Revista de Divulgação Científica em
Ciências Exatas e Tecnológicas
PORANDU
Vol. 3, n. 1, 2019, pg. 33-40

Funções Geradoras em Recorrências Lineares

L. S. C. SÁ[1,*], E. V. P. SPREAFICO [1,†]

[1] Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, INMA, MS, Brasil,

Submetido em 20/09/2018; Aceito em 12/12/2018; Publicado em 06/09/2019

Resumo. Funções geradoras são utilizadas como ferramenta na resolução de problemas de matemática discreta. Uma de suas principais vantagens é a capacidade de transformar questões que envolvam sequências de números reais em funções de uma variável, ampliando os recursos matemáticos para solucionar problemas que se apresentam em diversas áreas, tais como no livro *Liber Abaci* de Leonardo de Pisa (1202), em que introduz a famosa sequência de Fibonacci, e ainda na determinação de funções algébricas discutidas por Massazza e Sabadini [1]. Mais especificamente, nesse trabalho são abordados problemas envolvendo sequências de números reais definidas em relação a seus termos anteriores imediatos, também chamadas de relações de recorrência. As funções geradoras não se limitam a solucionar apenas recorrências, sendo também utilizadas como um método alternativo em exercícios de análise combinatória.

Palavras-chave. Funções Geradoras, Recorrências Lineares, Sequências Numéricas.

Abstract. Generating functions are used as tool to solve problems of discrete mathematics. One of its main advantages is the ability to transform a question involving a sequence of real numbers in a one variable function problem, extending the mathematical resources to solve problems that appear in different areas, such as in the book *Liber Abaci* of Leonardo de Pisa (1202) in which he introduces the known Fibonacci sequence, and in the algebraic functions as discussed by Massazza and Sabadini [1]. Specifically, this paper approaches sequence of real numbers problems whose terms are related with its previous terms, as known as recurrence related sequences. Its application goes much further than solving recurrences relation, being also used as an alternative method for exercises of combinatorial mathematics.

1 Introdução

Em suma, análise combinatória é uma rama da matemática que estabelece um conjunto de procedimentos e técnicas para resolver problemas relacionados com

*lucas.zth@gmail.com
†elen.spreafico@ufms.br

contagem. Apesar de muitas vezes os problemas de análise combinatória serem julgados pelos estudantes como problemas que não seguem um padrão, exigindo um raciocínio específico para cada exercício, na realidade eles respondem questões da forma "quantos maneiras existem de esses elementos serem combinados?"ou "essa é a melhor maneira de combinar esses elementos?", e podem ser aplicados em muitas áreas de matemática pura e em áreas correlatas como teoria de grafos, otimização, computação, estatística e física.

Muitas vezes um problema combinatório pode ser interpretado como o problema de determinar uma sequência de coeficientes que satisfazem uma relação de recorrência. Uma das ferramentas que facilita a resolução desse tipo de problema são as funções geradoras, que, formalmente, são séries de potências. Existem vários tipos de funções geradoras, neste trabalho focaremos em funções geradoras ordinárias e exponenciais. Recomendamos, dentre tantas, como referências introdutórias [2, 3, 4, 5].

No decorrer do texto, usaremos propriedades algébricas recorrentes em textos base de matemática, entre as quais está o conceito de frações parciais, que são de suma importância na resolução de problemas que envolvam funções geradoras. Para a completeza do texto, definiremos frações parciais:

Definição 1.1. *[Frações Parciais] Toda fração de polinômios com coeficientes reais,* $F(t) = \frac{f(t)}{g(t)}$*, onde*

$$g(t) = \prod_{k=1}^{n} = (t - a_k), \qquad n \in \mathrm{N}$$

e o grau de $f(t)$ *é menor que* $g(t)$ *pode ser escrita na forma de frações parciais, ou seja,*

$$F(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{t - a_k}, \qquad A_1, A_2, ..., A_n \in \mathrm{R}.$$

Outra relação importante que é utilizada ao longo do texto é a apresentada a seguir.

$$\frac{1}{(1 - x^p)^n} = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{n + r - 1}{r} x^{rp}, \tag{1}$$

que pode ser interpretada como a fórmula de uma progressão infinita com $a_0 = 1$ e $q = x^p$ ao ser elevada a um valor n natural. A prova dessa relação, entre outras, pode ser encontrada em [6].

