X SEMINÁRIO SUL-MATO-GROSSENSE DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
18 E 19 de agosto de 2016

A IDENTIFICAÇÃO DE CONVERSÕES EM SITUAÇÕES COMBINATÓRIAS POR ALUNOS DE ANOS INICIAIS

Juliana Azevedo Montenegro[1]
Rute E. de S. R. Borba[2]
Marilena Bittar[3]

RESUMO: Esta pesquisa tem o objetivo de analisar como alunos identificam conversões realizadas em diferentes registros de representações semióticas em situações combinatórias. Para isso, foi aplicado um teste com 16 alunos do 5º ano em que eles precisavam identificar dois tipos de conversão: de língua natural para listagem ou para árvore de possibilidades; de listagem ou árvore de possibilidades para expressão numérica. Também era solicitado que as crianças justificassem suas respostas. Observou-se que reconhecer a conversão de situações combinatórias de língua natural para listagem ou para árvore obteve uma maior taxa de sucesso, quando comparado com o reconhecimento da conversão para expressão numérica, o que pode implicar num maior grau de congruência para a primeira conversão. Além disso, as crianças, em geral, não conseguiam justificar suas respostas em função da operação realizada. Nesse sentido, se faz necessária uma maior atenção na conversão para expressões numéricas, pois, esta não acontece com facilidade para os alunos deste nível de ensino.

Palavras-chave: Combinatória. Registros de Representações Semióticas. Identificação. Conversão. Anos iniciais.

INTRODUÇÃO

No contexto da Educação Matemática a importância do estudo da Combinatória por alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental tem sido

---

[1] Juliana Azevedo, Universidade Federal de Pernambuco, azevedo.juliana1987@gmail.com
[2] Rute Borba, Universidade Federal de Pernambuco, resrborba@gmail.com
[3] Marilena Bittar, Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, marilenabittar@gmail.com

amplamente discutida e recomendada. De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN, este conteúdo deve ser introduzido neste nível de ensino com o propósito de discutir “combinações, arranjos, permutações e, especialmente, o princípio multiplicativo da contagem” (BRASIL, 1997, p.40), possibilitando despertar a curiosidade e estimular a capacidade de generalização.

Os PCN (BRASIL, 1997, p. 19), também destacam o ensino da Matemática como uma tarefa importante na qual os professores podem usar diferentes representações e estratégias, visando atingir os objetivos de aprendizagem elencados por este documento.

> No ensino da Matemática, destacam-se dois aspectos básicos: um consiste em relacionar observações do mundo real com representações (esquemas, tabelas, figuras); outro consiste em relacionar essas representações com princípios e conceitos matemáticos. Nesse processo, a comunicação tem grande importância e deve ser estimulada, levando-se o aluno a “falar” e a “escrever” sobre Matemática, a trabalhar com representações gráficas, desenhos, construções [...].

Assim, é possível enfatizar a importância das diferentes representações, uma vez que pode ocorrer a evolução de representações pictóricas até representações que se aproximam cada vez mais da simbologia matemática formal (como expressões numéricas e fórmulas).

Além disso, Pessoa e Borba (2010) destacam que em resolução de situações combinatórias há uma grande variedade de representações simbólicas utilizadas pelos alunos, por exemplo: *desenhos*, *listagens*, *árvores de possibilidades*, *quadros*, *diagramas*, cálculos ou uso de *fórmulas, princípio fundamental da contagem*, entre outras. Borba, Pessoa, Barreto e Lima (2011) e Azevedo (2013) ressaltam, ainda, que estudantes de anos iniciais apresentam resoluções corretas que utilizam desenhos e listagens, dentre outras formas de representar situações combinatórias.

Sobre a importância das representações para a aprendizagem da Matemática, Vergnaud (1996, p. 184) enfatiza que “[...] as representações simbólicas têm justamente a vantagem de dar uma ajuda à resolução de um problema quando os dados são numerosos e a resposta à questão exige várias etapas”.

Duval (2009, p. 29), em sua Teoria dos Registros de Representação Semiótica afirma que:

> Não é possível estudar fenômenos relativos ao conhecimento sem se recorrer à noção de representação. [...] ela está no centro de toda

> reflexão que se preocupa com as questões da possibilidade e da constituição de um conhecimento certo. Porque não há conhecimento que não possa ser mobilizado por um sujeito sem uma atividade de representação.

