INVESTIGAÇÃO E APRENDIZAGEM ENVOLVENDO PRODUÇÕES DE ALUNOS DO ENSINO MÉDIO DIANTE DE CONJECTURAS NO CONJUNTO DOS NÚMEROS INTEIROS

Anete Valéria Masson Coimbra de Lima - UFMS

José Luiz Magalhães Freitas - UFMS

RESUMO: Neste artigo fazemos um estudo sobre produção de provas, visando não apenas a identificar tipos e níveis de validações produzidos por alunos, mas também investigar possibilidades de aprendizagem, tanto no que concerne ao uso da linguagem matemática quanto ao de generalidade envolvidas na produção de níveis mais elevados de provas. São estudadas descobertas, formulações e validações, linguagem matemática utilizada, bem como tipos e níveis de provas que os alunos produzem. Para a coleta de dados utilizamos a Engenharia Didática, instituída por Artigue, a qual utilizamos tanto para identificar tipos e níveis de provas que eles produzem, bem como para investigar aprendizagens observadas na resolução problemas envolvendo conjecturas no conjunto dos números inteiros. Nós nos interrogamos sobre as validações ocorridas durante o desenvolvimento das atividades da sequência didática. A partir da análise de produções de alunos, durante as sessões realizadas em sala de aula, foi possível identificar algumas provas da tipologia de proposta por Balacheff, bem como outras encontradas no trabalho de Freitas. Nas produções dos alunos, analisadas até o momento, foram observados indícios de aprendizagem, tanto no que se refere ao domínio da linguagem quanto aos níveis de provas que os alunos produzem.

PALAVRAS-CHAVE: Educação Matemática. Ensino Médio. Validação Algébrica.

1. Introdução

Tendências atuais em Educação Matemática apontam para a necessidade de ir além do domínio da técnica, ou seja, não basta tomar uma fórmula e aplicá-la, é igualmente importante entender sua origem e por que a mesma é verdadeira.

Em nosso levantamento bibliográfico, percebemos por que a construção de provas pelos alunos é um assunto que causa angústia em alguns pesquisadores brasileiros. Destacamos Pietropaolo (2005), que apresenta em sua tese a existência de muitas pesquisas, envolvendo provas na Educação Básica. Esse pesquisador identificou a presença do senso comum entre os professores de Matemática entrevistados, no qual a prova é vista como "conteúdo" e como recurso pedagógico bastante rico em sala de aula, mas desde que se admita um sentido maior para essa palavra e não a simples reprodução – pelo aluno e professor – das provas presentes nos livros, mas sim o "fazer matemática" em sala de aula, envolvendo assim experimentações, conjecturas e argumentações.

Encontramos também, na dissertação de Leandro (2006), o estudo diagnóstico das validações realizadas por alunos do Ensino Médio de uma escola localizada em São Paulo, no qual ele se apoiou na *Tipologia de Provas de Ballacheff (1988)*, que é resultado de sua tese de doutorado. O pesquisador aponta as dificuldades dos alunos ao construírem e elaborarem provas matemáticas, desde as mais empíricas até as mais formais. Em seu trabalho, ao analisar uma classe particular de problemas, ele identifica a existência de diferentes tipos e níveis de prova em Matemática.

Healy e Hoyles (2000) realizaram um estudo sobre concepção de provas matemáticas produzidas por alunos ingleses com idades entre 14 e 15 anos. Constataram que o empirismo é muito forte e que os alunos possuem muitas dificuldades na elaboração de provas mais formais. Como resultado, chegou-se à conclusão de que tais dificuldades não se devem somente à competência dos alunos, mas também a fatores curriculares, pois as demonstrações matemáticas são pouco trabalhadas em sala de aula. Os questionários elaborados por esses pesquisadores já foram adaptados e utilizados em vários países.

Há vários estudos dedicados à passagem da Aritmética para a Álgebra. Essa passagem tem se mostrado fonte de dificuldades para um grande número de alunos, dentre elas aquelas ligadas à introdução do formalismo algébrico (Chevallard 1985 e 1989, Gallardo 1988, Vergnaud 1988). No entanto, trabalhos sobre o aprendizado da demonstração são frequentes para conteúdos de Geometria, mas poucos são os estudos específicos sobre processos de prova na resolução de problemas de "Aritmética-Álgebra".

