to these sequences and explore a combinatorial interpretation through the concept of triangulations of a convex polygon.

1 Introdução

Os números de Catalan constituem uma sequência de números que surgem em diversas áreas da matemática, como Geometria, Álgebra, Análise e Combinatória, a qual será nossa fonte de investigação. Em [1, 2, 3] podemos encontrar detalhes sobre a história dos números de Catalan, desde seu descobrimento até os dias atuais.

Há três matemáticos que merecem uma menção especial quando se trata da descoberta e desenvolvimento dos números de Catalan: *Leonhard Euler*, *Eugene Charles Catalan* e *Sharabiin Myangat*. Segundo [1], em 1730 , um matemático chamado *Myangat*, da Mongólia, fez o primeiro registro no livro *Quick Methods for Accurate* envolvendo os números de Catalan. Mais tarde, *Euler* descobre os números de Catalan e através um problema geométrico conjectura um método para resolução, porém não há provas que o tenha concluído ou demonstrado. Em 1838 é atribuído a *Eugene Catalan* o nome da sequência dos Números de Catalan, durante um estudo das sequências bem formadas entre parênteses, que descobriu quase ao acaso.

*irenecraveiro@ufgd.edu.br
†teixe_ira@hotmail.com

Nesse trabalho apresentamos uma fórmula para os números de Catalan usando o conceito de funções geradoras, em seguida uma interpretação para esses números fazendo uso da definição de triangulação de um poligono convexo. Todas as definições e resultados expostos nesse trabalho podem ser vistos com mais detalhes em [1, 4, 5]. Como referências complementares podemos citar [6, 7, 8, 9] e suas referências.

2 Definição e fórmula explicita para os números de Catalan

Os números de Catalan constituem uma sequência numérica $\{1, 2, 5, 14, 42\dots\}$ definidas por um relação de recorrência não linear.

Definição 2.1. *Dado $n \in \mathbb{N}$, definimos por C_n o número de Catalan de ordem n pela seguinte relação de recorrência:*

$$\begin{cases} C_0 &= 1 \\ C_n &= \displaystyle\sum_{j=0}^{n} C_j C_{n-j}, \ \ \textit{para } n > 0 \end{cases} \tag{1}$$

Podemos reescrever (1) da seguinte forma:

$$\begin{cases} C_0 &= 1 \\ C_k &= \displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} C_j C_{k-1-j}, \ \ \text{para } k > 0 \end{cases} \tag{2}$$

Por meio da recorrência definida em (2) queremos determinar uma fórmula explícita para os números de Catalan. Para isso, considere a série de potências definida por

$$C(z) = C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + C_3 z^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n \tag{3}$$

onde C_n é o n-ésimo termo da sequência de Catalan. Multiplicando por z^n em ambos os lados de (2) e somando em n, com $n \geq 1$, e em seguida adicionando C_0 em ambos lados da identidade, temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n z^n + C_0 = \sum_{n=1}^{\infty} z^n \sum_{j=0}^{n-1} C_j C_{n-1-j} + C_0.$$

Utilizando o conceito de produto de series de potência obtemos

$$\begin{aligned} C(z) &= \sum_{j=0}^{n-1} C_j z^j \sum_{n-1}^{\infty} z^{n-j-1} z + C_0 \\ &= z \sum_{j=0}^{n-1} C_j z^j \sum_{n-1}^{\infty} z^{n-j-1} C_{n-1-j} + C_0 \end{aligned}$$

Dessa forma, $C(z) = zC(z) \cdot C(z) + 1$, ou seja, $C(z) = zC(z)^2 + 1$. Resolvendo a equação quadrática $zC(z)^2 - C(z) + 1 = 0$ obtemos

$$C(z) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4z}}{2z}$$

Como

$$\lim_{z \to 0+} \frac{1+\sqrt{1-4z}}{2z} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{z \to 0-} \frac{1+\sqrt{1-4z}}{2z} = -\infty$$

segue de (3) e de $C(0) = C_0 = 1$ que

$$C(z) = \frac{1 - \sqrt{1-4z}}{2z}$$

Dessa forma, concluímos que

Proposição 2.1. *A função ordinária para os números de Catalan é*

$$C(z) = \frac{1 - \sqrt{1-4z}}{2z} \tag{4}$$

Agora vamos determinar uma fórmula explícita para os números de Catalan. Utilizando o teorema Binomial Generalizado, cujo resultado segue de [4], obtemos que

$$\sqrt{1-4z} = (1-4z)^{\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} (-4z)^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-k+1\right)(-4z)^k}{k!}.$$

