UM ESTUDO DE INTERAÇÃO ENTRE DOMÍNIOS NA VALIDAÇÃO DE IGUALDADES ENTRE EXPRESSÕES ALGÉBRICAS

Adriano da Fonseca Melo - UFMS

José Luiz Magalhães de Freitas – UFMS

RESUMO: O presente trabalho tem por objetivo investigar aprendizagens no trabalho com expressões algébricas, por meio dos procedimentos que fazem uso de validações utilizando o domínio aritmético e geométrico com alunos do 9º ano do Ensino Fundamental. Será utilizado como referencial teórico a Teoria das Situações Didáticas de Brousseau, para estudar as relações aluno-saber nas fases de ação, formulação e validação de estratégias utilizadas diante das atividades a eles propostas. Também serão investigadas as validações feitas pelos alunos por meio de mudanças de domínios, no sentido de Douady, em particular as interações de domínios e possíveis aprendizagens que delas poderão resultar. A análise das fases de validação será feita com base nos estudos feitos por Margolinas. Para coleta de dados será utilizada a engenharia didática, proposta por Artigue, a qual será constituída da elaboração e aplicação de uma seqüência didática, que pressupõe estudos prévios com o intuito de aprofundar o conhecimento sobre o tema, bem como de aspectos prescritivos e descritivos de ocorrências durante o desenvolvimento da pesquisa. Os resultados de estudos preliminares e da pré-experimentação apontam a existência de uma certa dificuldade dos alunos a realizarem esta interação entre o domínio aritmético – geométrico, algébrico – geométrico e aritmético – algébrico, sendo que nesta última interação os alunos encontram mais dificuldades por não perceberem algumas propriedades numéricas necessárias para resolverem as expressões algébricas. Além disso, alguns alunos tiveram dificuldade para diferenciar área de perímetro, o que dificultou para eles iniciar a atividade, e outros a dificuldade foi por não terem provavelmente lido o enunciado da atividade com atenção o que se resolveu após breve diálogo com os colegas.

PALAVRAS-CHAVE: Expressões Algébricas. Interação de Domínio. Validação. Ensino Fundamental.

CONSIDERAÇÕES INICIAIS

No PNLD (2007) há sugestões de que nos livros didáticos haja a articulação entre o campo algébrico com o aritmético e o algébrico com o geométrico, resultando em uma melhor aprendizagem dos conteúdos pelos alunos. Entretanto, a análise feita para o PNLD apontou que o uso de atividades explorando mais de um domínio matemático é um recurso pouco explorado por alguns livros didáticos.

Ainda, no PCN (1998) há a defesa de que o ensino da matemática parta de situações didáticas, nas quais o aluno seja levado a assumir como sua, a situação proposta e também que a formulação destas situações deva levar em consideração as interações entre os diferentes domínios. Segundo o PCN (1998, p. 37) *O significado da atividade matemática para o aluno também resulta das conexões que ele estabelece entre os diferentes temas matemáticos e entre estes e as demais áreas do conhecimento e as situações do cotidiano.*

Segundo Brousseau (2008) ao assumir a responsabilidade pela situação proposta, o faz buscar uma solução satisfatória para a situação. A busca pela solução requer que ele recorra a conhecimentos necessários para elaborar estratégias que permitam alcançar seus objetivos.

Para este autor, a aprendizagem de um novo conhecimento deverá ocorrer se os conhecimentos apresentados pelo aluno não forem suficientes para resolver a situação, pois isso impulsionará o aluno a buscar novos conhecimentos para resolver a situação proposta pelo professor. Ainda, de acordo com Brousseau (1986) o professor para propor um problema na forma de situação didática precisa estar certo de que o aluno possui um conhecimento de base que lhe permita iniciar a resolução, entretanto este conhecimento precisa ser insuficiente para o aluno encontrar a solução da situação proposta.

Com o intuito de compreender *como o trabalho com mudança de domínio pode favorecer a aprendizagem das igualdades algébricas utilizando os conceitos aritméticos e geométricos para a validação dos resultados* é que realizamos a presente pesquisa com alunos do 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola municipal da rede de ensino de Campo Grande-MS. O objetivo desta pesquisa é investigar aprendizagens no trabalho com expressões algébricas por meio dos procedimentos que fazem uso de validações utilizando o domínio aritmético e geométrico, com os esses alunos do 9º ano do Ensino Fundamental.