Como o estudo que aqui apresentamos está centrado em conjecturas e provas no conjunto dos inteiros e em problemas na passagem da Aritmética para a Álgebra, priorizamos a análise de trabalhos de alguns autores, cujos objetos de estudo estão mais próximos dessa temática.

No trabalho realizado por Freitas (1993), relativamente ao campo da Aritmética-Álgebra, foram identificados dois tipos de provas intelectuais: a prova por enunciados e a prova algébrica. Essa distinção foi feita levando em conta de um lado, a linguagem empregada (linguagem natural versus linguagem algébrica); de outro, o funcionamento mental inerente. Segundo Freitas (2007), a atividade de validação dos alunos depende tanto do domínio da linguagem quanto do conteúdo:

> Nas duas categorias de provas, "pragmáticas" e "intelectuais", produzidas pelos alunos observamos tanto tratamentos de registros, quanto conversões entre três tipos de registros de representação: linguagem natural, numérica e algébrica. Observamos que a atividade de validação é indissociável do registro utilizado, ou seja, que a provas produzidas pelo aluno dependem tanto do seu domínio sobre registro de representação quanto do nível de conhecimento sobre o conteúdo representado. (FREITAS, 2007, p.123)

No tipo "prova por enunciados", a formulação da sequência dedutiva das afirmações é apresentada em linguagem natural, enquanto que no tipo "prova algébrica" a seqüência de afirmações prioriza o emprego de códigos simbólicos da linguagem algébrica para atingir relações gerais. Nesse trabalho, identificou-se que muitos alunos, de início do Ensino Médio, diante de certos problemas que exigem um nível mais elevado de abstração ou de generalização, insistiam em verificar exemplos aritméticos particulares, permanecendo no nível empírico de validação sem atingir o nível adequado.

Ainda no que concerne ao aprendizado da Álgebra, em nível dos anos finais do Ensino Fundamental e Médio, constata-se que um dos principais objetivos é desenvolver a capacidade de utilização de símbolos, que inclui tanto o cálculo algébrico quanto a modelagem e o estudo de variação. Segundo Ponte (2000), o pensamento algébrico deve igualmente incluir a capacidade de lidar com estruturas matemáticas e usá-las na interpretação e resolução de problemas matemáticos ou de outros domínios e, em particular, na validação algébrica de conjecturas.

Ponte (2003) desenvolve atividades de investigação com alunos de faixa etária entre 12 e 14 anos, para uma variedade de problemas envolvendo a produção e validação de conjecturas, alguns bastante próximos daqueles por nós trabalhados. Dentre suas conclusões, ele identifica a "partilha de conhecimentos" como um aspecto importante desse trabalho:

> Os alunos podem pôr em confronto as suas estratégias, conjecturas e justificações, cabendo ao professor desempenhar o papel de moderador. O professor deve garantir que sejam comunicados os resultados e os processos mais significativos da investigação realizada e estimular os alunos a questionarem-se mutuamente. Essa fase deve permitir também uma sistematização das principais idéias e uma reflexão sobre o trabalho realizado. (PONTE, 2003, p. 41)

A partir desses estudos desenvolvemos um trabalho visando não apenas a identificar tipos e níveis de provas produzidos, mas também a investigar possibilidades de aprendizagem, tanto no que concerne ao uso da linguagem matemática quanto ao de generalidade envolvido na produção de níveis mais elevados de provas.

2. Referencial teórico e metodológico

Dois foram os referenciais teóricos básicos sobre os quais nos apoiamos na condução desta pesquisa: a Teoria das Situações Didáticas, proposta por Brousseau (1986) e o modelo de produção de provas de Balacheff (1988). No que concerne à parte metodológica, para coleta e análise de dados sobre provas produzidas e aprendizagens realizadas pelos alunos, nos apoiamos na Engenharia Didática proposta por Artigue (1988). Consideramos que esses referenciais são adequados para as análises das dimensões teórica e experimental de nossa pesquisa, pois além de integrarem um mesmo programa epistemológico, acreditamos que, neste caso, eles se complementam quanto às abordagens que fizemos.

Para a análise das validações produzidas pelos alunos tomamos por base o modelo proposto por Balacheff (1988). A partir de uma grande quantidade de produções de alunos, diante de um problema de Geometria Combinatória, ele identifica e hierarquiza quatro tipos de provas, que são os seguintes:

- *Empirismo ingênuo:* *A*firma-se a verdade de uma proposição após a verificação de alguns casos particulares. É considerado o primeiro passo no processo de generalização.

