COMPREENSÃO DA DEFINIÇÃO FORMAL DE LIMITE E A NOÇÃO DE DISTÂNCIA: UMA PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Alex Vinicius de Bastos Rangel
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
alex.rangel@ufms.br
orcid:0009-0000-4859-4889

Vitoria Lourenço Luges da Silva
E. E. Maria Eliza Bocayúva Corrêa da Costa
viluges@gmail.com
orcid: 0000-0003-4841-7940

Resumo:
Esse trabalho faz parte de uma pesquisa de mestrado em andamento do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. O cálculo tem se mostrado uma disciplina em que os estudantes apresentam muitas dificuldades. Foi realizada uma sequência didática abordando o conceito de limite com estudantes da turma de Bacharelado em Física da Universidade Federal do Mato Grosso do Sul. O objetivo deste artigo é discutir brevemente sobre invariantes operatórios identificados na primeira sessão de atividades desenvolvidas. Para isso, nos baseamos na Teoria dos Campos Conceituais, proposta por Vergnaud, que define que os invariantes operatórios e outros conceitos que auxiliam os estudantes a estruturar as formas de organização dos esquemas mobilizados durante a resolução das atividades. Por meio da análise, concluímos que a proposta de primeira atividade da sequência didática, conjuntamente com a abordagem inicial da experimentação, permitiu a correta construção do conceito de distância entre dois números reais pelos estudantes e a mobilização de importantes invariantes operatórios para o favorecimento da compreensão da definição formal de Limite.

Palavras-chave: Educação Matemática; Cálculo; Limite de Função; Teoria dos Campos Conceituais; Invariantes Operatórios.

1. Introdução

Esse artigo faz parte de uma pesquisa de mestrado em andamento do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS) que consiste em analisar o processo de aprendizagem do conceito de limite de função por meio de uma sequência didática abordando sua definição formal.

Ao longo dos anos, o cálculo tem se mostrado ser uma disciplina em que os estudantes apresentam dificuldades na aprendizagem e é foco de estudo de muitos pesquisadores (Burigato, 2019; Zuchi, 2005; Carvalho, 2022). A definição formal de limite envolve diversos conceitos, a exemplo de números e funções reais, limites infinitos e no infinito, quantificadores, operações e propriedades de valor absoluto, a noção de distância, intervalos, todos estes conceitos descritos nas pesquisas como geradores de problemas de compreensão da definição formal de limite (Burigato e Rachidi, 2021; Doumbia, 2020).

Realizamos uma sequência didática abordando a definição formal de limite utilizando a noção de distância e, para este artigo, discutiremos a primeira atividade de uma sequência didática, desenvolvida para experimentação numa pesquisa de mestrado. Essa atividade foi a primeira aplicada em uma sessão com cinco atividades na turma de cálculo, no curso de Bacharelado em Física da UFMS, com oito estudantes.

Para a discussão desta primeira atividade, nos apoiamos na Teoria dos Campos Conceituais, proposta por Vergnaud (1985), o qual discute que, para os estudantes aprenderem determinado conceito, é necessário enfrentar um conjunto de situações e de outros conceitos, o que ele chama de campo conceitual. Nesse processo de aprendizagem, o aluno mobiliza invariantes operatórios que o auxiliará na estruturação das formas de organização dos esquemas escolhidos por ele para resolver a atividade. O objetivo deste artigo é discutir brevemente os invariantes operatórios identificados nesta primeira atividade da sequência didática aplicada. A pesquisa em andamento do primeiro autor pode contribuir para a compreensão das dificuldades dos alunos no cálculo e, além disso, discutir propostas para o ensino.

A seguir, apresentaremos conceitos da teoria dos campos conceituais. Em seguida, como foi elaborada a atividade da primeira sessão da sequência didática, os resultados e discussão e, por fim, as considerações finais sobre os invariantes operatórios identificados na aplicação da atividade.

