Revista de Divulgação Científica em
Ciências Exatas e Tecnológicas
PORANDU
Vol. 3, n. 1, 2019, pg. 25-32

Grafos e os Coeficientes Trinomiais

L. ROCHA[1,*] , E. V. P. SPREAFICO [1,†] ,

[1] Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, INMA, MS, Brasil,

Submetido em 22/09/2018; Aceito em 12/12/2018; Publicado em 06/09/2019

Resumo. Este trabalho apresenta a relação entre o conjunto de caminhos reticulados que vão de $(0,0)$ a $(n,0)$ com passos $U = (1,1)$, $D = (1,-1)$ e $H = (1,0)$ e o conjunto de árvores ordenadas com $n+1$ arestas, com raiz de grau ímpar e nós com grau de saída no máximo dois. Ambos os conjuntos são contados pelos coeficientes centrais da expansão do trinômio $(1+x+x^2)^n$. Para tanto, a partir de um exemplo envolvendo coeficientes binomiais, é apresentado a definição de coeficiente multinomial, assim como figuras para representar essa relação entre ambos os conjuntos.

Palavras-chave. Árvores Ordenadas, Caminhos Reticulados, Coeficientes Trinomiais.

Abstract. This work presents the relationship between the set of lattice paths going from $(0,0)$ to $(n,0)$ with steps $U = (1,1)$, $D = (1,-1)$ and $H = (1,0)$ and the set of ordered trees with $n+1$ edges, having root of odd degree and nonroot nodes of outdegree at most two. Both sets are counted by the central coefficients of the expansion of the trinomial $(1+x+x^2)^n$. Thus, from an example involving binomial coefficients, the definition of multinomial coefficient is presented, as well as figures for represent this relationship between both sets.

1 Introdução

Em 1894, L.J. Rogers [1] descobriu um par de identidades que, mais tarde, passaram a se chamar Identidades de Rogers-Ramanujan, que é uma igualdade $\pi(q) = \phi(q)$, onde $\pi(q)$ é uma série e $\phi(q)$ é um produto infinito. Ramanujan conjecturou estas identidades e Rogers provou-as, recebendo assim o nome de ambos.

A segunda prova das identidades de Rogers levou Bailey [2], em 1944, à observação que depois ficou conhecida como "Lema de Bailey". Por sugestão de Bailey, L.J. Slater [3] sua aluna, no começo dos anos 50, usando esse lema forneceu uma lista de 130 identidades do tipo Rogers-Ramanujan. Em 1986 Andrews apresentou um algoritmo através do qual generalizações polinomiais de Identidades do tipo Rogers-Ramanujan podem ser obtidas.

*l.rocha@ufms.br
†elen.spreafico@ufms.br

K.C.P. Silva em 2014, em sua tese de doutorado [1], apresenta novas interpretações combinatórias de várias sequências a partir de ideias dadas por Andrews em [4], e resultados dados por Santos em [5]. Andrews introduziu uma função de duas variáveis para o estudo de identidades do tipo Rogers-Ramanujan e Santos conjecturou fórmulas explícitas para famílias de polinômios que podem ser obtidas usando-se o método de Andrews para mais de 70 identidades da lista das 130 apresentada por Slater.

No cálculo da fórmula para o termo geral da sequência encontrada usando o Método de Andrews com $f_{23}(-q,t)$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{n2}}{(q;q^2)_{2n+1}} = \frac{(q;q^2)_\infty}{(q^2;q^2)_\infty}(q^6;q^6)_\infty(q^4;q^6)_\infty(q^2;q^6)_\infty,$$

onde

$$a(n) = (a;q)_n = \prod_{j=0}^{\infty} \frac{(1-aq^j)}{(1-aq^{j+n})} = (1-a)(1-aq)...(1-aq^{j+n}),$$

tal que n é um número inteiro positivo, e

$$(a;q)_\infty = (a)_\infty = \prod_{j=0}^{\infty}(1-aq^j), \quad \text{para } |q|<1,$$

um novo instrumento de contagem foi encontrado.

A referência [6] é uma base de dados, disponível desde 2009, que registra sequências de números inteiros, sequências racionais, complexas, entre outros temas. Essa nova sequência está apresentada em [6], bem como uma interpretação em termos de caminhos reticulados para os coeficientes dos termos centrais da expansão do trinômio $(1+3x+x^2)^n$, mas não encontramos relações com árvores ordenadas.

Nosso objetivo geral é encontrar uma interpretação generalizada entre os trinômios da forma $(a+bx+cx^2)^n$, caminhos reticulados e grafos (árvores). Investigaremos inicialmente os casos em que $a=1, b=1$ ou 3 e $c=1$.