Neste sentido, o presente artigo tem o objetivo de discutir a importância das representações para a aprendizagem da Combinatória, destacando-se a identificação de conversões por alunos de anos iniciais do Ensino Fundamental.

REPRESENTAÇÕES SIMBÓLICAS E REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS PARA O ENSINO E A APRENDIZAGEM DA COMBINATÓRIA

A Combinatória, como um ramo da Matemática, consiste no estudo da contagem de elementos de um conjunto em que podem ser utilizados diferentes tipos de representações, desde as mais intuitivas, como listagens e desenhos, passando por tabelas, quadros, árvores de possibilidades, até chegar às representações formais da Matemática como o princípio fundamental da contagem e fórmulas.

Sobre as representações simbólicas, Vergnaud (1986) ressalta que esta é uma das três dimensões fundamentais para a aquisição de um conceito. Para este autor, os conceitos são desenvolvidos em campos conceituais e estes são constituídos por um tripé: *situações* que dão significado a um conceito; *invariantes* prescritos e operatórios que caracterizam este conceito e diversas *representações simbólicas*.

A Combinatória está inserida no campo conceitual das estruturas multiplicativas. As situações que dão significado ao conceito de combinatória são organizadas por Pessoa e Borba (2009) em *produtos cartesianos*, *arranjos*, *combinações* e *permutações*. Os invariantes (relações constituintes das situações) estão relacionados à escolha e ordenação dos elementos, ou seja, quais escolhas devem ser realizadas na formação e contagem dos conjuntos e se nessas escolhas a ordem gera novas possibilidades. Os invariantes também se relacionam aos conceitos e teoremas em ação mobilizados para resolução destas situações. Além disso, as situações podem ser representadas por meio de diferentes símbolos.

Duval (2009, p.13) enfatiza que “A aprendizagem das matemáticas constitui, em evidência, um campo de estudos privilegiado para a análise de atividades cognitivas fundamentais como a conceitualização, o raciocínio, a resolução de problemas e mesmo a compreensão de textos." Isso porque se utiliza de uma variedade de registros de representação como a linguagem natural, sistema numérico, algébrico, geométrico, gráficos cartesianos, diagramas, redes, esquemas, etc.

Este autor atribui muita importância às representações, pois, "não se pode ter compreensão em matemática, se nós não distinguirmos um objeto de sua representação." (DUVAL, 2009, p. 14). Entretanto, essas representações são necessárias para a própria apreensão conceitual. As representações semióticas são, portanto, "[...] necessárias para fins de comunicação [...] e igualmente essenciais à atividade cognitiva do pensamento." (DUVAL, 2012, p.269). Nesse sentido, é importante que seja efetuado um trabalho envolvendo diversas representações para um mesmo objeto matemático, de modo que não se confunda o objeto com sua representação.

Para Duval (2012) um registro de representação semiótica é um sistema dotado de regras. Um sistema semiótico caracteriza um registro de representação semiótica quando satisfaz três condições: seus símbolos são *identificáveis* (quando o indivíduo é capaz de identificar o conceito representado), e podem ser transformados (por tratamento ou conversão) com regras específicas de operacionalização. O *tratamento* é uma transformação interna ao próprio registro e a *conversão* uma transformação de um registro para outro registro.

Além disso, Duval (2009) ressalta que as conversões realizadas podem gerar uma diferença na compreensão do conhecimento em questão, em função do nível de congruência[4] entre os registros. Este autor afirma que "Toda tarefa na qual a conversão não é congruente dá lugar a uma taxa mais ou menos fraca de sucesso conforme o grau de não-congruência." (p.19).

Desse modo, situações combinatórias, aqui discutidas, podem ser representadas por diferentes registros de representação semiótica (listagens, árvores de possibilidades, expressões numéricas e fórmulas, dentre outros), em que

[4] Congruência, segundo Duval (2009), na atividade de conversão, um registro de representação pode ser congruente a outro registro de representação quando satisfaz três critérios: 1) *correspondência 'semântica' dos elementos significantes;* 2) *univocidade 'semântica' terminal;* 3) a mesma ordem semântica nas duas representações. Quando satisfaz parcialmente ou não satisfaz tais critérios, as representações possuem níveis de congruência maiores, menores, ou serem não-congruentes.

cada um desses registros possui regras internas de funcionamento que identificam tal objeto matemático e são essenciais para sua apreensão conceitual.