- *Experimento Crucial:* *A*firma-se a verdade de uma proposição após a verificação de casos particulares, seguido da verificação de um caso especial, geralmente não familiar. A diferença principal com relação ao empirismo ingênuo é que o indivíduo, após verificar a validade da proposição para alguns casos particulares ainda não se dá por satisfeito e sente a necessidade de testar mais um caso "especial" para tirar a dúvida.

- *Exemplo Genérico:* *A*firma-se a verdade de uma proposição após a manipulação de um caso particular, mas de modo a considerá-lo com uma característica que representa uma classe de objetos.

- *Experimento mental:* *A*firma-se a verdade de uma proposição, de forma genérica, após conceber internamente as ações realizadas sobre as proposições em questão. Neste caso, o texto da prova indica generalidade e advém de uma tentativa de revelar uma classe de objetos.

Segundo Balacheff (1988), são consideradas pragmáticas as provas apresentadas no nível do *empirismo ingênuo* e do *experimento crucial*. As provas apresentadas ao nível do *exemplo genérico* representam um momento de passagem entre as provas pragmáticas e as conceituais. O *experimento mental* já representa, nesse contexto, uma prova conceitual. Ainda nesse trabalho, Ballacheff (1988) propõe um nível superior ao experimento de pensamento denominado por ele "Cálculo nas Afirmações". Nesse nível, as provas conceituais se parecem muito com o que conhecemos por demonstrações.

Além dos tipos acima identificados na Tipologia de Provas de Ballacheff (1988), Freitas (1993), em seu trabalho de doutorado com alunos variando de idade entre 3 a 16 anos, estudando problemas situados da passagem da aritmética para a álgebra, identificou outros tipos de prova, os quais podem ser classificados em nível de experimento mental de Balacheff. Esses tipos de prova não foram analisados por Balacheff, mas podem aparecer quando se exploram outros tipos de problemas fora do conteúdo de Geometria Combinatória.

No campo de problemas envolvendo aritmética e álgebra, foi observado que, diante de algumas situações, para certos alunos, o empirismo e a experiência crucial têm valor de prova (e somente nestes casos nós falamos de provas pragmáticas), enquanto que para outros esse tipo de procedimento constitui somente um meio de descoberta da conjectura. Há casos em que, após uma fase de tentativas empíricas (ensaios numéricos sucessivos), os alunos elaboram uma prova "**por enunciados**".

> **As provas por enunciados**: Nós designamos assim as provas de nível intelectual que consistem em organizar diversas proposições em linguagem natural, cada uma dessas proposições elementares sendo consideradas como verdadeiras pelo sujeito. São construções intelectuais fundamentadas em teorias, em geral não formalizadas e não completamente explicitadas. Na operação que consiste em organizar enunciados em linguagem natural, o raciocínio do aluno apoia-se em proposições que podem ter status e valores epistêmicos diferentes. (FREITAS, 2007, p. 119)

Quando a "prova por enunciados" explicitar todos os enunciados das propriedades utilizadas, ela será chamada de *prova por enunciados completa*. Caso haja propriedades implícitas, chamá-la-emos de *prova por enunciados incompleta.*

Para a análise da evolução das aprendizagens dos alunos nos apoiamos no modelo da Teoria das Situações Didáticas de Brousseau (1988). Segundo ele, para que ocorra aprendizagem é necessário que haja interação do aluno com um meio, fonte de desequilíbrios e contradições, ao qual ele deve buscar se adaptar. É nesse processo de adaptação, de busca de novas respostas para os desafios encontrados, que ele produz novos conhecimentos os quais confirmam que ele aprendeu. De maneira sucinta, segundo esta teoria, o professor deve procurar efetuar a devolução de bons problemas aos alunos, que sejam adequados para a aprendizagem de conceitos e conteúdos desejáveis. O professor deve criar situações possibilitem que o aluno entre no jogo, ou seja, que aceite o problema como seu e mergulhe em momentos ou fases adidáticas de ação, formulação e validação. À medida que o aluno consegue agir, falar ou pensar e efetuar descobertas, ele estará construindo ou reconstruindo conhecimentos.

