



Uma Interpretação Combinatória Para Os Números de Catalan ¹

Resumo. O escopo desse trabalho é explorar a sequência numérica, conhecida como números de Catalan através de uma abordagem com o uso de funções geradoras. Introduzir conceitos e aspectos algébricos para algumas propriedades relacionadas a essas sequências. Iremos explorar uma interpretação combinatória por meio do conceito de triangulações de um polígono convexo.

Palavras-chave. Função Geradora, Número de Catalan, Triangulação.

Abstract. The scope of this work is to explore the sequence numerical data, known as Catalan numbers through a with the use of generating functions. Introduce concepts and aspects algebraic properties for some properties related to these sequences. We will explore a combinatorial interpretation through of the concept of triangulations of a convex polygon.

1 Introdução

Os números de Catalan é uma sequência de números que surge em diversas áreas da matemática, entre essas estão a Geometria, Álgebra, Análise e Combinatória, essa última é a que nos interessa e será a fonte de estudo. Em [1] descreve a trajetória dos números de Catalan. Eugene Catalan (1814 - 1894) nasceu em Bruges, na Bélgica e teve uma infância tranquila, aos dez anos tornou-se aprendiz de joalheiro, mas desistiu da arte por não ter habilidade. Anos mais tarde sua família mudou-se para Paris e seu pai começou a trabalhar como arquiteto e levava seu filho Eugene para o trabalho, essa experiência influenciou sua vida acadêmica e o início dos seus estudos na Escola École Polytechnique. A vida acadêmica e profissional de Eugene foi tumultuada por seu envolvimento político, republicano e esquerdista, que quase acabou com seu futuro, mas ainda assim tornou-se um grande especialista em Teoria dos Números e Teoria Combinatória.

Em 1838 é atribuído a Eugene Catalan o nome da sequência dos Números de Catalan, durante um estudo das sequências bem formadas entre parênteses descobriu quase ao acaso a sequência de Catalan. Há três matemáticos que merecem uma menção especial quando se trata da descoberta e desenvolvimento do número

¹Agradecimentos por auxílio; apoiado pela Capes.

de Catalan: Leonhard Euler, Eugene Charles Catalan e Sharabiin Myangat.

Nesse trabalho apresentamos uma fórmula para os números de Catalan usando o conceito de funções geradoras, em seguida uma interpretação para esses números fazendo uso da definição de triangulação de um polígono convexo.

2 Definição e fórmula explícita para os números de Catalan

Os números de Catalan é uma sequência numérica $1, 2, 5, 14, 42 \dots$ definida por um relação de recorrência não linear.

Definição 2.1. *Seja $n \in \mathbb{N}$, definimos por C_n o número de Catalan de ordem n pela seguinte relação de recorrência:*

$$\begin{cases} C_0 = 1 \\ C_n = \sum_{j=0}^n C_j C_{n-j}, \text{ para } n > 0 \end{cases} \quad (1)$$

Podemos reescrever (1) da seguinte forma:

$$\begin{cases} C_0 = 1 \\ C_k = \sum_{j=0}^{k-1} C_j C_{k-1-j}, \text{ para } k > 0 \end{cases} \quad (2)$$

Por meio da recorrência definida em (2) queremos determinar uma fórmula explícita para os números de Catalan. Para isso, considere a série de potências

$C(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$, onde C_n é o n -ésimo de Catalan:

$$C(z) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$$

Multiplicando por z^n em ambos os lados de (2) e somando em n com $n \geq 1$ e em seguida adicionando C_0 em ambos lados da identidade temos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n z^n + C_0 = \sum_{n=1}^{\infty} z^n \sum_{j=0}^{n-1} C_j C_{n-1-j} + C_0.$$

Utilizando o conceito de produto de series de potência obtemos:

$$C(z) = \sum_{j=0}^{n-1} C_j z^j \sum_{n-1}^{\infty} z^{n-j-1} z + C_0;$$

$$C(z) = z \sum_{j=0}^{n-1} C_j z^j \sum_{n-1}^{\infty} z^{n-j-1} C_{n-1-j} + C_0.$$

Dessa forma: $C(z) = zC(z) \cdot C(z) + 1$, ou seja, $C(z) = zC(z)^2 + 1$. Resolvendo a equação quadrática $zC(z)^2 - C(z) + 1 = 0$ obtemos: $C(z) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4z}}{2z}$.