2. Referencial teórico

A base teórica deste artigo é a Teoria dos Campos Conceituais, proposta por Vegnaud (1985). Essa teoria nos oferece uma lente para entender o desenvolvimento do conhecimento matemático pelos estudantes e, assim, identificar as abordagens de ensino mais eficazes para um determinado conceito. De acordo com Vergnaud (2009), um conceito é estruturado como uma terna composta por três conjuntos distintos:

> S conjunto de situações que dão sentido ao conceito.
> I conjunto de invariantes operatórios que estruturam as formas de organização da atividade (esquemas) suscetíveis de serem evocados por essas situações.
> L conjunto das representações linguísticas e simbólicas (algébricas, gráficas…) que permitem representar os conceitos e suas relações, e, consequentemente, as situações e os esquemas que elas evoca (Vergnaud, 2009, p. 27).

Para o estudante compreender um conceito, precisa lidar com as situações e outros conceitos que envolvem o conceito a ser compreendido. Esses dois termos, ou conjuntos, Vergnaud (2009) chama de campos conceituais:

> Um campo conceitual é ao mesmo tempo conjunto de situações e um conjunto de conceitos: o conjunto de situações cujo domínio progressivo pede uma variedade de conceitos, de esquemas e de representações simbólicas em estreita conexão; o conjunto de conceitos que contribuem com o domínio dessas situações (Vergnaud, 2009, p. 27).

Dessa forma, considerando que a aprendizagem de um conceito não se dá apenas pela memorização de sua definição formal, mas pela vivência e resolução de uma ampla variedade de situações que envolvem esse conceito (VERGNAUD, 1985), elaboramos uma sequência didática composta por atividades que exploram diferentes aspectos do campo conceitual da definição formal de limite, com foco na noção de distância, em que será apresentada a primeira atividade desta sequência, aplicada à turma de Física - Bacharelado da UFMS. O objetivo foi investigar os invariantes operatórios mobilizados pelos estudantes ao enfrentarem essas situações. A seguir, apresenta-se o percurso de desenvolvimento deste trabalho.

3. Metodologia

Desenvolvemos uma sequência didática abordando o conceito de limite de função utilizando a noção de distância e realizamos uma experimentação piloto com oito estudantes da disciplina de Cálculo I do curso de Bacharelado em Física da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. Neste artigo, discutiremos a primeira atividade da sequência didática, composta por quatro questionamentos:

1. *Considerando a definição de distância entre dois números reais, responda:*

a) *Como você faria a leitura da expressão |3-5|, explicando seu significado?*

b) *Como você faria a interpretação geométrica, numa reta numérica, do item a, considerando M o ponto de abscissa 3 e N o ponto de abscissa 5?*

c) *Considere novamente a reta numérica, graduada, e um ponto genérico de abscissa x nessa reta. De qual forma você expressaria a distância entre x e 3 na notação de módulo e faria a interpretação geométrica?*

d) *Considere agora que a distância entre x e 3 na reta numérica seja igual a 2 unidades. Como você expressaria essa situação em valor absoluto (ou módulo)?*

A resolução dos estudantes nas atividades propostas foi realizada em papel, com a utilização de canetas, sem fornecimento de lápis ou qualquer outro meio de registro em grafite, de modo que eventuais registros na folha considerados incorretos ou inadequados pelos estudantes, rasurados, também serviram como dados para análise.

Neste trabalho, discutiremos brevemente sobre a análise *a priori* e as escolhas que os alunos fazem no processo de resolução das atividades da sequência didática envolvendo o conceito de limite.

4. Resultados e discussão

Para proporмos a primeira atividade, primeiramente, realizamos uma abordagem inicial da noção de distância por meio de situações. Essas situações consistiam em questionamentos como, por exemplo, "qual a distância entre 1 e 0, depois entre -1 e 0, utilizando parâmetros numéricos específicos para calcular a distância entre um número real qualquer e 0, chegando à generalização de $|x|$ como a distância entre um número real qualquer e 0. Após essa breve abordagem, alteramos a situação, acrescentando questionamentos para cálculo da distância entre dois números quaisquer, ambos diferentes de zero, fazendo representações dessas distâncias, tanto de forma algébrica, quanto geométrica. Nesse momento, utilizamos o quadro e giz, para incentivá-los a fazer a construção dessas representações. Essas situações permitiram-nos chegar na definição de distância entre dois números reais: "A distância entre dois números reais x e y é a diferença entre o maior e o menor. Esta distância é denotada por $|x - y|$ ou $|y - x|$ e lê-se valor absoluto de x menos y." (Burigato, Mongeli e Rachidi, 2023, p. 101).