Substituindo em (4), temos

$$\begin{aligned}
C(z) &= \frac{1-\sqrt{1-4z}}{2z} = \frac{(1-(1-4z)^{\frac{1}{2}})}{2z} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-k+1\right)(-4z)^k}{k!}}{2z} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-k+1\right)(-4z)^{k-1}}{k!} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1-2}{2}\right)\left(\frac{1-4}{2}\right)\left(\frac{1-6}{2}\right)\cdots\left(\frac{1-2k+2}{2}\right)(-4)^{k-1}(z)^{k-1}}{k!} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\cdots\left(\frac{3-2k}{2}\right)(-4)^{k-1}(z)^{k-1}}{k!} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\ldots\cdot\left(\frac{2k-3}{2}\right)(-1)^{k-1}(-4)^{k-1}(z)^{k-1}}{k!}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2k-3)(-1)^{k-1}(-1)^{k-1}(-4)^{k-1}(z)^{k-1}}{k!} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (2k-3)}{k!} (z)^{k-1} \qquad (5)
\end{aligned}
$$

O coeficiente de z^k em (5) é

$$
\begin{aligned}
C_k &= 2^k \frac{1 \cdot 3 \ldots 2k-1}{(k+1)!} = \frac{2^k}{(k+1)!} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \ldots (2k-1) \cdot 2k}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2k} \\
&= \frac{2^k}{(K+1)!} \frac{(2k)!}{(2 \cdot 1)(2 \cdot 2)(2 \cdot 3) \ldots (2 \cdot k)} = \frac{2^k}{(k+1)!} \frac{(2^k)!}{2^k \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k} \\
&= \frac{(2^k)!}{(k+1)!k!} = \frac{1}{k+1} \cdot \frac{(2k)!}{k!k!} = \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k}
\end{aligned}
$$

Portanto, temos o seguinte resultado

Teorema 2.1. *Seja C_n o n-enésimo de Catalan e $n \in \mathbb{N}$, então*

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

3 Interpretações Combinatórias para os números de Catalan: Triangulações

Os números de Catalan possuem várias e maravilhosas aplicações, além de uma infinidade de interpretações combinatórias. *Richard P. Stanley*, do *Massachusetts Institute of Technology (MIT)*, reuniu ao longo de sua vida acadêmica inúmeros problemas com os números de Catalan, e mais tarde escreveu o livro *Enumerative Combinatorics* [2], e com cerca de 66 problemas cuja solução é um número de Catalan. Apresentaremos algumas dessas interpretações e começaremos por uma interpretação geométrica para os números de Catalan.

Historicamente, matemáticos demonstram grande interesse em estudar objetos com propriedade especiais, por exemplo, as triangulações de um polígono convexo. Uma triangulação de um polígono convexo P_n de n lados é a decomposição de P_n em triângulos por um conjunto maximal de diagonais que não se cruzam. Ou seja, dado $n \geq 3$, definimos por T_n o número de triangulações válidas de um poligono P_n, isto é, aquelas obtidas por $n-3$ diagonais que não se interceptam no seu interior. No caso de $n = 3$, temos um triângulo e convencionamos $T_2 = 1$. Por inspeção podemos constatar que há 2 maneiras de triangular um quadrilátero convexo e cinco maneiras de triangular o pentágono convexo traçando diagonais que não se cruzam. Os resultados que demonstramos em seguida seguem de [5].