Como exemplo, temos o seguinte problema de combinatória que envolve uma situação de arranjo:

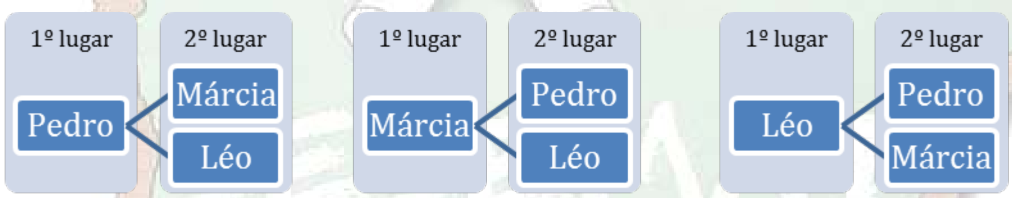
Três crianças (Pedro, Márcia e Léo) estão disputando uma corrida. De quantas maneiras diferentes pode-se ter os 1º e 2º lugares?

Neste caso, o problema pode ser respondido, dentre outros modos, por uma listagem, uma árvore de possibilidades, uma expressão numérica (aplicação do Princípio Fundamental da Contagem - PFC) e/ou uma fórmula, como podemos ver no Quadro 1, a seguir.

Listagem:

Pedro e Márcia	Márcia e Pedro	Léo e Pedro
Pedro e Léo	Márcia e Léo	Léo e Márcia

Árvore de possibilidades:



Expressão numérica (PFC):

3x2=6

Fórmula:

$$A3,2 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3x2x1}{1} = 6$$

Quadro 1: Resolução de situação combinatória de arranjo por diferentes registros de representação semiótica.

MÉTODO

O presente estudo tem o objetivo de analisar como alunos de anos iniciais identificam conversões de representações em situações combinatórias. Para tanto, foi aplicado um teste com 16 alunos de uma escola particular de Recife. No teste, os alunos deveriam identificar dois tipos de conversões diferentes. O primeiro tratava da conversão de Linguagem Natural – LN (ou língua materna) para Árvore de possibilidades (A) ou para Listagem (L). A segunda conversão se dava em reconhecer a operação correta para resolução em Expressão Numérica (EN) a partir de Árvore de possibilidades (A) ou de Listagem (L).

Assim, nas situações apresentadas nos testes havia sempre um registro de partida (Linguagem Natural), uma solução apresentada (Árvore de possibilidades ou Listagem) e um registro de chegada (Expressão Numérica). Os testes eram compostos por oito situações combinatórias, sendo duas de cada tipo de problema (*produto cartesiano*, *combinação*, *arranjo* e *permutação*).

Além disso, dois diferentes tipos de teste foram elaborados, em função do modo em que era apresentada a solução do problema de combinação. No Teste 1 os problemas de combinação eram apresentados na solução em árvore de possibilidades ou listagem desconsiderando os casos repetidos. No Teste 2, os casos repetidos eram apresentados na solução com um traço indicando que foram desconsiderados. A seguir, no Quadro 2 é possível observar exemplos de resolução de problema de combinação em que os casos repetidos são desconsiderados e outro em que os casos repetidos são riscados.

O Teste 1 foi apresentado ora iniciando com os problemas com a solução em árvore de possibilidades, ora iniciando com os problemas com a solução em listagem. O mesmo aconteceu para o Teste 2. As 16 crianças que responderam o teste foram divididas em quatro grupos em que: no primeiro grupo quatro crianças responderam o Teste 1 iniciando por listagem (Teste 1.1); no segundo grupo quatro alunos responderam o Teste 1 iniciando por árvore de possibilidades (Teste 1.2); no terceiro grupo quatro crianças responderam o Teste 2 iniciando por listagem (Teste 2.1); e no último grupo outras quatro crianças responderam o Teste 2 iniciando por árvore de possibilidades (Teste 2.2).