Como

$$\lim_{z \rightarrow 0^+} \frac{1 + \sqrt{1-4z}}{2z} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{z \rightarrow 0^-} \frac{1 + \sqrt{1-4z}}{2z} = -\infty$$

e $C(z) = C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + \dots$, com $C(0) = C_0 = 1$, então $C(z) = \frac{1 - \sqrt{1-4z}}{2z}$. Dessa forma, concluímos que

Proposição 2.1. *A função ordinária para os números de Catalan é:*

$$C(z) = \frac{1 - \sqrt{1-4z}}{2z} \tag{3}$$

Agora vamos determinar uma formula explícita para os números de Catalan. Utilizando o teorema Binomial Generalizado, cujo resultado segue de [2], dessa forma obtemos:

$$\sqrt{1-4z} = (1-4z)^{\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} (-4z)^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2} (\frac{1}{2} - 1) \dots (\frac{1}{2} - k + 1) (-4z)^k}{k!}.$$

e substituindo em (3) temos:

$$\begin{aligned} C(z) &= \frac{1 - \sqrt{1-4z}}{2z} = \frac{(1 - (1-4z)^{\frac{1}{2}})}{2z} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2} (\frac{1}{2} - 1) \dots (\frac{1}{2} - k + 1) (-4z)^k}{2z k!} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2} - 1) (\frac{1}{2} - 2) \dots (\frac{1}{2} - k + 1) (-4z)^{k-1}}{k!} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1-2}{2}\right) \left(\frac{1-4}{2}\right) \left(\frac{1-6}{2}\right) \dots \left(\frac{1-2k+2}{2}\right) (-4)^{k-1} (z)^{k-1}}{k!} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right) \left(-\frac{5}{2}\right) \dots \left(\frac{3-2k}{2}\right) (-4)^{k-1} (z)^{k-1}}{k!} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \dots \left(\frac{2k-3}{2}\right) (-1)^{k-1} (-4)^{k-1} (z)^{k-1}}{k!} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-3)(-1)^{k-1}(-1)^{k-1}(-4)^{k-1}(z)^{k-1}}{k!} = \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-3)}{k!} (z)^{k-1}. \tag{4}
\end{aligned}$$

O coeficiente de z^k em (4) é:

$$\begin{aligned}
C_k &= 2^k \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2k-1}{(k+1)!} = \frac{2^k}{(k+1)!} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k-1) \cdot 2k}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2k} = \\
&= \frac{2^k}{(k+1)!} \frac{(2k)!}{(2 \cdot 1)(2 \cdot 2)(2 \cdot 3) \cdot \dots \cdot (2 \cdot k)} = \frac{2^k}{(k+1)!} \frac{(2k)!}{2^k \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k} = \\
&= \frac{(2k)!}{(k+1)!k!} = \frac{1}{k+1} \cdot \frac{(2k)!}{k!k!} = \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k}
\end{aligned}$$

Portanto temos o seguinte resultado:

Teorema 2.1. *Seja C_n o n -ésimo de Catalan e $n \in \mathbb{N}$, então*

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

3 Interpretações Combinatórias para os números de Catalan: Triangulações

Os números de Catalan possuem várias e maravilhosas aplicações além de uma infinidade de interpretações combinatórias, Richard P. Stanley, do Massachusetts Institute of Technology (MIT), reuniu ao longo de sua vida acadêmica inúmeros problemas com os números de Catalan e mais tarde escreveu o livro *Enumerative Combinatorics* vol. 2, com cerca de 66 problemas cuja solução é um número de Catalan. Apresentaremos algumas dessas interpretações e começaremos por uma interpretação geométrica para os números de Catalan.