Para tanto, será utilizado como referencial teórico a Teoria das Situações Didáticas (Brousseau), complementada pela análise de validações (Margolinas) nas produções de alunos, por meio da interação de domínios (Douady) e da Engenharia Didática (Artigue) como referencial metodológico. Apresentamos a seguir um resumo dessas teorias.

TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS

Entendemos situação didática como sendo um modelo de interação de um sujeito com um meio específico, o qual determina um dado conhecimento, bem como o recurso que o sujeito dispõe para restabelecer o equilíbrio entre ele e o meio no qual está inserido. Algumas situações requerem a utilização de conhecimentos e esquemas anteriores, porém há outras que, segundo Brousseau (2008) possibilitam a construção de novos conhecimentos, dentro de um processo de gênese artificial.

Brousseau, nas décadas de 70 e 80, desenvolveu pesquisas que o levaram a elaborar uma teoria sobre as situações didáticas, na qual propõe uma forma de trabalhar o ensino da matemática, diferente da prática formalista desenvolvida no ensino fundamental. A proposta de Brousseau leva em consideração o meio em torno do aluno, e sua retroação à ação do aluno, como um protagonista no processo de aprendizagem. Brousseau classificou o agir do aluno, no processo de aprendizagem, em três dialéticas que ocorrem simultaneamente, como reescritas a seguir.

A primeira dialética é a de ***ação***, em que o aluno elabora estratégias a partir da observação do "jogo"[2] ao qual está inserido. A situação de ação deve possibilitar ao aluno julgar o resultado de sua ação e caso seja necessário ajustá-lo, sem a participação do professor, ela provoca uma aprendizagem por adaptação.

A segunda dialética é a de ***formulação***, em que o aluno procurará, progressivamente, desenvolver uma linguagem que seja compreensível por todos e para tanto utilizará de sinais e regras comuns, conhecidas ou novas. Assim, para Brousseau (2008):

> [...] a formulação de um conhecimento corresponderia a uma capacidade do sujeito de retomá-lo (reconhecê-lo, identificá-lo, decompô-lo e reconstruí-lo em um sistema lingüístico). O meio que exigirá do sujeito o uso de uma formulação deve, então envolver um outro sujeito, a quem o primeiro deverá comunicar uma informação. (BROUSSEAU, 2008, p. 29).

A terceira dialética é a de ***validação***, na qual o aluno explicita a validade do modelo criado por ele. O aluno deixa de ser um informante para ser um proponente de sua idéia a um oponente, que poderá solicitar que demonstre ou detalhe melhor sua estratégia. Conforme Brousseau (2008):

> [...] o emissor já não é um informante, mas um proponente, e o receptor, um oponente. Pressupõe-se que possuam as mesmas informações necessárias para lidar com uma questão. Colaboram na busca da verdade, ou seja, no esforço de vincular de forma segura um conhecimento a um campo de saberes já consolidados, mas entram em confronto quando há dúvidas. [...] Cada qual pode posicionar-se em relação a um enunciado e, havendo desacordo, pedir uma demonstração ou exigir que o outro aplique suas declarações na interação com o meio. (BROUSSEAU, 2008, p. 30).

Na situação didática cabe ao professor, ao final dos debates nas duplas ou nos grupos, chamar a turma para a socialização e assim institucionalizar o conhecimento produzido pelos alunos, ou aproximando do saber já institucionalizado pela academia. Vale ressaltar que, inicialmente, Brousseau não tinha pensado no papel do professor para o fechamento dos trabalhos de sala de aula. Porém, as experiências desenvolvidas demonstraram que faltava esta fala do professor para aproximar as produções da sala dos conhecimentos de outras criações (culturais ou do programa) e indicar quais poderiam ser reutilizados.