Havia duas hipóteses: a primeira em que se acreditava que os problemas de *combinação* seriam os mais difíceis de identificar as conversões, já que é necessário desconsiderar casos repetidos e as expressões numéricas que representam a situação precisam levar as repetições em consideração. A segunda hipótese estava relacionada com uma maior dificuldade em identificar a segunda conversão solicitada (para expressão numérica), uma vez que as crianças podem não reconhecer facilmente a expressão numérica, já que a mesma parece possuir menor grau de congruência com a representação em árvore de possibilidades ou em listagem.

Márcia tem em casa quatro tipos de fruta (mamão, abacaxi, laranja e banana) e quer fazer uma salada usando três dessas frutas. De quantas maneiras diferentes ela pode combinar essas frutas?

Resolução em listagem desconsiderando os casos repetidos:

Mamão, abacaxi e laranja
Mamão, abacaxi e banana
Mamão laranja e banana
Abacaxi, laranja e banana

Resolução em listagem com os casos repetidos riscados

Mamão, abacaxi e laranja	Abacaxi, laranja e banana
Mamão, abacaxi e banana	~~Abacaxi, banana e laranja~~
Mamão, laranja e banana	~~Abacaxi, mamão e laranja~~
~~Mamão, banana e abacaxi~~	~~Abacaxi, laranja e mamão~~
~~Mamão, banana e laranja~~	~~Abacaxi, banana e mamão~~
~~Mamão, laranja e abacaxi~~	~~Abacaxi, mamão e banana~~
~~Laranja, mamão e abacaxi~~	~~Banana, mamão e abacaxi~~
~~Laranja, abacaxi e mamão~~	~~Banana, abacaxi e mamão~~
~~Laranja, mamão e banana~~	~~Banana, mamão e laranja~~
~~Laranja, banana e mamão~~	~~Banana, laranja e mamão~~
~~Laranja, abacaxi e banana~~	~~Banana, abacaxi e laranja~~
~~Laranja, banana e abacaxi~~	~~Banana, laranja e abacaxi~~

Quadro 2: Problema combinatório em situação de combinação com uma resolução desconsiderando os casos repetidos e outra com os casos repetidos riscados.

RESULTADOS

A Tabela 1 mostra a quantidade de identificações corretas para as conversões solicitadas nos diferentes tipos de teste.

Observando a Tabela 1, é possível perceber que identificar qual a listagem ou qual a árvore de possibilidades representa o enunciado registrado em língua natural foi mais fácil para os estudantes, em comparação com a segunda conversão solicitada – da listagem ou da árvore para uma expressão numérica correspondente. Na conversão de língua natural para listagem 36 itens (de possíveis 64) foram respondidos corretamente e, na conversão de língua natural para árvore foram 33 itens.

A conversão de língua natural para listagem e da língua natural para árvore de possibilidades praticamente não apresentou diferenças o que, de certo modo, é surpreendente, pois implica que as crianças entenderam igualmente bem o registro em lista e em árvore. Esse resultado pode levar à conclusão de que, possivelmente, os alunos desta pesquisa já trabalharam antes com árvores de possibilidades, uma vez que estudos anteriores (AZEVEDO, COSTA, BORBA, 2011; AZEVEDO, 2013) indicam que essa representação não é utilizada de forma espontânea, sendo necessária instrução específica para as crianças entenderem como usar essa forma de representar situações combinatórias.

Já na segunda conversão (de árvore de possibilidades ou de listagens para expressões numéricas), apenas 16 itens (de possíveis 64) de cada situação foram identificados corretamente. Isso confirma a hipótese de que identificar a expressão numérica que responde uma dada situação combinatória é uma tarefa muito difícil para os estudantes de anos iniciais.

Tipo de teste	**Tipo de problema**	**Conversão 1**		**Conversão 2**	
		LN → L	LN → A	L → EN	A → EM
1.1 (**Teste sem casos repetidos, primeiro listagens e depois árvores.**)	PC	3	2	0	0
	C	2	0	0	0
	A	1	2	0	0
	P	3	2	1	1
1.2 (**Teste sem casos repetidos, primeiro árvores e depois listagens.**)	PC	0	2	0	2
	C	2	1	1	0
	A	1	4	0	0
	P	2	1	0	0

