



FUNÇÕES GERADORAS EM RECORRÊNCIAS LINEARES

Resumo. Funções geradoras são funções amplamente utilizadas na resolução de problemas de matemática discreta. Uma de suas principais vantagens é a capacidade de transformar um problema de sequência em um problema de funções, área esta que disponibiliza de muito mais recursos matemáticos para solucionar os diversos problemas.

Mais especificamente, nesse trabalho será abordado problemas que envolvam sequências definidas em relação a seus termos anteriores imediatos, também chamadas de relações de recorrência. Relações de recorrência como a série de Fibonacci e os números de Lucas são amplamente conhecidas. Sua aplicação estende a muito mais que isso, como na solução de problemas como a torre de Hanoy e diversos exercícios que seriam extremamente complexos se solucionados utilizando técnicas mais simples de análise combinatória.

Palavras-chave. Funções Geradoras, Recorrências Lineares, Sequências Numéricas.

Abstract. Generating functions are functions widely used to solve problems of discrete mathematics. One of the main advantages of its use is being able to change a usual discrete problem in a function problem, which is a mathematical area with a larger number of tools and resources to solve problems.

Specifically, this paper approaches sequence problems whose terms are related with its previous terms, those sequences are called recurrence related sequences. Recurrence related sequences as Fibonacci's series and Lucas' numbers are widely known. Its application goes much further than that, being used to solve problems as Hanoy's tower and many different and complex problems of combinatorics when approached through simple combinatorial concepts.

1 Introdução

Apesar de muitas vezes os problemas de análise de combinatória serem julgados pelos estudantes como problemas completamente diferentes, na realidade eles se encontram, em sua maioria, dentro dos seguintes casos: [?]

- Distribuir objetos iguais em caixas distintas (Função Geradora Ordinária);
- Distribuir objetos distintos em caixas distintas (Função Geradora Exponencial);
- Distribuir objetos iguais em caixas iguais (Partições de inteiros);

-Distribuir objetos distintos em caixas iguais (Partições de conjuntos).

Nesse trabalho será abordado os dois primeiros casos, esses facilmente solucionados utilizando uma abordagem através das funções geradoras.

O conhecimento de algumas propriedades de somatório como também o de frações parciais são de suma importância na resolução de problemas que envolvam funções geradoras. Alguma dessas relações como a definição de frações parciais são citadas na sequência:

$$\frac{1}{(1-x^p)^n} = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{n+r-1}{r} x^{rp},$$

que pode ser interpretada como a fórmula de uma progressão infinita com $a_0 = 1$ e $q = x^p$ ao ser elevada a um valor n .

Definição 1.1 (Frações Parciais). *[?] Toda fração de polinômios com coeficientes reais, $F(t) = \frac{f(t)}{g(t)}$, onde*

$$g(t) = \prod_{k=1}^n (t - a_k),$$

e o grau de $f(t)$ é menor que $g(t)$ pode ser escrita na forma de frações parciais, ou seja,

$$F(t) = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{t - a_k} \quad A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathbb{R}.$$

A prova das relações mostradas acima fogem do escopo do trabalho e por isso serão simplesmente utilizadas sem mais detalhes ao longo do trabalho.

2 Funções Geradoras

Definição 2.1 (Função Geradora). *Uma função $f(x)$ é uma função geradora para uma sequência (a_0, a_1, a_2, \dots) , $a_n \in \mathbb{R}$, relativa à sequência de funções $(f_0(x), f_1(x), f_2(x), \dots)$ se:*

$$f(x) = a_0 f_0(x) + a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \dots + a_n f_n(x) + \dots$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(x)$$

Definição 2.2 (Função Geradora Ordinária). *[?] Definimos $f(x)$ uma função geradora ordinária quando*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Como exemplo, $x^3 + 2x^2 - 1$ é a função geradora ordinária para a sequência $(-1, 0, 2, 1, 0, 0, 0, \dots)$.