INTERAÇÃO DE DOMÍNIO

O outro referencial a ser utilizado nesta pesquisa é o das interações de domínios da Matemática. Douady (1986) propõe que o professor ao elaborar uma situação problema pode criar situações, as quais os alunos são conduzidos a trabalharem com diferentes domínios

[2] Jogo nesse contexto é entendido como sendo uma situação didática a qual o aluno assumiu a responsabilidade de resolver.

matemáticos. Douady (1986, p. 389) caracteriza um domínio como: *um domínio é constituído de ferramentas de uma parte da matemática, de relações entre os objetos, suas formulações eventualmente diferentes e de imagens mentais associadas a essas ferramentas e relações.*

Mudança de domínio é um meio dos alunos obterem diferentes formulações de um problema sem que sejam necessariamente equivalentes, permitindo um novo acesso às dificuldades encontradas e o desenvolvimento de ferramentas e técnicas que não surgem nas primeiras formulações.

A interação entre domínios conduz freqüentemente a resultados não conhecidos, à técnicas novas, à criação de objetos matemáticos novos. O uso desta concepção na pesquisa está relacionado com o intuito dos alunos, ao realizarem as interações de domínios, que eles possam validar as suas resoluções no campo algébrico e aritmético.

Acreditamos que mudança de domínio pode levá-lo a estabelecer correspondências entre os diferentes domínios e de seus objetos e a validar identidades. A situação é fonte de desequilíbrio e permite a estruturação dos conhecimentos. A comunicação entre domínios e em especial a comunicação com um domínio auxiliar de representação é um fator de reequilibração. As interações entre domínios permitem fazer progredir o conhecimento em cada um deles.

Para Brousseau (2008) o objetivo principal dos desequilíbrios é de construir um meio favorável a aprendizagem de objetos matemáticos, utilizando as situações didáticas como meio de construção de conhecimentos. Sendo assim, é necessária a participação do aluno de forma atuante na sua aprendizagem e que o professor permita, incentive e promova situações em que o aluno atue nos jogos ou na resolução de problemas, utilizando para tanto seus conhecimentos anteriores do aluno.

A PESQUISA

Há uma defesa nos PCN de Matemática de que o trabalho com os conceitos algébricos deveria ser desenvolvido a partir da observação de regularidades relações, ao invés de desenvolver o estudo dos conceitos algébricos apenas enfatizando as manipulações de expressões e equações de forma mecânica. Eles consideram ainda, que o estudo da álgebra é um campo fértil para que o aluno desenvolva e exercite sua capacidade de abstração e generalização, além de possibilitar a aquisição de uma poderosa ferramenta para resolver problemas.

Booth (1988) no artigo “dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra” parte do estudo desenvolvido na década de 80 para o NCTM, aponta a álgebra como fonte de confusão e atitudes negativas e uma das razões pode estar no fato de os alunos acharem provavelmente o conteúdo de álgebra difícil. Todavia Booth percebeu que o tempo de estudo não representa maior aprendizagem, ao comparar os erros cometidos pelos alunos, independente de anos de estudo do conteúdo algébrico, ficou evidente algumas semelhanças, as quais podem estar ligadas as idéias dos alunos sobre aspectos como: o foco da atividade algébrica e a natureza das "respostas"; o uso da notação e da convenção em álgebra; o significado das letras e das variáveis; os tipos de relações e métodos usados em aritmética.

Se considerarmos o aspecto uso de letras, perceberemos que há uma tendência de evitar a distinção "nome-objeto" e pensar numa variável simplesmente como um símbolo pelo qual se podem substituir coisas, para Usiskin (1988) essa concepção de variável como "símbolo que representa indistintamente os elementos de um conjunto" é tão natural hoje que não é questionado. Contudo, não é o único ponto de vista a ser considerado em relação a variáveis. No início do século XX, a matemática formalista considerava as variáveis e todos os outros símbolos matemáticos como meros sinais no papel, relacionados entre si por propriedades assumidas ou deduzidas, que por sua vez não passam de sinais no papel.