A partir desta definição de distância, apresentamos os questionamentos da primeira atividade, visto que a noção de distância está presente na definição formal de limite. Essas situações podem guiar os estudantes a interpretar a distância entre números reais, tanto algebricamente, quanto geometricamente, preparando-os para a construção da noção de distância com atividades cada vez exigindo conceitos mais diversificados dos alunos. Para esta primeira atividade, utilizamos valores numéricos específicos, bem como a visualização geométrica da distância, que consideramos como sendo variáveis microdidáticas, isto é, variáveis que estão vinculadas à organização local da metodologia de pesquisa, como em um problema específico ou em uma sessão de ensino. A seleção dessas variáveis contribui para o cumprimento dos objetivos de pesquisa, pois influencia e pode provocar mudanças nas estratégias que os alunos utilizam ao resolver problemas (Bittar, no prelo). Utilizamos os valores numéricos 3 e 5 nas situações para depois generalizarmos para qualquer ponto x, no eixo das abscissas, a fim de incutir no estudante a utilização da notação de distância com um parâmetro genérico, conforme se apresenta na definição formal de limite de função.

Dessa forma, o item *a)* diz o seguinte: *Como você faria a leitura da expressão |3-5|, explicando seu significado?* Espera-se que os estudantes interpretem |3-5| como a distância entre 3 e 5 na reta numérica, fazendo a leitura de |3-5| sendo o valor absoluto da diferença entre 3 e 5. Considerando a possibilidade dos estudantes apresentarem dúvidas na resolução, na análise a priori, foram elencados as seguintes perguntas a se fazerem a eles durante a mediação da atividade: "Como podemos determinar a distância entre dois pontos na reta numérica?", "Como você faz a leitura da distância de um número real qualquer até 0 na reta numérica?" ou "O valor da distância entre dois números reais qualquer pode ser um número negativo?". Esses questionamentos convidam os estudantes a mobilizar o seguinte teorema em ação: *Se queremos expressar a distância entre dois pontos em uma reta numérica, então podemos representá-la pelo valor absoluto da diferença entre esses pontos*.

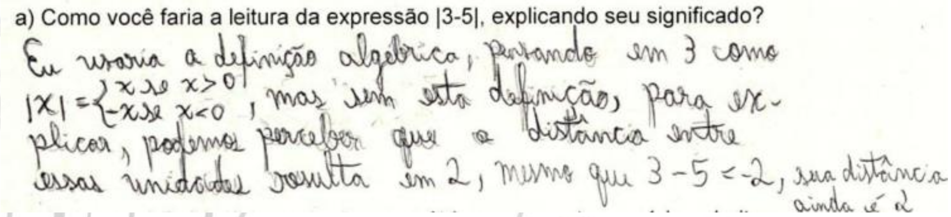
O item *b)* diz: *Como você faria a interpretação geométrica, numa reta numérica, do item a, considerando M o ponto de abscissa 3 e N o ponto de abscissa 5?* Esperamos que o estudante trace uma reta numérica graduada, marcando os pontos 3 e 5 nessa reta, explicitando a distância entre eles na forma de um segmento de reta. Esse item se relaciona diretamente com o item *a)*. Nesse momento, podemos questioná-los da seguinte maneira: "Se você imaginar a reta numérica, onde você colocaria os pontos 3 e 5? E de qual forma você representaria a distância entre eles geometricamente?".