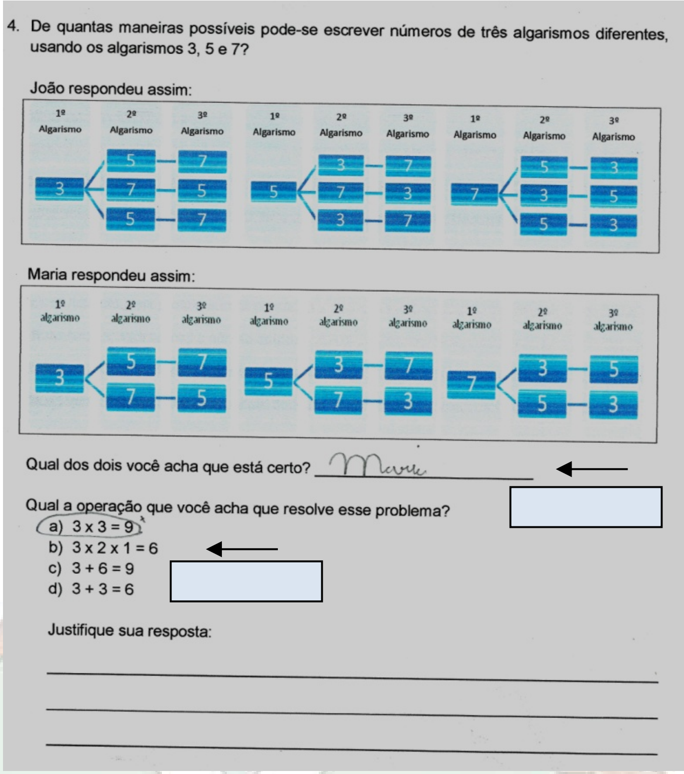
2.1 (Teste com casos repetidos riscados, primeiro listagens e depois árvores.)	PC	2	1	2	1
	C	4	3	1	0
	A	3	2	0	3
	P	3	3	2	3
2.2 (Teste com casos repetidos riscados, primeiro árvores e depois listagens.)	PC	2	2	2	2
	C	1	2	2	2
	A	3	2	2	1
	P	4	4	3	1
	Total	36	33	16	16

LN: Língua Natural; L: Listagem; A: Árvore de possibilidades; EN: Expressões Numéricas

PC: Produto Cartesiano; C: Combinação; A: Arranjo; P: Permutação.

Tabela 1: Identificações corretas em cada conversão por tipo de problema combinatório e por tipo de teste.

Em algumas situações os estudantes indicavam corretamente a árvore ou a listagem que respondia à situação correspondente em língua natural, mas escolhiam a alternativa que resultava em outro número de possibilidades, o que se configura numa inconsistência, uma vez que se a árvore ou a listagem apresentava 6 possibilidades, por exemplo, a resposta dada em expressão numérica também deveria resultar em 6 possibilidades. Entretanto, alguns alunos assinalavam a alternativa correta na árvore ou na listagem (no caso com 6 possibilidades), mas assinalavam a alternativa da expressão numérica que resulta em 9 possibilidades e não conseguiam justificar sua resposta. Nesses casos, não se pode afirmar se os estudantes estão conscientes de qual árvore de possibilidades ou qual listagem, de fato, representa a solução da situação. Para esclarecer esses casos, na segunda parte deste estudo serão realizadas entrevistas com alguns alunos, de modo que seja possível confirmar se reconheceram, ou não, as representações corretas. Um exemplo de aluno que identificou corretamente a primeira conversão, mas que assinalou um número diferente de possibilidades pode ser visto na Figura 1 a seguir.


4. De quantas maneiras possíveis pode-se escrever números de três algarismos diferentes, usando os algarismos 3, 5 e 7?

João respondeu assim:

Maria respondeu assim:

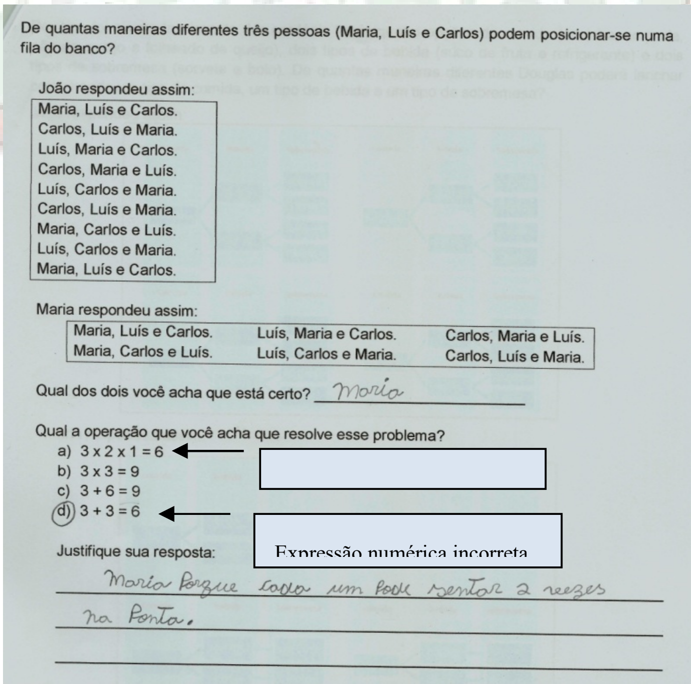
Qual dos dois você acha que está certo? Maria

Qual a operação que você acha que resolve esse problema?
a) 3 x 3 = 9
b) 3 x 2 x 1 = 6
c) 3 + 6 = 9
d) 3 + 3 = 6

Justifique sua resposta:

Figura 1: Situação de permutação na qual a identificação da primeira conversão está correta e da segunda conversão incorreta.
Fonte: Autoras mediante pesquisa.

A dificuldade em perceber a expressão numérica correta pode ser visualizada no exemplo da Figura 2. Neste o estudante identifica a listagem correta para a resolução do problema de permutação, justifica a resposta de modo que demonstra o entendimento da situação, entretanto, identifica a operação errada.


De quantas maneiras diferentes três pessoas (Maria, Luís e Carlos) podem posicionar-se numa fila do banco?

João respondeu assim:
Maria, Luís e Carlos.
Carlos, Luís e Maria.
Luís, Maria e Carlos.
Carlos, Maria e Luís.
Luís, Carlos e Maria.
Carlos, Luís e Maria.
Maria, Carlos e Luís.
Luís, Carlos e Maria.
Maria, Luís e Carlos.

Maria respondeu assim:

Maria, Luís e Carlos.	Luís, Maria e Carlos.	Carlos, Maria e Luís.
Maria, Carlos e Luís.	Luís, Carlos e Maria.	Carlos, Luís e Maria.

Qual dos dois você acha que está certo? Maria

Qual a operação que você acha que resolve esse problema?
a) 3 x 2 x 1 = 6
b) 3 x 3 = 9
c) 3 + 6 = 9
d) 3 + 3 = 6

Expressão numérica incorreta

Justifique sua resposta:
Maria Porque cada um pode sentar 2 vezes na Ponta.

Figura 2: Resposta correta para a primeira conversão com justificativa correta para a solução do problema, entretanto, com a segunda conversão incorreta.
Fonte: Autoras mediante pesquisa.

Sobre os problemas combinatórios com situação de combinação, confirmando a primeira hipótese, houve um baixo índice de acerto na identificação das conversões, especialmente na segunda conversão solicitada. Nesse sentido, em algumas situações, os alunos identificavam a primeira conversão, mas muitas vezes apontavam a expressão numérica errada, indicando que a dificuldade não necessariamente seja compreender combinações, ou em como representá-las, mas como entender que na expressão numérica de uma combinação é necessário registrar que os casos repetidos devem ser contados apenas uma vez. Esta conclusão se dá principalmente pelo fato de que apenas um aluno (Figura 3) conseguiu justificar de maneira coerente a expressão necessária para responder esta situação.

O Teste 2, no qual os problemas de combinação foram apresentados com os casos repetidos riscados, parece ter exercido influência positiva na resposta dos alunos, principalmente no segundo tipo de conversão (27 itens corretos de 64 possíveis) quando comparados com o primeiro teste – segunda conversão (5 itens corretos de 64 possíveis). Além dos casos riscados terem, possivelmente, auxiliado na compreensão dos problemas de combinação, essa forma de representação pode ter ajudado os estudantes a refletirem sobre os demais tipos de problemas combinatórios, pois houve aumento também nos acertos da segunda conversão nos testes do tipo 2 para os problemas de arranjo e permutação. Assim, cortar os casos pode ter chamado a atenção sobre quando a repetição não indica casos distintos (combinações) e quando indica (arranjos e permutações).