2 Coeficiente Multinomial

Nesta seção, apresentaremos a definição de coeficiente multinomial, conforme apresentado por Degroot em [7], bem como exemplos e resultados, utilizando também [8] e [9]. Em seguida apresentamos algumas propriedades do trinômio $(1+3x+x^2)^n$, tal como em [1], e finalmente apresentamos os caminhos reticulados e árvores ordenadas descritos em [6], utilizando de algumas referências, tais como [10] e [11].

2.1 Coeficiente Binomial

Dado um conjunto com n elementos, o número de subconjuntos com k elementos que podemos formar a partir desse conjunto, é dado por

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

No desenvolvimento de $(a+b)^n$, Newton[3] desenvolveu a fórmula que nos dá a seguinte identidade,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Em [7] temos o seguinte exemplo: suponha que 20 membros de uma organização devam ser divididos em três comitês A, B e C de tal maneira que cada um dos comitês A e B devam ter oito membros e o comitê C tenha quatro membros. Determinaremos o número de maneiras diferentes pelas quais os membros podem ser designados para esses comitês. Observe que cada um dos 20 membros é atribuído a um e apenas um comitê.

Uma forma de pensar para resolver esse problema é formar o comitê A primeiro, escolhendo seus 8 membros, e então dividir os 12 membros restantes nos comitês B e C. Para formar o comitê A, devemos escolher 8 de 20 membros, e isso pode ser feito de $\binom{20}{8}$ maneiras.

Depois, para dividir os 12 membros restantes nos comitês B e C, existem $\binom{12}{8}$ maneiras de fazê-lo. Logo, pelo princípio multiplicativo, a resposta é

$$\binom{20}{8}\binom{12}{8} = \frac{20!}{8!12!}\frac{12!}{8!4!} = 62.355.150.$$

Observe como o 12! que aparece no numerador de $\binom{12}{8}$ cancela com o 12! que aparece no denominador de $\binom{20}{8}$. Este fato é a chave da fórmula geral que será apresentada a seguir.

2.2 Generalização

Em geral, suponha que n elementos distintos devam ser divididos em k grupos diferentes ($k \geq 2$), de tal maneira que, para $j = 1, ..., k$, o j-ésimo grupo, A_j, contenha exatamente n_j elementos, onde

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n.$$

Os elementos n_1 no primeiro grupo, A_1, podem ser selecionados a partir dos n elementos disponíveis de $\binom{n}{n_1}$ maneiras diferentes. Após os elementos n_1 do primeiro grupo terem sido selecionados, os elementos n_2 do segundo grupo, A_2, podem

[3] Newton, Isaac (1642-1727), matemático e físico inglês

ser selecionados a partir dos $n-n_1$ elementos restantes em $\binom{n-n_1}{n_2}$ maneiras diferentes. Assim, o número total de maneiras diferentes de selecionar os elementos para o primeiro e segundo grupo é $\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}$. Desse modo, segue que para cada $j=1,2,...,k-2$, após os primeiros j grupos terem sidos formados, o número de maneiras diferentes em que os n_{j+1} elementos do próximo grupo, A_{j+1}, podem ser selecionados, dentre os $n-n_1-...-n_j$ elementos restantes, é

$$\binom{n-n_1-...-n_j}{n_{j+1}.}$$

Após os elementos do grupo A_{k-1} terem sido selecionados, os n_k elementos restantes devem então formarem o último grupo A_k. Assim, o número total de maneiras diferentes de dividir os n elementos nos k grupos é:

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\cdots\binom{n-n_1\cdots-n_{k-2}}{n_{k-1}}=\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!},$$

onde a última fórmula significa escrever os coeficientes binomiais em termos de fatoriais.

Definição 2.1. *O número* $\dfrac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}$, *denotado por* $\dbinom{n}{n_1,n_2,...,n_k}$, *é chamado de coeficiente multinomial.*

Teorema 2.1. *Para todo* $x_1,x_2,...,x_k$ *e para* n *inteiro positivo,*

$$(x_1+x_2+...+x_k)^n=\sum\binom{n}{n_1,n_2,...,n_k}x_1^{n_1}x_2^{n_2}...x_k^{n_k},$$

onde a soma se estende sobre todas as combinações possíveis de inteiros não negativos $n_1,n_2,...,n_k$ *tais que* $n_1+n_2+...+n_k=n$.

Observemos que para $k=3$ temos o coeficiente trinomial.