No item *c)*: *Considere novamente a reta numérica, graduada, e um ponto genérico de abscissa x nessa reta. De qual forma você expressaria a distância entre x e 3 na notação de módulo e faria a interpretação geométrica?*, temos como objetivo que o estudante relacione a noção de distância entre dois números na reta numérica para um ponto genérico x e outro número real, que é $x = 3$, neste caso específico. É esperado que essa relação seja feita ao traçar a reta numérica com um ponto *x* qualquer demarcado e, em seguida, o ponto *3*, relacionando o segmento de reta entre *x* e *3* como a distância entre eles. Isso deve ser feito notando o fato de *x* estar à direita (maior do que *3*) ou à esquerda (menor do que *3*) para fazer a representação. Neste processo, o professor mediador pode questionar como o aluno poderia expressar a distância entre 3 e 5 usando valor absoluto, para um ponto genérico *x* e o número 3, instigando-os a utilizar o valor absoluto de forma genérica e o seguinte teorema em ação: *Se queremos calcular a distância entre dois números em uma reta numérica, então devemos usar o valor absoluto da diferença entre esses dois números*.

Por fim, no item *d)*: *Considere agora que a distância entre x e 3 na reta numérica seja igual a 2 unidades. Como você expressaria essa situação em valor absoluto (ou módulo)?*, espera-se que os alunos tracem a reta graduada e determinem o ponto *x*, genérico nessa reta. O aluno deve fazer a interpretação geométrica de distância entre dois pontos quaisquer. O estudante pode observar o segmento de reta que une 3 a x e expressar a medida desse segmento como $|x - 3|$ ou $|3 - x|$, verificando que o ponto x pode estar à esquerda ou à direita de 3, isto é, interpretando que x pode ser igual a 1 ou 5. Ou ainda, pode fazer a reta numérica, demarcando os pontos x e 3, mas identificando o ponto x apenas à direita ou à esquerda de x, sem maior atenção quanto às possibilidades de simetria em relação a 3 na reta numérica para a distância cuja medida é de 2 unidades. Neste último caso, o pesquisador pode fazer a mediação questionando aos estudantes: "Se a distância entre x e 3 é de 2 unidades, quais os valores que x pode assumir? Seriam quantos valores? Esses valores são iguais?" instigando o estudante a observar a simetria em torno de 3 para fazer a representação geométrica da situação.

A partir dessa breve análise a priori, partimos para a resolução feita por um aluno durante a experimentação. No item *a)*, ele respondeu da seguinte forma:

Figura 1: Resolução do item *a*.


a) Como você faria a leitura da expressão |3-5|, explicando seu significado?

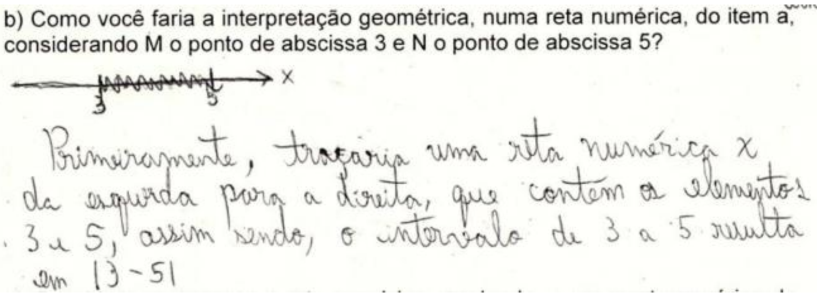
Eu usaria a definição algébrica, pensando em 3 como $|x| = \begin{cases} x \text{ se } x>0 \\ -x \text{ se } x<0 \end{cases}$, mas sem esta definição, para explicar, podemos perceber que a distância entre essas unidades resulta em 2, mesmo que $3-5=-2$, sua distância ainda é 2

Fonte: Elaboração pelos autores.

É possível observar que o estudante utilizou a definição de módulo para fazer a leitura da expressão $|3 - 5|$, apesar de, no dia da experimentação, durante a abordagem inicial da pesquisa, não ter sido comentada esta definição conjuntamente com os estudantes, mostrando a prevalência da técnica sobre a essência no ensino habitual de limites trazido pelas pesquisas, uma vez que não solicitada esta definição e o estudante não enunciar seu significado, reproduzindo o conhecimento adquirido durante as aulas de Cálculo na tentativa de acertar a resposta do item. No entanto, o estudante relacionou a notação de módulo para representar a distância entre 3 e 5 em 2 unidades, utilizando o valor absoluto para driblar o inconveniente valor negativo trazido na expressão $3 - 5$, conforme a definição de distância construída em sala de aula no dia da experimentação: "A distância entre dois números reais x e y é a diferença entre o maior e o menor. A notação desta distância denota-se por $|x - y|$ ou $|y - x|$."