No desenvolvimento experimental de nossa pesquisa, para as atividades integrantes das sessões da sequência didática desenvolvidas com os alunos, buscamos fazer com que elas fossem ricas em fases adidáticas, as quais deveriam aos alunos se comportar de maneira semelhante ao pesquisador. O processo de planejamento, elaboração, aplicação e análise da seqüência é o que constituiu a Engenharia Didática proposta por Artigue (1988), com a qual buscamos investigar o objeto, que é a identificação de tipos de validações ou de refutações de conjecturas com diferentes níveis de dificuldades, por alunos do 3º ano do Ensino Médio. Além de identificar tipos e níveis de provas produzidas pelos alunos, pretende-se investigar possíveis aprendizagens no que concerne ao domínio da linguagem e aos níveis de provas por eles produzidas.

No primeiro momento da Engenharia, referente às *análises prévias,* foi realizada uma revisão de literatura e investigação de tipos de problemas que apresentam conjecturas no campo dos números inteiros, tanto em livros didáticos como em outras publicações. Em seguida coletamos e analisamos várias atividades e construímos um conjunto de situações, constituindo uma sequência didática, para a qual foram previstas dez sessões aplicadas em sala de aula. Nessa fase estruturamos uma *análise a priori* completando a elaboração da sequência didática, composta de uma diversidade de conjecturas que permitem o uso de registros aritméticos, língua natural e algébrica, bem como diferentes níveis de validação. Na fase atual concluímos a aplicação da sequência didática, cuja descrição de alguns aspectos que consideramos importantes, apresentamos a seguir.

3. Desenvolvimento experimental e análise de produções de alunos

A população foi constituída por 10 alunos de 3ª série do Ensino Médio de um Colégio Particular, da cidade de Campo Grande/MS. Esses 10 alunos pertenciam a várias salas e aceitaram o convite para participar da pesquisa de forma voluntária, que acabou formando um grupo de alunos interessados. Cada sessão teve duração de aproximadamente duas horas e foi realizada uma vez por semana, fora do período normal de aulas, ou seja, para os alunos que dela participaram caracterizou-se como atividade extraclasse. Em cada sessão, ao término de cada atividade, num tempo que varia de 5 a 10 minutos, o professor pesquisador realizou com a turma uma breve discussão sobre suas produções e dificuldades encontradas e em seguida promoveu uma fase de institucionalização. Por limitações de espaço e tempo apresentamos com mais detalhes apenas a primeira das 10 sessões já realizadas.

A **SESSÃO 1** foi composta das seguintes atividades:

Atividade 1*. Observe as afirmações abaixo. Verifique se são verdadeiras e justifique suas respostas através de provas matemáticas.*

1. A soma de dois números pares é sempre par.

2. A soma de três números pares é sempre par.

3. A soma de ***n*** *números pares é sempre par.*

Atividade 2*. Resolva os problemas, justificando suas respostas.*

1. A soma de três números consecutivos é sempre múltiplo de três?

2. A soma de quatro números consecutivos é sempre múltiplo de quatro?

3. A soma de 5 números consecutivos é sempre múltiplo de cinco?

***DESAFIOS**: Verifique se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa e apresente uma justificativa matemática para cada resposta.*

A soma de uma quantidade ímpar de números ímpares é sempre um número ímpar.

*A soma de **n** números inteiros consecutivos é sempre um múltiplo de **n**, se **n** é par.*

*A soma de **n** números inteiros consecutivos é sempre um múltiplo de **n**, se **n** é ímpar.*

Com relação à atividade 1 prevíamos que a maioria dos alunos apresentaria soluções do tipo empirismo ingênuo, pelo fato de que a representação geral de um número pare qualquer na forma 2k, $k \in Z$ e de um número ímpar na forma 2k+1, $k \in Z$ não havia sido muito trabalhada em sala de aula. Além disso, normalmente os alunos são pouco estimulados, pelos professores e pela escola, a produzirem justificativas matemáticas formais, uma vez que as mesmas quase não são cobradas nos exames vestibulares. De fato, essa previsão se confirmou, pois apenas dois alunos utilizaram letras na tentativa de produzirem provas usando notações simbólicas. Além disso, a letra utilizada no discurso matemático do aluno TR pode ser caracterizada, não como variável funcional, mas como uma vontade de representar uma característica geral.