3 Grafos e Caminhos reticulados

Podemos formar um triângulo aritmético com os coeficientes do trinômio $(1+3x+x^2)^n$, conforme representação abaixo,

						1						
					1	3	1					
				1	6	11	6	1				
			1	9	30	45	30	9	1			
		1	12	58	144	195	144	58	12	1		
	1	15	95	330	685	873	685	330	95	15	1	
1	18	141	630	1770	3258	3989	3258	1770	630	141	18	1

A coluna central desse triângulo tem os primeiros termos dados por 1, 3, 11, 45, 195, 873,... e é descrita com termo geral dado por

$$a(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{2k}{k} = T(2n, n).$$

Define-se $T(n,k)$ como o número de caminhos reticulados de $(0,0)$ até $(n, n-2k)$, usando passos $U = (1,1)$, $D = (1,-1)$ e, em níveis pares também $H = (2,0)$. A função geradora para $T(2n,k)$ é dada por $(1+3x+x^2)^n$.

Agora, analisando o trinômio $(1 + x + x^2)^n$, utilizando a base de dados [6], construímos o triângulo

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & 1 & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & & & & \\
 & & & 1 & 3 & 6 & 7 & 6 & 3 & 1 & & & \\
 & & 1 & 4 & 10 & 16 & 19 & 16 & 10 & 4 & 1 & & \\
 & 1 & 5 & 15 & 30 & 45 & 51 & 45 & 30 & 15 & 5 & 1 & \\
1 & 6 & 21 & 50 & 90 & 126 & 141 & 126 & 90 & 50 & 21 & 6 & 1
\end{array}$$

Analisando a sequência numérica A002426, definida em [6], determinada pelos coeficientes centrais da expansão do trinômio $(1+x+x^2)^n$, temos que os coeficientes centrais da expansão do trinômio $(1+x+x^2)^n$, é o número de caminhos reticulados indo de $(0,0)$ a $(n,0)$ com passos $U = (1,1)$ $D = (1,-1)$ e $H = (1,0)$. E também o número de árvores ordenadas com $n+1$ arestas, com raiz de grau ímpar e nós com grau de saída no máximo dois.

Proposição 3.1 (Princípio Bijetivo)**.** *Se A e B são conjuntos finitos e não vazios, então $|A| = |B|$ se, e somente se, existe uma bijeção $f : A \to B$.*

Deste modo, temos que para algum $n \in \mathbb{N}$, existe uma bijeção entre os conjuntos de caminhos reticulados e árvores ordenadas.

Para $n = 0$, 1, 2, 3, temos a representação gráfica, conforme Figuras 1, 2, 3, 4 e 5, das árvores ordenadas e todos os possíveis caminhos reticulados, os quais foram diferenciados pelas cores vermelho, verde e preto.