No item *b)*, ele respondeu da seguinte maneira:

Figura 2: Resolução do item *b*.


b) Como você faria a interpretação geométrica, numa reta numérica, do item a, considerando M o ponto de abscissa 3 e N o ponto de abscissa 5?

x
3
5

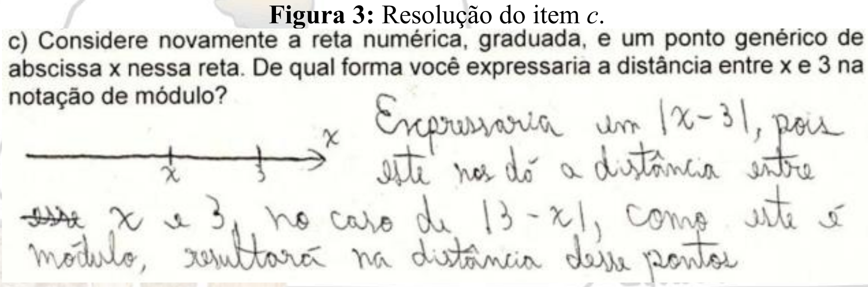
Primeiramente, traçaria uma reta numérica x da esquerda para a direita, que contém os elementos 3 e 5, assim sendo, o intervalo de 3 a 5 resulta em |3 - 5|

Fonte: Elaboração pelos autores.

O estudante traça uma reta graduada e explicita os valores 3 e 5 nesta reta, no entanto, hachura o segmento com extremidades nesses números para enunciar sua representação geométrica da expressão $|3 - 5|$. Esta resolução pode ter sido assim registrada na folha devido ao fato de, na abordagem inicial anterior à aplicação da sequência didática, terem sido feitas representações de inequações modulares e serem representados os conjuntos numéricos que satisfaziam as inequações na forma de intervalos numéricos na reta. Neste caso específico, o estudante faz esta associação com intervalo ao invés do comprimento do segmento que une os pontos 3 e 5, não se atentando ao fato de não estar sendo procurando um conjunto de valores e sim o comprimento do segmento que une 3 e 5. Para atingimento do objetivo da atividade, é possível um reforço na abordagem inicial quanto à interpretação geométrica da noção de distância quanto aos dois conceitos, tanto para equação modular, quanto para inequação modular.

No item *c)*, o aluno resolve da seguinte forma:

Figura 3: Resolução do item *c*.


c) Considere novamente a reta numérica, graduada, e um ponto genérico de abscissa x nessa reta. De qual forma você expressaria a distância entre x e 3 na notação de módulo?

x
x
3

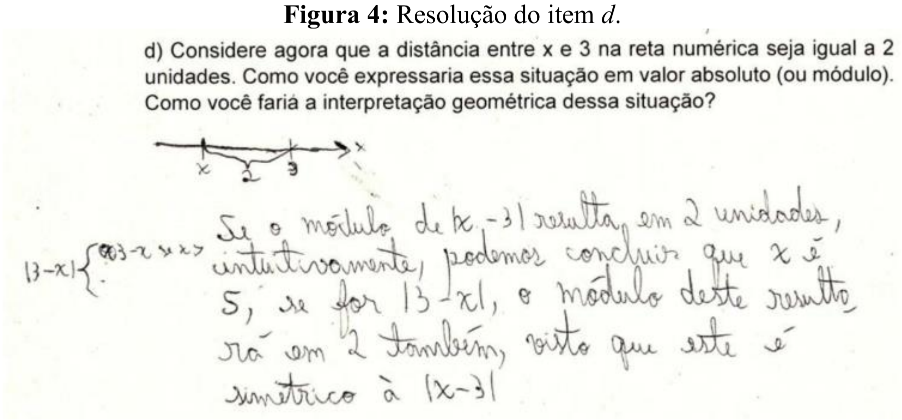
Expressaria em |x - 3|, pois este nos dá a distância entre ~~esse~~ x e 3, no caso de |3 - x|, como este é módulo, resultará na distância desse pontos

Fonte: Elaboração pelos autores.