2 Funções Geradoras

Como ponto de partida, definimos função geradora, de acordo com [7].

Definição 2.1 (Função Geradora)**.** *Uma função* $f(x)$ *é uma função geradora para uma sequência de números reais* $(a_0, a_1, a_2, ...)$*, relativa à sequência de funções*

$(f_0(x), f_1(x), f_2(x), ...)$ *se:*

$$f(x) = a_0 f_0(x) + a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + ... + a_n f_n(x) + ... = \sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(x)$$

Dentre as diversas funções geradoras existentes, daremos ênfase às classificadas como ordinárias ou exponencial.

Definição 2.2 (Função Geradora Ordinária)**.** *Definimos $f(x)$ uma função geradora ordinária quando*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Como exemplo, $x^3 + 2x^2 - 1$ é a função geradora ordinária para a sequência $(-1, 0, 2, 1, 0, 0, 0, \dots)$.

Definição 2.3 (Função Geradora Exponencial)**.** *Definimos $f(x)$ uma função geradora exponencial quando*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \frac{a_2 x^2}{2!} + ... + \frac{a_n x^n}{n!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^n}{n!}.$$

Como exemplo, a função exponencial, e^x, que pode ser representada pela expansão de Taylor em torno de $x = 0$ como

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

é a função geradora exponencial para a sequência $a_n = 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

Para exemplificar o uso de função geradora na resolução de problemas de análise combinatória, consideremos o seguinte problema encontrado em [8]:

Problema 2.1. *Penélope quer distribuir N presentes entre seus S sobrinhos, de modo que cada um receba pelo menos um presente. Todos os presentes devem ser distribuídos.*

a) Supondo que todos os presentes sejam iguais, de quantos modos ela pode distribuir 6 presentes para 4 sobrinhos?

b) Resolva o mesmo problema do item a) considerando agora que todos os presentes sejam diferentes.

O item a) pode ser resolvido utilizando a função geradora ordinária por se enquadrar no caso em que temos 6 objetos iguais (presentes) distribuídos em 6 "caixas" distintas (sobrinhos).

Note que o menor número de presentes que cada sobrinho irá receber é um (x) e o maior será três (x^3) (para que todos possam receber pelo menos um), sendo assim a função geradora será:

$$f(x) = (x + x^2 + x^3)^4.$$

Note que temos interesse no coeficiente que multiplica o termo (x^6), não sendo necessário expandir mais que isso. Sendo assim,

$$f(x) = x^4 + 4x^5 + 10x^6 + ...,$$

com isso temos 10 maneiras distintas de distribuir os presentes.

O item b) pode ser resolvido utilizando a função geradora exponencial por se enquadrar no caso em que temos 6 objetos distintos (presentes) e 4 "caixas" distintas (sobrinhos). Da mesma forma abordada no item a), a função geradora agora será:

$$f(x) = \left(x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}\right)^4.$$

Expandindo até encontrarmos o coeficiente que multiplica o termo $\left(\frac{x^6}{6!}\right)$, temos:

$$f(x) = \frac{24x^4}{4!} + \frac{240x^5}{5!} + \frac{1560x^6}{6!} + ...,$$

e com isso temos 1560 maneiras de distribuir os presentes.

3 Relação de Recorrência

Uma relação de recorrência ou equação de recorrência é uma sequência em que seus termos são gerados utilizando um ou mais termos anteriores da mesma sequência e pode ser definida matematicamente como apresentado a seguir:

Definição 3.1 (Recorrência). *A sequência de números reais definida por*

$$a_n = g_1(n)f_1(a_{n-1}) + ... + g_k(n)f_k(a_{n-k}) + h(n),$$

onde h, f_p e g_p, $1 \leq p \leq k$, são funções é chamada de sequência recorrente, sendo a expressão anterior conhecida como relação de recorrência.