Historicamente, matemáticos demonstram grande interesse em estudar objetos com propriedade especiais, por exemplo, as triangulações de um polígono convexo. Uma triangulação de um polígono convexo P_n de n lados é a decomposição de P_n em triângulos por um conjunto maximal de diagonais que não se cruzam. Ou seja, dado $n \geq 3$, definimos por T_n o número de triangulações válidas de um polígono P_n , isto é aquelas obtidas por $n-3$ diagonais que não se interceptam no seu interior. No caso de $n = 3$, temos um triângulo e convencionamos $T_2 = 1$. Por inspeção podemos constatar que há 2 maneiras de triangular um quadrilátero convexo e cinco maneiras de triangular o pentágono convexo traçando diagonais que não se cruzam.

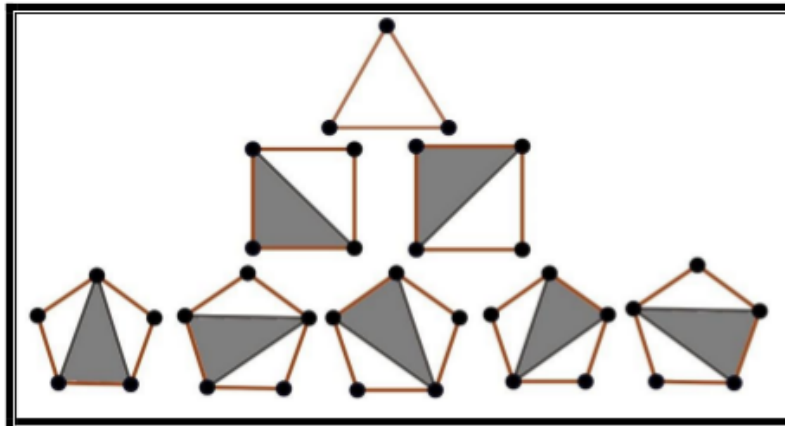


Figura 1: Triangulações de um polígono de n lados, $n = 3, 4, 5$.

Os resultados que validamos agora segue de [3].

Teorema 3.1. Para $n \geq 3$ a sequência T_n satisfaz

$$T_n = \sum_{j=2}^{n-1} T_j T_{n-j+1}.$$

Prova. De fato, dado um polígono convexo de n lados, vamos particionar o conjunto das triangulações de P_n em triangulações de polígonos cuja quantidade de lados é menor do que n . Para isso, seja $Q \in \{3, 4, \dots, n\}$. Vamos fixar o triângulo $12Q$ no polígono P_n dividindo-o em dois polígonos de lados menores, um polígono de $Q - 1$ lados e outro de $n - Q + 2$ lados. Segue do princípio multiplicativo que temos $T_{Q-1}T_{n-Q+2}$ triangulações válidas de P_n com o triângulo $12Q$ fixo. Somando em Q temos:

$$T_n = T_2 T_{n-1} + \sum_{Q=4}^{n-1} T_{Q-1} T_{n-Q+2} + T_{n-1} T_2 = \sum_{j=2}^{n-1} T_j T_{n-j+1}.$$

Denotamos por ϑ_n o conjunto das triangulações de P_n .


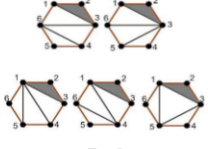


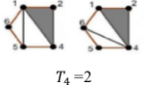


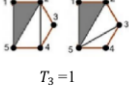

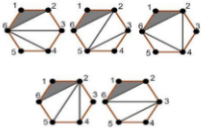
Q	Triangulações de P_{Q-1} $ \vartheta_{Q-1} = T_{Q-1}$	Triangulações de P_6 que contém o triângulo $12Q \quad \vartheta_{6-Q+2} = T_{6-Q+2}$
Q = 3 	\emptyset $T_2 = 1$	 $T_5 = 5$
Q = 4 	 $T_3 = 1$	 $T_4 = 2$
Q = 5 	 $T_4 = 2$	 $T_3 = 1$
Q = 6 	 $T_5 = 5$	\emptyset

Figura 2: Ilustração da demonstração do Teorema (3.1) no caso $n = 6$.