No exemplo da Figura 3 podemos ver a resposta de um aluno para o problema de combinação em que os casos repetidos foram riscados. Inicialmente ele não conseguiu justificar porque precisa dividir por 3x2 (situação em que a conversão 2 se dá de árvore para expressão numérica), uma vez que justificou afirmando: “são 24 possibilidades dividido por 6, mas eu não sei onde é o 6.”. No problema de combinação resolvido posteriormente (situação em que a conversão 2 se dá de listagem para expressão numérica), ele percebeu os casos repetidos e explicou o motivo para esta expressão: “24 opções dividido por 6 repetidos”.

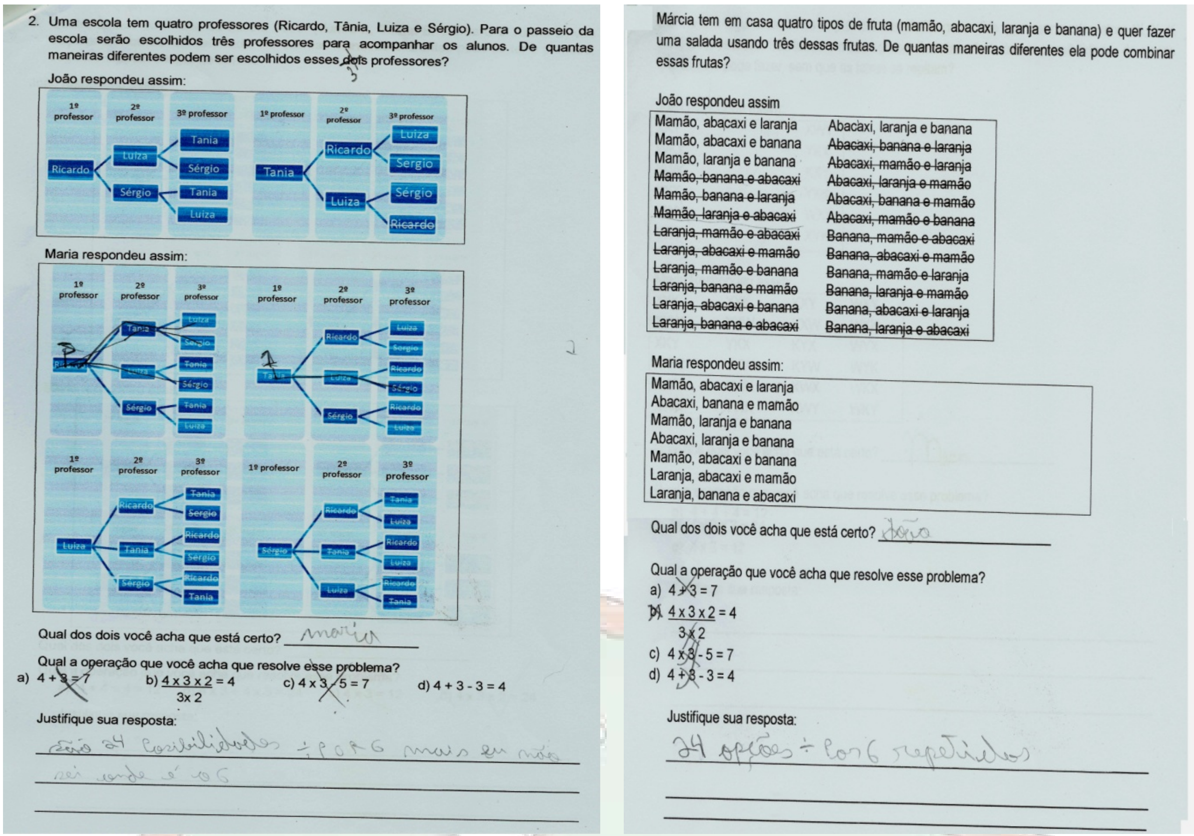


Figura 3: Situações de combinação respondidas corretamente com solução apresentada em árvore de possibilidades e em listagem.
Fonte: Autoras mediante pesquisa.

Assim, é possível perceber que a identificação da conversão, quando realizada de língua natural para listagem ou para árvore de possibilidades, resulta em maior taxa de sucesso, enquanto na identificação da conversão para a expressão numérica se apresenta uma taxa de acertos mais fraca. Os resultados parecem indicar, portanto, que a razão de maior sucesso na identificação de conversões ocorre quando há maior congruência, no caso do registro de língua natural para uma listagem ou uma árvore de possibilidades, enquanto que de árvore ou listagem para expressão numérica, o nível de congruência é menor.