Quando os termos de uma relação de recorrência depender exclusivamente de termos anteriores da sequência, h é a função nula, essa relação de recorrência será chamada de homogênea. Nos casos em que além dos termos da sequência houver algum termo independente, $h(n) \neq 0$, será chamada relação de recorrência não homogênea.

Uma relação de recorrência é dita linear quando a função que relaciona cada termo aos termos anteriores é linear. Além disso, a sequência também será classificada de acordo com sua ordem, sendo classificada como uma relação de recorrência de primeira ordem quando a_n estiver em função de a_{n-1}. Uma recorrência linear de segunda ordem homogênea pode ser escrito como apresentado a seguir.

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}.$$

A sequência utilizada como exemplo é a conhecida sequência de Fibonacci quando tomado $a_0 = a_1 = 1$ como termos iniciais da sequência.

Resolver uma relação ou equação de recorrência, de acordo com [9], significa encontrar uma fórmula fechada para a recorrência, ou seja, uma expressão que forneça cada termo a_n da sequência em função apenas de n e não dos termos anteriores. Tal expressão é chamada solução da recorrência.

Retomando o item b) do Problema (2.1), também é possível resolvê-lo abordando-o através de uma recorrência: Seja x_S a quantidade de modos de distribuir N presentes para os S sobrinhos, sendo que cada um receba pelo menos um presente, podemos criar a seguinte recorrência:

$$x_S = S^N - \sum_{r=1}^{S-1} C_S^r x_{S-r}.$$

Podemos distribuir os N presentes de S^N formas diferentes sem levarmos em conta que cada um deve receber pelo menos um presente e descontamos os casos em que apenas um dos sobrinhos não recebe presente, dois não recebem presentes e assim sucessivamente até o caso que que todos menos um não recebem presentes.

Para o caso, N $=6$ e S $=4$, temos:

$$x_1 = 1,$$

$$x_2 = 2^6 - C_2^1 x_1 = 62,$$
$$x_3 = 3^6 - C_3^1 x_2 - C_3^2 x_1 = 540,$$
$$x_4 = 4^6 - C_4^1 x_3 - C_4^2 x_2 - C_4^3 x_1 = 1560.$$

Note que o problema foi solucionado utilizando recorrência pelo fato de termos interesse em um termo pequeno N $=4$. Porém para um caso com um alto número de presentes e sobrinhos, levaria muito tempo para encontrar a solução desejada, sendo interessante estudar uma maneira rápida para solucionar recorrências. Cada tipo de recorrência costuma ser solucionado através de uma abordagem diferente. Nesse trabalho será utilizado o recurso das funções geradoras, que é uma ferramenta muito útil e importante para encontrar fórmulas fechadas para recorrências e podem ser utilizadas sem muita preocupação do tipo de categoria em que a recorrência se encontra como apresentado no exemplo a seguir.

Problema 3.1. *Determine a solução da relação de recorrência $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$, com $a_0 = 1$ e $a_1 = 3$, através do uso das funções geradoras.*

Seja, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ a função geradora da sequência (a_n). Reescrevendo o problema como

$$a_n x^n = 3a_{n-1}x^n - 2a_{n-2}x^n,$$

e somando os termos para $n \geq 2$,

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} 3a_{n-1}x^n - \sum_{n=2}^{\infty} 2a_{n-2}x^n$$

Logo,

$$f(x) - a_0 - a_1 x = 3x\,(f(x) - a_0) - 2x^2 f(x),$$

o que implica que

$$f(x) = \frac{1}{1 - 3x + 2x^2}$$

Separando a expressão de f em frações parciais, temos

$$f(x) = \frac{-1}{1-x} + \frac{2}{1-2x},$$

e, usando (1), então,

$$f(x) = -\sum_{0}^{\infty} x^n + 2\sum_{0}^{\infty} 2^n x^n = \sum_{0}^{\infty} (2^{n+1} - 1)x^n.$$