Teorema 3.2. Para $n \geq 4$ a sequência T_n satisfaz

$$(n-3)T_n = \frac{n}{2} \sum_{j=3}^{n-1} T_j T_{n-j+1}.$$

Prova. De fato, considere $Q \in \{3, 4, \dots, n-1\}$ e uma diagonal $\overline{1Q}$ do polígono convexo P_n , que divide em dois outros polígonos convexos, sendo um a direita com Q lados e com T_Q maneiras de triangular e outro a esquerda com $n-Q+2$ lados com T_{n-Q+2} maneiras de triangular. Logo temos $T_Q T_{n-Q+2}$ triangulações válidas fixada a diagonal $\overline{1Q}$ e ao variar Q obtemos um total de triangulações válidas para diagonais que cruzem o vértice 1: $\sum_{Q=3}^{n-1} T_Q T_{n-Q+2}$.

Somando os números de triangulações e variando o vértice de 1 até n teremos duplicidade feitas a partir das diagonais. Isso pelo fato de contarmos duas vezes as diagonais $\overline{1Q}$ e $\overline{Q1}$. Portanto $\frac{n}{2} \sum_{Q=3}^{n-1} T_Q T_{n-Q+2}$ é o número de triangulações válidas a partir de cada diagonal de P_n . Esse número contém $n-3$ diagonais e cada trian-

gulação utiliza $n - 3$ diagonais, com isso finalizamos a demonstração do teorema:

$$(n - 3)T_n = \frac{n}{2} \sum_{j=3}^{n-1} T_j T_{n-j+1}.$$

Teorema 3.3. *Se n inteiro, com $n \geq 0$, então $C_n = T_{n+2}$.*

Prova. Vamos definir a função g , cujo domínio é o conjunto dos inteiros não negativos : $\{x \in \mathbb{Z}, x \geq 0\}$, e a lei de formação é: $g(m) = \frac{T_{m+2}}{C_m}$. Queremos provar que $g(m) = 1$, para todo inteiro $m \geq 0$. De fato, sabemos que $T_2 = T_3 = 1$, $C_0 = C_1 = 1$ e $T_4 = C_4 = 2$. Logo $g(0) = g(1) = g(2) = 1$.

Segue do Teorema (3.2) que para $n \geq 4$, $T_{n+1} = \sum_{j=2}^n T_j T_{n-j+2}$, ou seja, $T_{n+1} = T_2 T_n + \sum_{j=3}^{n-1} T_j T_{n-j+2} + T_n T_2 = T_{n+1} = \sum_{j=3}^{n-1} T_j T_{n-j+2} + 2T_n$. Logo $T_{n+1} - 2T_n = \sum_{j=3}^{n-1} T_j T_{n-j+2}$. Segue do Teorema (3.3) $(n-3)T_n = \frac{n}{2} \sum_{j=3}^{n-1} T_j T_{n-j+1}$.

Dessa forma concluímos: $(n-3)T_n = \frac{n}{2}(T_{n+1} - 2T_n)$, ou seja, $4nT_n - 6T_n = nT_{n+1}$.

Portanto

$$\frac{T_{n+1}}{T_n} = \frac{4n-6}{n}. \tag{1}$$

Podemos verificar que $C_{n-1} = \frac{4n-6}{n} C_{n-2}$, para $n \geq 2$. Ou seja,

$$\frac{C_{n-1}}{C_{n-2}} = \frac{n}{4n-6}. \tag{2}$$

Portanto segue de (1) e (2) que : $\frac{g(n-1)}{g(n-2)} = \frac{T_{n+1}}{C_{n-1}} \frac{C_{n-2}}{T_n} = \frac{T_{n+1}}{T_n} \frac{C_{n-2}}{C_{n-1}} = \frac{4n-6}{n} \frac{n}{4n-6} = 1$. Assim, para todo $n \geq 4$, $g(n-1) = g(n-2)$. Como $g(3) = g(4) = 1$, então $g(m) = 1$ para todo inteiro $m \geq 0$.

Referências

- [1] PAK, I., "History of catalan numbers," 2018. <http://www.math.ucla.edu/~pak/papers/cathist4.pdf>. Acessado em setembro. 2018.
- [2] J. SANTOS, *Introdução à Análise Combinatória*, vol. 3ed. Campinas: UNICAMP, 2002.
- [3] T.KOSHY, *Catalan numbers with applications*, vol. 1. New York: Oxford University Press, 2008.