Apesar de o estudante E_1 indicar um intervalo na resolução do item b para a distância entre 3 e 5, este não o faz no item c quando alterada a variável didática de um parâmetro numérico específico para a generalização do parâmetro. O estudante consegue fazer corretamente a associação de $|3 - x|$ como a distância entre x e 3 na reta numérica, apesar desta representação não ter sido solicitada no item. É possível observar que o estudante, mesmo não fazendo a representação geométrica de x à direita de 3, percebe esta possibilidade, uma vez que, em sua representação geométrica, $x - 3$ resultará em um valor negativo.

No item *d)*, o estudante responde assim:

Figura 4: Resolução do item *d*.



Fonte: Elaboração pelos autores.

É possível perceber a dificuldade constatada nas pesquisas quanto a manipulações com operações que envolvem valores absolutos, uma vez que o estudante tenta começar a resolução da atividade pela definição de módulo, no entanto, desiste de concluí-la e resolve atribuindo a esta variável o valor numérico 5, esquecendo-se da possibilidade de simetria em relação a 3, haja vista que 1 também é solução da equação $|3 - x| = 2$ ou $|x - 3| = 2$. Nota-se na interpretação geométrica realizada pelo estudante, a representação de x à esquerda de 3 na reta numérica, isto é, a interpretação do valor de x menor do que 3, destoando do resultado encontrado pelo estudante, maior do que 3 unidades, o que pode ter sido causado pelo enunciado, o qual explicitava isso em linguagem natural para o estudante (x à esquerda de 3). No entanto, percebe-se, mesmo que incompletamente, a relação que o estudante faz entre valor absoluto e distância, residindo a dificuldade na operação das propriedades deste conceito matemático.

Durante a abordagem inicial e a resolução dos itens propostos, notamos que os estudantes, de modo geral, conseguiram associar corretamente a ideia de distância à expressão em módulo e realizaram representações geométricas pertinentes, apesar de algumas dificuldades pontuais. Por exemplo, ao serem solicitados a interpretar a expressão $|3 - 5|$, os estudantes mobilizaram invariantes operatórios como: “Se queremos expressar a distância entre dois pontos em uma reta numérica, então podemos representá-la pelo valor absoluto da diferença entre esses pontos”. Também foi perceptível, especialmente no item c, o esforço dos estudantes em generalizar a situação ao utilizar x como ponto genérico, favorecendo a internalização da notação algébrica envolvida na definição formal de limite.

Quando os estudantes representam geometricamente e numericamente as distâncias solicitadas, é possível identificar a mobilização do teorema em ação “Se queremos calcular a distância entre dois números em uma reta numérica, então devemos usar o valor absoluto da diferença entre esses números”, isto é, os estudantes focam não apenas na representação simbólica da distância, mas também no cálculo dessa distância – ou seja, trata de como proceder para encontrar numericamente a distância entre dois números reais.

A manipulação algébrica e geométrica das expressões modulares revelou diferentes estratégias, e algumas dificuldades já identificadas na literatura, como apontado por Zuchi (2005) e Doumbia (2020), voltaram a emergir, principalmente no que se refere ao desenvolvimento das operações envolvendo valor absoluto e à simetria dos pontos em torno do ponto fixo considerado na reta numérica.

5. Considerações finais

Esta proposta de sequência didática revelou potencial para provocar nos estudantes mobilizações importantes relacionadas ao conceito de limite, especialmente ao privilegiar a noção de distância como eixo estruturante das atividades iniciais. O enfrentamento das situações propostas permitiu observar que os estudantes acionaram invariantes operatórios pertinentes para lidar com expressões modulares e suas interpretações geométricas, elemento essencial para a construção progressiva da definição formal de limite. As dificuldades identificadas, como a manipulação incompleta de inequações modulares e a compreensão parcial da simetria na reta numérica, confirmam a necessidade de abordagens mais cuidadosas e progressivas, como já indicado por Burigato (2019), Carvalho (2022) e Doumbia (2020).