Definição 2.3 (Função Geradora Exponencial). Definimos $f(x)$, a função geradora exponencial quando

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \frac{a_2 x^2}{2!} + \dots + \frac{a_n x^n}{n!} + \dots$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^n}{n!}$$

Como exemplo, a função exponencial, e^x , que pode ser representada pela expansão de Taylor em torno de $x = 0$ como $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ é a função geradora exponencial para a sequência $a_n = 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

Para exemplificar o uso de função geradora na resolução de problemas de análise combinatória, têm-se o seguinte problema:

(PROFMAT – ADAPTADO) Penélope quer distribuir N presentes entre seus S sobrinhos, de modo que cada um receba pelo menos um presente. Todos os presentes devem ser distribuídos. [?]

a) Supondo que todos os presentes sejam iguais, de quantos modos ela pode distribuir 6 presentes para 4 sobrinhos?

b) Resolva o mesmo problema do item a) considerando agora que todos os presentes sejam diferentes.

O item a) pode ser resolvido utilizando a função geradora ordinária por se enquadrar no caso em que temos 6 objetos iguais (presentes) distribuídos em 6 “caixas” distintas (sobrinhos).

Note que o menor número de presentes que cada sobrinho irá receber é um (x) e o maior será três (x^3) (para que todos possam receber pelo menos um), sendo assim a função geradora será:

$$f(x) = (x + x^2 + x^3)^4$$

Note que temos interesse no coeficiente que multiplica o termo (x^6), não sendo necessário expandir mais que isso. Sendo assim,

$$f(x) = x^4 + 4x^5 + 10x^6 + \dots,$$

com isso temos 10 maneiras distintas de distribuir os presentes.

O item b) pode ser resolvido utilizando a função geradora exponencial por se enquadrar no caso em que temos 6 objetos distintos (presentes) e 4 “caixas” distintas (sobrinhos).

Da mesma forma abordada no item a), a função geradora agora será:

$$f(x) = \left(x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}\right)^4$$

Expandindo até encontrarmos o coeficiente que multiplica o termo $\left(\frac{x^6}{6!}\right)$, temos:

$$f(x) = \frac{24x^4}{4!} + \frac{240x^5}{5!} + \frac{1560x^6}{6!} + \dots,$$

com isso temos 1560 maneiras de distribuir os presentes.

3 Relação de Recorrência

Uma relação de recorrência ou equação de recorrência é uma sequência em que seus termos são gerados utilizando um ou mais termos anteriores da mesma sequência.

Quando os termos de uma relação de recorrência depender exclusivamente de termos anteriores da sequência, essa relação de recorrência será chamada de homogênea. Nos casos em que além dos termos da sequência houver algum termo independente será chamada relação de recorrência não homogênea.

Uma relação de recorrência é dita linear quando a função que relaciona cada termo aos termos anteriores é linear. Além disso, a sequência também será classificada de acordo com sua ordem, sendo classificada como uma relação de recorrência de primeira ordem quando a_n estiver em função de a_{n-1} .

Resolver uma relação ou equação de recorrência, significa encontrar uma fórmula fechada para a recorrência, ou seja, uma expressão que forneça cada termo a_n da sequência em função apenas de n e não dos termos anteriores. Tal expressão é chamada solução da recorrência. [?]

Retomando o item b) do problema citado anteriormente também é possível resolver abordando através de uma recorrência:

(PROFMAT – ADAPTADO) Penélope quer distribuir N presentes entre seus S sobrinhos, de modo que cada um receba pelo menos um presente. Todos os presentes devem ser distribuídos.

a) Supondo que todos os presentes sejam iguais, de quantos modos ela pode distribuir 6 presentes para 4 sobrinhos?

b) Resolva o mesmo problema do item a) considerando agora que todos os presentes sejam diferentes.

Seja x_S a quantidade de modos de distribuir N presentes para os S sobrinhos, sendo que cada um receba pelo menos um presente, podemos criar a seguinte recorrência:

$$x_S = S^N - \sum_{r=1}^{S-1} C_S^r x_{S-r}$$

Podemos distribuir os N presentes de S^N formas diferentes sem levarmos em conta que cada um deve receber pelo menos um presente e descontamos os casos em que apenas um dos sobrinhos não recebe presente, dois não recebem presentes e assim sucessivamente até o caso que que todos menos um não recebem presentes.