CONCLUSÕES

O estudo aqui discutido, com o objetivo de analisar como alunos do 5º ano do Ensino Fundamental identificam, em situações combinatórias, conversões realizadas de língua natural para listagem e para árvore de possibilidades e, em seguida, para expressões numéricas, confirmou as hipóteses levantadas inicialmente, de maior dificuldade nos problemas com situação de combinação, bem como, na conversão para uma expressão numérica correspondente à resolução do problema. Isso porque poucos alunos identificaram as conversões para a expressão numérica correspondente, e apenas um aluno conseguiu justificar a expressão numérica para o problema de combinação.

Há, portanto, indícios de que as segundas conversões realizadas, de árvores de possibilidades ou de listagens para a expressão numérica, não acontecem com facilidade para as crianças de anos iniciais e, sendo assim, estas conversões, no ensino de Combinatória, requerem muita atenção. Não podem ser consideradas como triviais ou transparentes e devem ser tratadas com atenção e cuidado.

Também conclui-se que há modos mais claros de auxiliar as crianças a entenderem quando os casos são distintos ou quando são repetidos e essas formas de representação podem ajudar na compreensão dos distintos tipos de problemas combinatórios. Quando os casos repetidos são apresentados (como no Teste 2), destacando que não podem ser contados mais de uma vez (com riscos, por exemplo), essa forma de representação pode auxiliar uma compreensão mais ampla de situações combinatórias. Portanto, dessa forma, é possível auxiliar os estudantes a entenderem que em arranjos e permutações os casos com mesmos elementos expressos em ordens diferentes não são repetidos, mas sim, casos distintos e, em combinações, os casos com mesmos elementos, mas em ordens distintas devem ser considerados apenas uma vez.

Assim, ressalta-se que é de suma importância levar em consideração a conversão de registros para que os alunos percebam que há distintos modos de representar uma mesma situação combinatória e que esses modos variados podem auxiliá-los na compreensão dos distintos tipos de problemas combinatórios.

REFERÊNCIAS

AZEVEDO, Juliana. *Alunos de Anos Iniciais Construindo Árvores de Possibilidades*: É melhor no papel ou no computador? (Dissertação de Mestrado) Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica da UFPE. Recife: UFPE. 2013

AZEVEDO, J.; COSTA, D.; BORBA, R. O impacto do *software Árbol* no raciocínio combinatório. *Anais...* 13 Conferência Interamericana de Educação Matemática – CIAEM/IACME, Recife, Brasil. 2011

BORBA, Rute.; PESSOA, Cristiane.; BARRETO, Fernanda.; LIMA, Rita. Children's, young people's and adults' Combinatorial reasoning. In Ubuz, B. (Ed.). *Proceedings...* 35th

Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 2, pp. 169-176). Ankara, Turkey: PME. 2011.

BRASIL. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. *Parâmetros Curriculares Nacionais.* Matemática. 1º e 2º ciclos. Brasília, DF, 1997.

DUVAL, Raymond. *Semiósis e Pensamento Humano: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais.* (Sèmiosis et Pensèe Humaine: Registres Semiotiques et Apprentissages Intellectueis). (Fascículo I)/ Raymond Duval. Tradução: Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira - São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

DUVAL, Raymond. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. *Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática.* Florianópolis, v. 07, n. 2, p.266-297, 2012.

PESSOA, Cristiane; BORBA, Rute. Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1ª a 4ª série. *ZETETIKÉ.* Cempem, FE, Unicamp, v. 17, jan-jun. 2009.

PESSOA, Cristiane; BORBA, Rute. O raciocínio combinatório do início do Ensino Fundamental ao término do Ensino Médio. *Anais...* 10 Encontro Nacional de Educação Matemática, Salvador, 2010.

VERGNAUD, Gérard. Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didática das matemáticas Um exemplo: as estruturas aditivas. *Análise Psicológica, 1.* 1986. p. 75-90.

VERGNAUD, Gerárd. A Teoria dos Campos Conceptuais. In. BRUM, Jean, (org.) *Didáctica das Matemáticas.* Horizontes Pedagógicos, Lisboa, 1996.