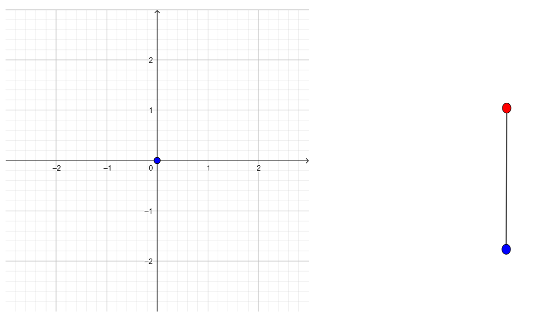

Figura 1: Caminho reticulado e árvore para $n = 0$

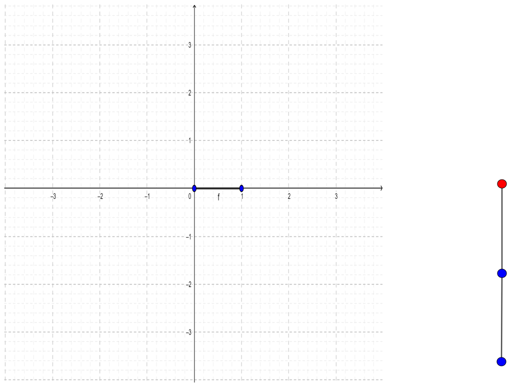

Figura 2: Caminho reticulado e árvore para $n = 1$

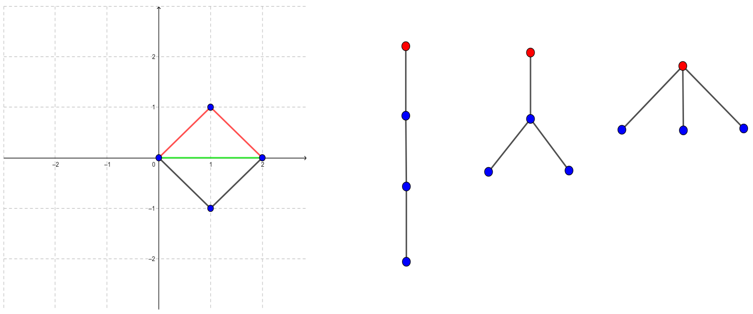

Figura 3: Caminhos reticulados e árvores para $n = 2$

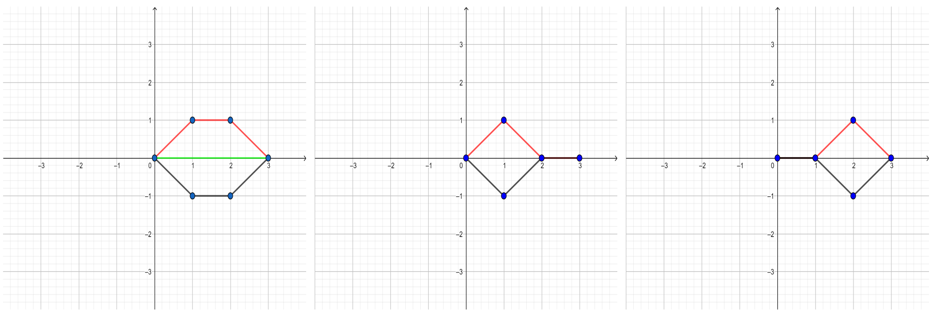

Figura 4: Caminhos reticulados para $n = 3$

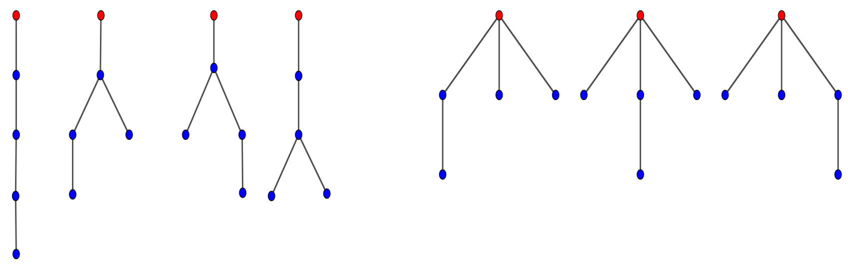

Figura 5: Árvores para $n = 3$

4 Conclusão

Neste trabalho fizemos a representação dos caminhos reticulados e árvores ordenadas, a partir da sequência relacionada aos coeficientes da expansão do trinômio $(1 + x + x^2)^n$, conforme descrito em [6], ou seja, apresentamos o início da relação direta entre caminhos reticulados e árvores ordenadas. Também foram apresentados algumas propriedades entre caminhos reticulados e os coeficientes relacionados à expansão do trinômio $(1 + 3x + x^2)^n$.

Como perspectivas futuras, faremos a prova bijetiva entre o conjunto de árvores ordenadas e caminhos reticulados. Esperamos que, a partir desses estudos, encontrar se o trinômio $(1 + 3x + x^2)^n$ também pode ser representado por uma árvore ordenada, ou algum tipo de grafo, e se puder, determinarmos quais são as restrições para essa construção.

Finalmente, esperamos contribuir para uma aproximação na interpretação generalizada entre os trinômios da forma $(a + bx + cx^2)^n$, árvores ordenadas e caminhos reticulados.

Referências

[1] K. C. P. Silva, *Sobre questões de combinatória envolvendo os números de Fibonacci, Pell e Jacobsthal.* 2014. 165f, Tese de Doutorado - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2014.

[2] W. N. Bailey, "Identities of the Rogers-Ramanujan type," *Proceedings of the London Mathematical Society*, vol. 2, no. 1, pp. 1–10, 1948.

[3] L. J. Slater, "Further identities of the Rogers-Ramanujan type," *Proceedings of the London Mathematical Society*, vol. 2, no. 1, pp. 147–167, 1952.

[4] G. E. Andrews, "Combinatorics and Ramanujan's "lost" Notebook," *London Math. Soc. Lecture Note Series*, vol. 103, pp. 1–23, 1985.

[5] J. P. O. Santos, *Computer algebra and identities of the Rogers-Ramanujan type.* PhD thesis, Pennsylvania State University, 1991.

[6] N. J. A. Sloane, *The On-line Encyclopedia of Integer Sequences.* Versão eletrônica disponível em: https://oeis.org/, 2003.

[7] M. H. DeGroot and M. J. Schervish, *Probability and Statistics.* 4 Ed. Pearson Education, 2012.

[8] A. C. Muniz Neto, *Tópicos de Matemática Elementar: Volume 4 Combinatória.* 2. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, Coleção do Professor de Matemática, 2016.

[9] A. C. Morgado and P. C. P. Carvalho, *Matemática Discreta.* 2. Ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, Coleção PROFMAT, 2015.

[10] D. Stanton and D. White, *Constructive Combinatorics.* New York: Springer-Verlag, 1986.

[11] J. A. Bondy and U. S. R. Murty, *Graph theory with applications.* New York: Elsevier Science Publishing Co., Inc., 1976.