Como ilustração, apresentamos abaixo a solução produzida por TR para o item 2 da **atividade 1**, a qual pede para verificar e justificar a veracidade da afirmação: “A soma de três números pares é sempre par”. A resposta de TR é a seguinte: *Verdadeiro. Todo número par é múltiplo de 2, logo a soma de três números pares é 2n, onde n é a soma dos quocientes de X, Y e Z por 2.*

BR foi o único aluno que produziu uma prova algébrica, usando a letra com alto nível de generalidade. Como ilustração, apresentamos abaixo a solução produzida por BR para o mesmo item 2 da **atividade 1**. A resposta de BR é a seguinte: *Verdadeiro. Se um número inteiro <u>n</u> é par, ele pode ser escrito na forma n = 2a, onde* $a = \frac{n}{2}$ *e* $a \in Z$.

$n_1 + n_2 + n_3 = 2a_1 + 2a_2 + 2a_3 = 2\,(a_1 + a_2 + a_3)$ Par

Podemos observar que este aluno BR teve o cuidado de usar índices diferentes, mostrando que percebeu que os números ímpares podem ser distintos. Para as demais atividades da sessão ele manteve o mesmo padrão de respostas, mostrando que possui maior nível de conhecimento matemático sobre esse tipo de conteúdo.

Quase todos demais, para esta **atividade 1**, apresentaram respostas do tipo sim ou não seguidas de exemplos. Há casos em que, apesar de apresentar poucos apenas três exemplos, é possível interpretar que houve não permaneceram no tipo empirismo ingênuo, mas que chegaram ao tipo experiência crucial. É o caso do aluno LN, que para o item 1 da atividade 1, a qual pede para verificar e justificar a veracidade da afirmação: “A soma de dois números pares é sempre par”. Resposta de LN: *Sim, ex.* $2 + 2 = 4$, $4 + 32 = 36$, 4.044 + 8.316 = 12.360 .

Neste caso, observamos que ele fez dois cálculos com a soma de dois números relativamente pequenos e em seguida fez o cálculo com dois números muito maiores. Isso pode ser interpretado que ele ficou com dúvida se a propriedade era sempre válida e resolveu fazer mais um teste para a soma dos números 4.044 + 8.316. Esta adição pode ser por nós caracterizada como uma “experiência crucial” no sentido de Balacheff.

Como dissemos anteriormente, ao final da atividade 1 desta SESSÃO 1 foram recolhidas as folhas com as produções de cada aluno e, em seguida, realizamos discussões com os alunos sobre as soluções por eles apresentadas. Ao final houve um pequeno momento de institucionalização, incluindo a análise das soluções produzidas por BR, que certamente foi a mais valorizada por todos.

Em seguida foi distribuída outra folha para cada aluno, a qual continha a **atividade 2**. Era esperado que grande parte dos alunos realizasse tentativas numéricas antes de se empenhar na produção de algum tipo de prova de nível mais elevado, por meio do uso de linguagem algébrica ou de algum outro tipo de teorização ou formalização. No entanto, observamos que, para esta **atividade 2**, a quantidade de alunos que buscou soluções algébricas aumentou significativamente. Desde o início quase todos buscaram encontrar a solução por meio do uso de registros algébricos. Como as atividades apresentavam baixo nível de dificuldade e como eles já tinham participado da institucionalização das soluções dos problemas da **atividade 1**, quase todos acertaram todos os itens desta atividade. A surpresa maior foi que mesmo para o item 2, que trazia a seguinte pergunta: “A soma de quatro números consecutivos é sempre múltiplo de 4?”, a metade dos alunos respondeu usando cálculos algébricos, ao invés de apresentar um simples contra-exemplo. Donde se pode inferir que esses alunos passaram a valorizar mais as soluções para as quais se utilizam símbolos algébricos. Como ilustração apresentamos a seguir a resposta do aluno RT: *Sejam* n, $n+1$, $n+2$, $n+3$, *números inteiros e consecutivos. Fazendo a soma entre* $n + n+1 + n + 2 + n + 3 = 4n + 6$, $n \in Z$.

Logo a soma de quatro consecutivos nunca resultará em um n^o *múltiplo de 4.*

As respostas dos outros quatro alunos que produziram soluções algébricas, também foram parecidas com à do aluno RT.

Com relação à última parte da sessão, a qual continha alguns desafios num nível mais elevado de generalidade, foi observado que eles se envolveram na busca de soluções, mas a maioria teve dificuldade em atingir o nível de generalidade dos problemas propostos.