Para o caso, $N = 6$ e $S = 4$, temos:

$$\begin{aligned}x_1 &= 1, \\x_2 &= 2^6 - C_2^1 x_1 = 62, \\x_3 &= 3^6 - C_3^1 x_2 - C_3^2 x_1 = 540, \\x_4 &= 4^6 - C_4^1 x_3 - C_4^2 x_2 - C_4^3 x_1 = 1560.\end{aligned}$$

Note que o problema foi facilmente solucionado utilizando recorrência pelo fato de termos interesse em um termo pequeno $N = 4$. Porém para um caso com um alto número de presentes e sobrinhos, levaria muito tempo para encontrar a solução desejada, sendo interessante estudar uma maneira rápida para solucionar recorrências. Cada tipo de recorrência costuma ser solucionado através de uma abordagem diferente. Nesse trabalho será utilizado o recurso das funções geradoras, que é uma ferramenta muito forte e importante para encontrar fórmulas fechadas para recorrências e podem ser utilizadas sem muita preocupação do tipo de categoria em que a recorrência se encontra.

4 Metodologia

Para exemplificar o uso de funções geradoras na solução de problemas de recorrência será utilizado o problema da torre de Hanoy, que consiste em um jogo de tabuleiro com três pinos verticais e uma quantia de discos de raios diferentes. O objetivo desse jogo é transportar todos os discos, inicialmente em um pino e dispostos em ordem decrescente, para qualquer um dos outros dois pinos sem que nunca um disco menor fique posicionado em baixo de um disco maior. Conhecendo as regras desse jogo, uma pergunta interessante a ser respondida seria a seguinte:

“Dado um número $N+1$ de discos, qual seria a menor quantia de movimentos necessárias para resolver esse problema?”.

Sem muitos detalhes, essa resposta pode ser dada resolvendo a seguinte equação de recorrência.

$$a_n = 2a_{n-1} + a_0, \quad a_0 = 1$$

É possível resolver esse problema utilizando os recursos das funções geradoras.

5 Resultados

O problema da torre de Hanoy dado acima pode ser solucionado partindo da definição de função geradora ordinária como apresentado a seguir.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \Rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (2a_{n-1} + 1)x^n \Rightarrow f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (2a_{n-1} + 1)x^n \Rightarrow$$

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (2a_{n-1})x^n + \sum_{n=1}^{\infty} x^n \Rightarrow f(x) = 1 + 2x \sum_{n=1}^{\infty} (a_{n-1})x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} x^n,$$

note que a convergência de x não é relevante para a solução do problema.

$$f(x) = 1 + 2x \cdot f(x) + \frac{x}{1-x},$$

solucionando em $f(x)$:

$$f(x) = \frac{1}{(1-2x)(1-x)} \Rightarrow f(x) = \frac{2}{(1-2x)} - \frac{1}{(1-x)},$$

que pode ser escrita como:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2 \cdot 2^n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} x^n \Rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (2^{n+1} - 1)x^n.$$

Então, pela definição de função geradora,

$$a_n = 2^{n+1} - 1, \quad n \geq 0,$$

onde a_n é a solução da recorrência, sendo possível determinar qualquer termo da sequência de modo rápido e simples.

6 Conclusões

É fácil perceber a importância das funções geradoras, sendo uma ferramenta amplamente utilizada na resolução de problemas de recorrência para encontrar fórmulas fechadas do termo geral. Além de problemas de recorrência lineares, sua aplicação é muito mais ampla, sendo utilizada para solucionar problemas de análise combinatória como mostrado, partições e recorrências não lineares.

Se tratando de recorrências ou problemas de análise combinatória, a abordagem através do uso de funções geradoras pode aparentar desvantajosa por ser uma resolução mais longa comparado com os métodos tradicionais, porém se utiliza de recursos facilmente programáveis em computador (funções), permitindo a generalização dos mais diversos problemas dessas áreas através dessa ferramenta.

Referências

- [1] S. F. RAFAEL, “Funcoes geradoras e problemas de contagem.” https://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/92032/Poster_30730.pdf?sequence=2. Acessado em Ago. 2018.

- [2] R. J. SANTOS, “Decomposicao em fracoes parciais.” <http://www.mat.ufmg.br/~regi/eqdif/fracparc.pdf>. Acessado em Jul. 2018.
- [3] C. A. A. SAMPAIO, *Funcoes Geradoras e Aplicacoes em Particoes*. Dissertacao de Mestrado, UNICAMP, Campinas, SP, 1998.
- [4] S. B. D. MATEMATICA, “Avaliacao matematica discreta.” http://www.proformat-sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/23/2016/08/GABARITO_AV2_MA12_2013.pdf. Acessado em Set. 2018.
- [5] V. P. MARCUS, *Recorrenciã - Problemas e Aplicacoes*. Dissertacao de Mestrado, UnB, Brasilia, DF, 2014.