Assim, neste artigo apresentamos uma sessão da pré-experimentação contendo uma atividade com sua respectiva análise a priori. No item I, o objetivo é verificar o domínio dos alunos ao

FICHA DE ATIVIDADE – 1ª SESSÃO

1- Leia as questões abaixo e responda:

I. Determine o valor de cada expressão e a seguir represente as mesmas utilizando retângulos e quadrados e suas respectivas expressões perímetro:

1) $10+4+5+4+10+5 =$

2) $x + y + 5 + y + x + 5=$

3) $8 + 3 + 7 + 3 \ + 8 + 7 =$

4) $2x + y + 7 + y + 2y + 7=$

5) Sendo $x = 10$ e $y = 5$ qual seria o valor numérico de cada expressão?

trabalhar com o conceito de perímetro e sua respectiva representação geométrica, como veremos a seguir:

Para esta atividade espera-se como resposta dos alunos:

1) 10 + 4 = 14 5 + 4 = 9 10 + 5 = 15 14 + 9 + 15= 38 Ou 10 + 4 + 5 + 4=23 10 + 5 = 15 23 + 15 = 38	2) x + y 5 + y x + 5 x+y+ 5+y + x+5= 2x + 2y + 10 2x + 2 y + 5 + 5 = 2x + 2y + 10
3) 8 + 3 = 11 7 + 3 = 10 8 + 7 = 15 11 + 10 + 15= 36 Ou 8 + 3 + 7 + 3 =21 8 + 7 = 15 21 + 15 = 36	4) 2x + y 7 + y 2x + 7 2x + y + 7 + y + 2x + 7= 4x + 2y + 14 4x + 2y + 7 + 7 = 4x + 2y + 14
II. 2) x + y + 5 + y + x + 5= 10 + 5 + 5 + 5 + 10 + 5= 10 + 5 = 15 5 + 5 = 10 10 + 5 = 15 15 + 10 + 15= 36	II. 4) 2x + y + 7 + y + 2x + 7= 2*10 + 5 + 7 + 5 + 2* 10 + 7= 2*10 + 5 = 25 7 + 5 = 12 2*10 + 7 = 27 25 + 12 + 27= 64

Os alunos poderão confundir o processo para calcular área com o de perímetro. Teles (2007) alerta para esta dificuldade dos alunos em atividades que precisam determinar o cálculo do perímetro e da área, isto é, em vez de realizar a soma dos lados para determinar o perímetro multiplicam as medidas e apresentam a resposta.

Outro aspecto foi apontado por Cárdia (2007) que se trata da dificuldade dos alunos associarem a expressão aritmética ou algébrica com a representação geométrica. O item 4 poderá configurar o de maior dificuldade para os alunos representarem, considerando que “2y” corresponde a dois segmentos de medida y.

Outro aspecto a ser considerado é com relação à leitura e interpretação do enunciado, segundo Cárdia (2007) os alunos podem errar por falta de atenção à leitura e no uso do vocabulário matemático.

Para Bonadiman (2007) os alunos poderão apresentar como resposta no subitem 2 (x + y + 10) e no subitem 4 (2x + y +12), segundo Bonadiman o aluno apresentará esta resposta porque ao somar “coisas” as quais não sabe o valor resulta em algo que não sabe o valor. Com relação ao item 5, poderá o aluno substituir as letras e realizar a soma somente dos valores substituídos, segundo Bonadiman, o aluno realizará este procedimento por acreditar que bastava substituir a letra e realizar as respectivas operações que ficaram determinadas.

O item II, cujo objetivo é verificar o domínio que os alunos têm ao trabalhar com o conceito de área e sua respectiva representação geométrica, a qual passaremos a descrever:

II. Em cada item abaixo, encontre uma expressão e a seguir represente as mesmas utilizando retângulos e quadrados e suas respectivas expressões para área:

1) (x + 4).5=

2) (10 + 4) . 5=

3) (2x + 3) . 7=

4) (8 + 3) .7=

5) **Sendo x = 10 e y = 5 qual seria o valor numérico de cada expressão?**

Para esta segunda atividade espera-se como resposta dos alunos:

Os alunos poderão utilizar a soma dos termos dentro dos parênteses. A decisão de escrever as expressões utilizando os parênteses para indicar as operações têm o intuito de reduzir às variáveis as quais poderão significar dificuldades para os alunos. Booth (1998) apontou que os alunos não utilizam os parênteses para evidenciar prioridade de operações no momento que é necessário resolverem determina expressão dada e no caso deverão indicar o modo de resolver e o resultado.