Com isso, é possível concluir que a resolução da recorrência em questão é dada por

$$a_n = 2^{n+1} - 1.$$

4 Aplicação: Torres de Hanói

Para exemplificar o uso de funções geradoras na solução de problemas de recorrência será utilizado o problema das Torres de Hanói, que consiste em um jogo de tabuleiro com três pinos verticais e uma quantia de discos de raios diferentes. O objetivo desse jogo é transportar todos os discos, inicialmente em um pino e dispostos em ordem decrescente, para qualquer um dos outros dois pinos sem que nunca um disco menor fique posicionado em baixo de um disco maior. Conhecendo as regras desse jogo, uma pergunta interessante a ser respondida seria a seguinte:

Problema 4.1. *Dado um número $N+1$ de discos, qual seria a menor quantidade de movimentos necessários para resolver esse problema?*

Sem muitos detalhes, essa resposta pode ser dada resolvendo a seguinte equação de recorrência:

$$a_n = 2a_{n-1} + a_0, \qquad a_0 = 1 \tag{1}$$

É possível resolver esse problema utilizando os recursos das funções geradoras. O problema das Torres de Hanói dado acima pode ser solucionado partindo da definição de função geradora ordinária como apresentado a seguir. Temos que, usando

(1),

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(2a_{n-1}+1)x^n \\ &= 1 + 2x\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n-1})x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} x^n \end{aligned}$$

Note que a convergência de (a_n) não é relevante para a solução do problema. Temos agora que

$$f(x) = 1 + 2x \cdot f(x) + \frac{x}{1-x},$$

e solucionando para f, usando a definição (1.1), obtemos que

$$f(x) = \frac{2}{(1-2x)} - \frac{1}{(1-x)},$$

que, por sua vez, pode ser escrita como:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2 \cdot 2^n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(2^{n+1}-1)x^n.$$

Então, pela definição de função geradora,

$$a_n = 2^{n+1} - 1, \qquad n \geqslant 0,$$

onde a_n é a solução da recorrência, sendo possível determinar qualquer termo da sequência de modo rápido e simples.

5 Conclusões

O uso de funções geradores se mostrou vantajoso para resolver problemas de recorrência de modo sistemático, não havendo necessidade de avaliar sua linearidade, homogeneidade e ordem. Entretando, a utilização dessa ferramenta exigiu uma maior manipulação algébrica, tornando os exercícios mais longos e trabalhosos.

Esse recurso mostrou-se capaz de solucionar distintos problemas de análise combinatória de modo simples e seguindo um mesmo padrão de resolução, algo que usualmente não ocorre ao se utilizar de recursos como arranjos, combinações e permutações.

Portanto, pode-se afirmar que o estudo de funções geradoras apresenta sua importância não só como uma alternativa de resolução perante os métodos tradicionais, mas também como uma ferramenta capaz de generalizar a resolução de muitos problemas de matemática discreta.

Referências

[1] P. MASSAZZA and N. SABADINI, “Some Applications and Techniques for Generating Functions,” *Lecture Notes in Computer Science*, vol. 351, pp. 321–336, 1989.

[2] D. GUICHARD, *An Introduction to Combinatorics and Graph Theory.* Whitman College-Creative Commons, 2017.

[3] P. FLAJOLET and R. SEDGEWICK, *Analytic Combinatorics.* Cambridge University Press, 2009.

[4] R. P. GRIMALDI, *Matemáticas Discreta y Combinatoria, 3a ed.* Addison Wesley, 1998.

[5] A. C. MORGADO, J. B. P. DE CARVALHO, P. C. P. CARVALHO, and P. FERNANDEZ, *Análise Combinatória e Probabilidade.* SBM, 2016.

[6] I. ANDERSON, *A First Course in Discrete Mathematics.* London: Springer, 2002.

[7] C. A. A. SAMPAIO, *Funções Geradoras e Aplicações em Partições.* Dissertacao de Mestrado, UNICAMP, Campinas, SP, 1998.

[8] A. C. MORGADO and P. C. P. CARVALHO, *Matemática Discreta*, vol. 2. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

[9] V. P. MARCUS, *Recorrência - Problemas e Aplicações.* Dissertacao de Mestrado, UnB, Brasilia, DF, 2014.