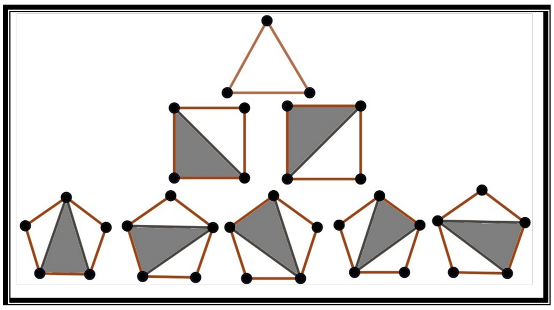


Figura 1: Triangulações de um polígono de n lados, $n = 3, 4, 5$.

Teorema 3.1. *Para $n \geq 3$ a sequência T_n satisfaz*

$$T_n = \sum_{j=2}^{n-1} T_j T_{n-j+1}.$$

Prova. De fato, dado um polígono convexo de n lados , vamos particionar o conjunto das triangulações de P_n em triangulaçoes de poligonos cuja quantidade de lados é menor do que n. Para isso, seja $Q \in \{3, 4, \dots, n\}$. Vamos fixar o triângulo $12Q$ no poligono P_n dividindo-o em dois poligonos de lados menores, um poligono de $Q - 1$ lados e outro de $n - Q + 2$ lados. Segue do principio multiplicativo que temos $T_{Q-1}T_{n-Q+2}$ triangulações válidas de P_n com o triângulo $12Q$ fixo. Somando em Q temos que

$$T_n = T_2 T_{n-1} + \sum_{Q=4}^{n-1} T_{Q-1} T_{Q-1} T_{n-Q+2} + T_{n-1} T_2 = \sum_{j=2}^{n-1} T_j T_{n-j-1}.$$

Denotamos por ϑ_n o conjunto das triangulações de P_n.

Teorema 3.2. *Para $n \geq 4$ a sequência T_n satisfaz*

$$(n-3)T_n = \frac{n}{2} \sum_{j=3}^{n-1} T_j T_{n-j+1}.$$

Prova. De fato, considere $Q \in \{3, 4, \dots, n-1\}$ e uma diagonal $\overline{1Q}$ do poligono convexo P_n, que divide em dois outros poligonos convexos, sendo um a direita com Q lados e com T_Q maneiras de triangular e outro a esquerda com $n - Q + 2$ lados com T_{n-Q+2} maneiras de triangular. Logo temos $T_Q T_{n-Q+2}$ triangulações válidas fixada a diagonal $\overline{1Q}$ e ao variar Q obtemos um total de triangulações válidas para diagonais que cruzem o vértice 1:

$$\sum_{Q=3}^{n-1} T_Q T_{n-Q+2}.$$

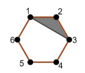
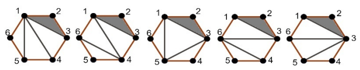
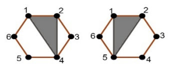
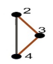
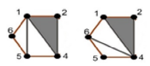
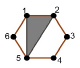
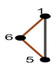
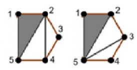
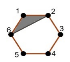
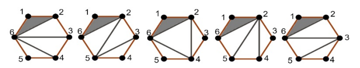
Q	τ_6 que contém o triangulo 12Q	$\tau_{Q-1} = T_{Q-1}$	$\tau_{6-Q+2} = T_{6-Q+2}$
Q_3		$T_2 = 1$	
Q_4			
Q_5			
Q_6			

Tabela 1: Triangulações de T_6

Somando os números de triangulações e variando o vértice de 1 até n teremos duplicidade feitas a partir das diagonais. Isso pelo fato de contarmos duas vezes as diagonais $\overline{1Q}$ e $\overline{Q1}$. Portanto,

$$\frac{n}{2}\sum_{Q=3}^{n-1} T_Q T_{n-Q+2}$$

é o número de triangulações válidas a partir de cada diagonal de P_n. Esse número contém $n-3$ diagonais e cada triangulação utiliza $n-3$ diagonais, com isso finalizamos a demonstração do teorema:

$$(n-3)T_n = \frac{n}{2}\sum_{j=3}^{n-1} T_j T_{n-j+1}.$$

Teorema 3.3. *Se n é um inteiro, com $n \geq 0$, então $C_n = T_{n+2}$.*

Prova. Vamos definir a função g, cujo domínio é o conjunto dos inteiros não negativos $\{x \in \mathbb{Z}, x \geq 0\}$, e a lei de formação é

$$g(m) = \frac{T_{m+2}}{C_m}.$$

Queremos provar que $g(m) = 1$, para todo inteiro $m \geq 0$. De fato, sabemos que $T_2 = T_3 = 1$, $C_0 = C_1 = 1$ e $T_4 = C_4 = 2$. Logo, $g(0) = g(1) = g(2) = 1$.