Booth (1998) apontou um entrave em relação ao uso do sinal de “=” e do sinal de “+” na aritmética os alunos associam o “=” ao verbo dar com sentido de resultado, ou seja, 3 +6 = 9

1) (x + 4).5= 5.x + 4. 5 = 5x + 20	2) (10 + 4) . 5= 14x5 = 70 ou 10x5 +4x5 = 70
3) x.(x+4) = x. x + x . 4 = x^2 + 4x	4) 10.(10+4) = 10 x 14 = 140 ou 10 x 10 + 10x4 = 140
5) (x + 4).5= (10 +4) * 5= 10* 5 + 4 *5 = 50 + 20 = 70 ou 14 *5 = 70	x.(x+4) = 10 * (10 + 4)= 10*10 + 10 * 4= 100+ 40 = 140 ou 14 *10 = 140

(três mais 6 dá 9), ainda se está ocorrendo uma soma deverá ter um resultado único, não percebendo que a escrita algébrica $x^2 + 4x$, por exemplo, representa um resultado da operação algébrica.

Análise da Atividade 1

Os alunos individualmente receberam a ficha correspondente a atividade 1 e tiveram um tempo de 30 minutos para se familiarizarem com a atividade e esboçarem as primeiras resoluções. Durante este período de tempo observou que os mesmos tinham certa dúvida entre perímetro e área, conforme pode ser observado nesta fala de dois alunos, reescritas a seguir:

- *(aluno A): Qual é a diferença de área e perímetro?*
- *(aluno B): Perímetro é soma e área é produto*
- *(aluno A): Tudo bem mais o que fazemos?*
- *(Aluno B): Não sei, não entendi o que ele quer.*

Como esta dúvida era recorrente na turma foi aberto um debate, no qual cada aluno falou um pouco sobre o que é perímetro e o que é área. Este debate possibilitou que todos falassem até que ocorreu o consenso sobre a melhor definição para perímetro e área.

Outra dificuldade dos alunos foi lerem e compreenderem o enunciado da atividade, tanto é que alguns alunos não resolveram o item I por completo, isto é, não perceberam que solicitava para representar as expressões dadas na forma de retângulos, provavelmente, os alunos não estavam acostumados com enunciados longos, nos quais se solicitam várias informações.

Conforme Bonadiman, em sua pesquisa, aponta que muitos alunos tiveram dificuldade para fazer cálculo envolvendo letras, tanto que alguns preferiram substituir o valor da letra pelo valor atribuído no item 5 (figura 1).

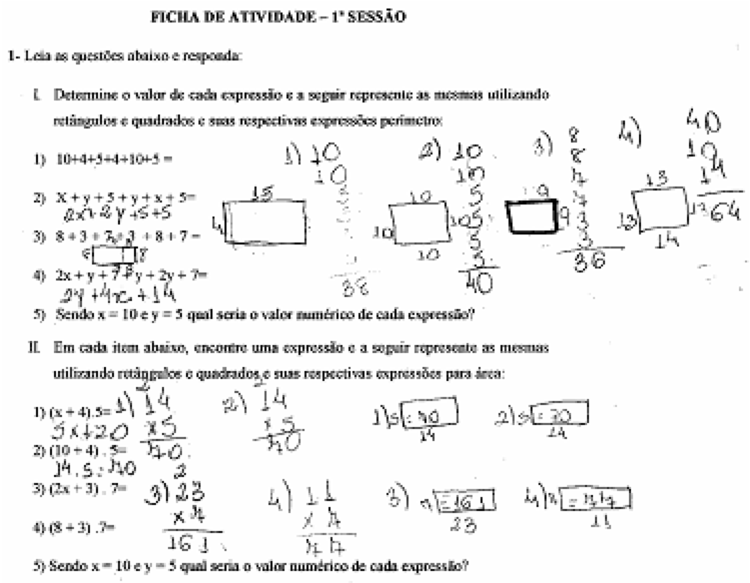

Figura 2

Os alunos que tentaram resolver utilizando letra, cometeram o erro de somar a letra com o número, como no caso do item (x + 4) * 5 em que alguns alunos fizeram 4x*5 igual a 20x ou no caso do item x + y + 5 + y + x + 5 em que alguns alunos fizeram a soma total 14 (figura 2)