A análise desenvolvida ao longo da aplicação da sequência didática evidencia aspectos fundamentais para reflexão sobre a construção progressiva da compreensão da definição formal de limite pelos estudantes. A sequência foi concebida com o propósito de priorizar a construção da noção de distância, considerada fundamental para o entendimento da definição formal, especialmente no que se refere à escrita e interpretação da expressão $|x - a|$ — elemento-chave que aparece sistematicamente na definição com $\epsilon - \delta$.

Nesta primeira atividade, ao lidarem com uma equação modular, os estudantes foram conduzidos a acionar conhecimentos relacionados à ideia de distância entre dois pontos na reta numérica. Esse enfrentamento inicial mobilizou o teorema em ação *"Se queremos expressar a distância entre dois pontos na reta numérica, então podemos representá-la pelo valor absoluto da diferença entre esses pontos"* e *"Se queremos calcular a distância entre dois números em uma reta numérica, então devemos usar o valor absoluto da diferença entre esses números"*. Estes teoremas em ação carregam, de forma imbricada, o conceito em ação de distância como módulo da diferença entre dois números reais. Sua mobilização, portanto, sustentou toda a trajetória no enfrentamento do participante, servindo de alicerce para as atividades seguintes.

Como perspectiva futura, pretende-se ampliar a análise para as atividades subsequentes da sequência didática, aprofundando a identificação e modelização dos invariantes operatórios mobilizados por estudantes no enfrentamento das situações.

Referências

ABREU, O. H. Discutindo algumas relações possíveis entre intuição e rigor e entre imagem conceitual e definição conceitual no ensino de limites e continuidade em Cálculo I. 2011. Disponível em: https://www.repositorio.ufop.br/handle/123456789/2449. Acesso em: 28 abr. 2025.

BITTAR, M. Contribuições da teoria das situações didáticas e da engenharia didática para discutir o ensino de Matemática. No prelo.

BURIGATO, S. M. M. S.; RACHIDI, M. Uma proposta para introdução do conceito de limite de funções reais. 2021. Disponível em: http://funes.uniandes.edu.co/24067/. Acesso em: 28 abr. 2025.

BURIGATO, S. M. M. S.; RACHIDI, M.; MONGELI, M. C. J. G. Conceitos básicos para a introdução ao Cálculo Diferencial e Integral. 2023. Disponível em: https://repositorio.ufms.br/bitstream/123456789/6092/1/CONCEITOS_B%C3%81SICOS_PARA_INTRODU%C3%87%C3%83O_AO_CALCULO.pdf. Acesso em: 28 abr. 2025.

CARVALHO, O. A. A noção de limite: um estudo da organização didática de um percurso formativo digital. 2022. Disponível em: https://repositorio.ufba.br/handle/ri/35485. Acesso em: 28 abr. 2025.

DOUMBIA, C. O. Um modelo didático de referência para a construção e a atualização do conhecimento sobre a noção de limite no Mali. 2020. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2020. Disponível em: https://repositorio.ufba.br/bitstream/ri/31999/1/Tese%20completa%20com%20ficha%20catalografica%20Cheick%20Oumar%20Doumbia%202020.pdf. Acesso em: 28 abr. 2025.

VERGNAUD, G. O que é aprender? In: BITTAR, M.; MUNIZ, C. A. (org.). Aprendizagem matemática na perspectiva da teoria dos campos conceituais. Curitiba: CRV, 2009. p. 11-32.

VERGNAUD, G. Concepts et schèmes dans une théorie opératoire de la répresentation. Psychologie Française, Paris, v. 30, p. 245-252, 1985.

ZUCHI, I. A abordagem do conceito de limite via sequência didática: do ambiente lápis papel ao ambiente computacional. 2005. Disponível em: http://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/102893. Acesso em: 28 abr. 2025.