Segue do Teorema (3.2) que, para $n \geq 4$, $T_{n+1} = \sum_{j=2}^{n} T_j T_{n-j+2}$, ou seja,

$$T_{n+1} = T_2 T_n + \sum_{j=3}^{n-1} T_j T_{n-j+2} + T_n T_2 = T_{n+1} = \sum_{j=3}^{n-1} T_j T_{n-j+2} + 2T_n.$$

Logo,

$$T_{n+1} - 2T_n = T_{n+1} = \sum_{j=3}^{n-1} T_j T_{n-j+2}.$$

Segue do Teorema (3.3) que

$$(n-3)T_n = \frac{n}{2} \sum_{j=3}^{n-1} T_j T_{n-j+1}.$$

Dessa forma, concluímos que $(n-3)T_n = \frac{n}{2}(T_{n+1} - 2T_n)$, ou seja, $4nT_n - 6T_n = nT_{n+1}$. Portanto

$$\frac{T_{n+1}}{T_n} = \frac{4n-6}{n}. \tag{1}$$

Podemos verificar que $C_{n-1} = \frac{4n-6}{n} C_{n-2}$, para $n \geq 2$. Ou seja,

$$\frac{C_{n-2}}{C_{n-2}} = \frac{n}{4n-6}. \tag{2}$$

Portanto, segue de (1) e (2) que

$$\frac{g(n-1)}{g(n-2)} = \frac{T_{n+1}}{C_{n-1}} \frac{C_{n-2}}{T_n} = 1.$$

Assim, para todo $n \geq 4$, $g(n-1) = g(n-2)$. Como $g(3) = g(4) = 1$, então $g(m) = 1$ para todo inteiro $m \geq 0$.

4 Considerações Finais

O objetivo desse trabalho foi a apresentação de definições, resultados e propriedades referentes ao conceito de triangulação de um poligono convexo,e em seguida constatamos que a quantidade de triangulações está relacionado a um número de Catalan.

Referências

[1] I. PAK, "History of catalan numbers." `http://www.math.ucla.edu/~pak/papers/cathist4.pdf`. Acessado em Set. 2018.

[2] R. P. STANLEY, *Enumerative Combinatorics, Vol. 2.* Cambridge Univ. Press, 2001.

[3] P. J. LARCOMBE, “The 18th century Chinese discovery of the Catalan numbers,” *Mathematical Spectrum*, vol. 32, no. 1, pp. 5–6, 1999.

[4] J. P. O. SANTOS, *Introdução à Análise Combinatória*, vol. 3. ed. Campinas: UNICAMP, 2002.

[5] T. KOSHY, *Catalan numbers with applications*, vol. 1. New York: Oxford University Press, 2008.

[6] W. ZHANG and L. CHEN, “On the Catalan numbers and some of their identities,” *Symmetry*, vol. 11, no. 1, p. 62, 2019.

[7] P. HILTON and J. PEDERSEN, “Catalan Numbers, Their Generalization, and Their Uses,” *The Mathematical Intelligencer*, vol. 13, no. 2, pp. 64–75, 1991.

[8] F. QI, X.-T. SHI, M. MAHMOUD, and F.-F. LIU, “The Catalan numbers: a generalization, an exponential representation, and some properties,” *J. Comput. Anal. Appl*, vol. 23, no. 5, pp. 937–944, 2017.

[9] R. L. GRAHAM, D. E. KNUTH, and O. PATASHNIK, *Concrete Mathematics - A Foundation for Computer Science, 2nd ed.* Addison-Wesley Publishing Company, 1994.