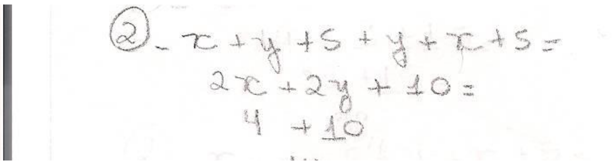

Figura 3

Os alunos, ao serem questionados sobre o procedimento de cálculo adotado, informaram que era necessário somar tudo para encontrar o valor de x e y. O diálogo abaixo representa este pensamento.

- *(Aluno C): Porque você somou x com y?*
- *(Aluno D): Como vou calcular o valor de x e y se não somar?*
- *(Aluno C): x e y podem ser dois números diferentes?*
- *(Aluno D: não sei.*

Após os 30 minutos iniciais foi solicitado aos alunos que sentassem em dupla para compararem suas resoluções e caso houvesse divergência de resultado argumentassem entre seus pares para validarem ou não suas resoluções. Neste momento ocorreu uma grande movimentação na sala de aula em virtude das análises dos resultados, o que inicialmente deixou a professora da turma um pouco preocupada, mas como tinha solicitado que ficasse como uma observadora ajudando a registrar os diálogos, ela não interveio nas discussões.

A professora também fora orientada, caso os alunos solicitassem que ela dissesse se estava certo ou errado que deveria abster-se da resposta, mas sim devolver a pergunta ao colega do aluno que perguntou.

No trabalho em dupla, muitas questões foram levantadas como podemos ver no diálogo que se segue:

- (Aluno E); Porque o seu retângulo é diferente do seu quadrado se x e y é igual para todo mundo?
- (Aluno F): Porque o quadrado tem todos os lados iguais e o retângulo não.
- (Aluno E): Há ..., mas e daí??

Neste momento esta dupla ficou em silêncio pensando um pouco sobre a resolução de cada um e como prosseguir no trabalho.

Como muitas questões tinham surgido durante o trabalho em dupla foram utilizados os 30 minutos finais da sessão para sistematização das atividades no quadro. O pesquisador iniciou escrevendo a primeira expressão no quadro e solicitou que alguns alunos falassem como representá-la utilizando retângulo. Conforme podemos observar na figura 3[3], a maioria dos alunos não percebeu que poderiam representar as expressões como o perímetro de uma figura que é a justaposição de dois retângulos.

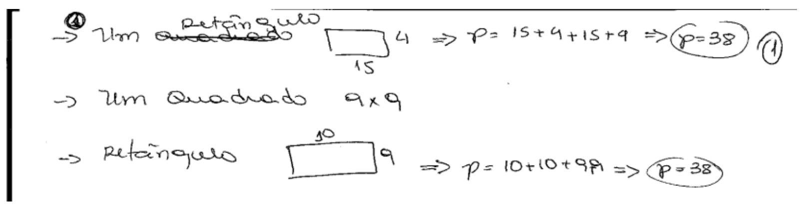

Figura 4

Este tipo de resolução foi um consenso entre os alunos sem que, em momento algum, ocorresse a interferência da professora ou do pesquisador nas respostas e neste momento toda a turma concordou com a resolução.

Nota-se que uma das soluções possíveis foi o quadrado 9 por 9 como representação geométrica da expressão 10 + 4 + 5 + 4 + 10 + 5. Obtiveram estas representações dividindo o resultado por 4. Entretanto, quando questionados pelo pesquisador se todas as figuras tinham o mesmo perímetro, a turma percebeu que o quadrado 9 por 9 não possuía o mesmo perímetro e então pediram que o apagasse.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pré-experimentação, por representar a primeira atividade em que os alunos eram incentivados a resolver exercícios no domínio aritmético ou algébrico e utilizar a representação geométrica para representarem suas resoluções, e, também por ser um tipo de atividade pouco explorada pelos livros didáticos, mostrou que os alunos apresentam dificuldades, tanto para compreendê-las como para solucioná-las.

Os trabalhos já realizados em outras pesquisas sobre esse tema, utilizando a teoria das situações didáticas e interação de domínio, nortearam a elaboração das atividades, bem como as análises preliminares e a priori. A análise preliminar possibilitou identificar algumas das possíveis concepções dos alunos e professores com relação ao tema expressões algébricas e suas representações.

A análise a priori permitiu levantar algumas dificuldades que os alunos podem encontrar em relação a esse tipo de atividade. Esta atividade permitiu elaborar algumas

[3] Os registros foram realizados pela professora da turma que observou tudo a pedido do pesquisador.

indagações que poderiam ajudar os alunos a superarem as dificuldades. Segundo Brousseau, o professor como mediador da aprendizagem precisa utilizar uma postura maiêutica para responder as perguntas dos alunos. A pré-experimentação nos mostrou que essa postura cria um certo desconforto para o aluno. Entretanto, acreditamos que isso faça com que ele pense mais sobre suas respostas e assim caminhe para a superação das dificuldades.

Percebeu-se, durante a pré-experimentação, que alguns alunos ainda confundem os conceitos de área e perímetro, o que pode ter dificultado no momento de representar geometricamente as figuras cujas áreas ou perímetros correspondessem às expressões dadas.

Outro ponto a ser melhor estudado é em relação à propriedade distributiva, pois nas falas dos alunos não aparece indicação de terem aplicado essa propriedade. Isso somente ocorreu quando das indagações do pesquisador, o que levou alguns a pensar no retângulo como a representação de dois retângulos justapostos e aí, calculando a área de cada retângulo e realizando a soma, chegaram à expressão de que representa a área de uma figura retangular com lados medindo x + 4 e 5.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARTIGUE, M et al, **Ingeniería didáctica en educación matemática,** México: Grupo editorial Iberoamérica, 1995.

BOOTH, L. R., **Dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra. In.** COXFORD, A. e SHULTE, A. O (Org.), **As idéias da álgebra,** trad. DOMINGUES, H. H., São Paulo: Atual, 1995.

BROUSSEAU,G.. **Fondaments et methodes de la didactique des Mathematiques.** Recherches de Didactique de Mathématiques. Vol. 7, Nº 2. pp 33-115. Grenoble : La Pensée Sauvage, 1986.

BROUSSEAU, G., **Os diferentes papéis do professor**, **in.** PARRA, C. & SAIZ, I (Org.)., **Didática da Matemática: reflexões psicopedagógicas**, trad. LLORNS, J.A., Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

BROUSSEAU, G. **Introdução ao estudo da teoria das situações didáticas: conteúdos e métodos de ensino**, trad. BOGÉA, C., São Paulo: Ática, 2008.

CARDIA, L. S. F., **Integrando a geometria com a álgebra na construção de expressões algébricas,** São Paulo: dissertação de mestrado defendida na PUC, 2007.

DOUADY, R.. **La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento.**, **in.** GÓMEZ, P., **Ingenierie didáctica en educación matemática.** Bogotá: Iberoamérica, 1995.

____________. **Jeux Cadre et dialectiques outil-objet. Recherche en Didáctique des Mathématiques.** Grenoble: La Penseé Sauvage-Éditions, v. 7.2, p. 5-31. Ano 1986.

FREITAS, J. L. M. de. **Teoria das situações didáticas. In.** MACHADO, S. D. A.(Org.), **Educação Matemática: uma (nova) introdução.** São Paulo: Educ. 2008.
MARGOLINAS, C.. **De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques**. Grenoble-França: La Pensée Sauvage, 1993.
TELES, R. A. de M. **Imbricações entre campos conceituais na matemática escolar: um estudo sobre as fórmulas de área de figuras geométricas plans.** Recife: Tese de doutorado defendida na Universidade Federal de Pernambuco no programa de pós – graduação em Educação, 2007.
USISKIN, Z. **Concepções sobre a álgebra da escola média e utilização das variáveis. In.** COXFORD, A. e SHULTE, A. O. (Org.), **As idéias da algebra,** trad. DOMINGUES, H. H., São Paulo: Atual, 1995.