4. Considerações finais

A partir da avaliação dessa 1ª sessão pudemos identificar que a ausência de incógnitas nas conjecturas favorece o aparecimento de provas do tipo empirismo ingênuo e a presença de incógnitas nos enunciados induz a produção de provas algébricas pelos alunos. Outra constatação é que a quantidade de números influencia nos tipos de provas desenvolvidos pelos alunos, favorecendo a produção de provas conceituais, no entanto, a quantidade de variáveis, pode inferir no aparecimento de provas algébricas.

Foi possível identificar algumas demonstrações da tipologia de provas proposta por Balacheff (1988), bem como outras encontradas no trabalho de Freitas (1993), como as que fazem uso da linguagem algébrica ou que utilizam outros tipos de registros. No entanto, após as primeiras institucionalizações feitas, ao perceberem a potencialidade do uso adequado de registros algébricos para modelarem problemas dessa natureza, os alunos puderam restringir a utilização de registros numéricos. Acreditamos que essa ocorrência pode se caracterizar como um fator positivo para o aprendizado de técnicas de modelagem algébrica. Entretanto, é necessário que o professor insista em que a utilização de contra-exemplos é um importante instrumento na produção de provas. Não o fazendo, os alunos poderão abandonar quase por completo esse tipo de recurso.

Ainda com relação à aprendizagem, presenciamos, durante o desenvolvimento das atividades propostas, grande envolvimento dos alunos na busca de soluções em relação às situações adidáticas que, com certeza, colaboram para a construção de conhecimentos relativos ao objeto de pesquisa deste trabalho. Com isso pudemos observar a eficiência da produção de sequência didática visando à aprendizagem de demonstrações matemáticas.

Os estudos teóricos e as experimentações realizadas até o momento indicam que a devolução de situações-problema, contendo conjecturas, no conjunto dos números inteiros, pode ser facilmente realizada com alunos do Ensino Médio. Assim, o envolvimento dos alunos na busca de soluções para conjecturas desse tipo pode ser caracterizado como momentos de estudo, fundamentais para a aprendizagem matemática, ao lado da utilização do conjunto dos inteiros como ferramenta de aprendizagem.

5. Referências

ARTIGUE, M. **Ingénierie Didactique**. Recherches en Didactique des Mathémaques. Vol. 9, n^o 3, pp. 281-308, Grenoble : La pensée sauvage, 1988.

BALACHEFF, N. **Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de collège.** Thèse, Université J. Fourier Grenoble, 1988.

BROUSSEAU, G. **Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques** – Recherches en Didactiques des Mathématiques. v.7, n^o 2, pp.33-116, Grenoble, 1986.

CHEVALLARD Y. **Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiqques au collège** (2e partie). Petit x, n^o 19, pp. 43-72, Ed. IREM de Grenoble, 1989.

________________. **L'activité de validation lors du passage de l'arithmétique à l'algèbre: une étude des types de preuves produits par des élèves de collège et lycée.** Thèse. Université Montpellier II, 1993.

________________. **Registros de representação na produção de provas na passagem da Aritmética para a Álgebra.** In: Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica. Org. Sílvia Dias Alcântara Machado, Campinas-SP, Papirus, 3a. ed., 2007.

________________. **Teoria das Situações Didáticas.** In: Educação Matemática. Org. Sílvia Dias Alcântara Machado, EDUC – Editora da PUC -SP, 3a. ed. SP, 2008.

FREITAS, J.L.M. **L'activité de validation lors du passage de l'arithmétique à l'algèbre: une étude des types de preuves produits par des élèves de collège et lycée**. Thèse. Université Montpellier II, 1993.

FREITAS, J.L.M. **Registros de representação na produção de provas na passagem da Aritmética para a Álgebra**. In: Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica. Org. Sílvia Dias Alcântara Machado, Campinas-SP, Papirus, 3a. ed., 2007.

GALLARDO A., ROJANO T. **Areas de dificuldades en la aquisiocón del lenguaje aritmetico-algebraico**. Recherches en Didactiques des Mathématiques, Vol. 9, n^o 2, pp. 155-188, 1988.

HEALY, l. & HOYLES, C**. A study of proof conceptions in algebra, Journal for Research in Mathematics Education,** 31 (4), 396-428. 2000.

HEFEZ A. **Elementos da Aritmética**. Coleção Textos Universitários. Rio de Janeiro: Editora: SBM, 2005.

LAKATOS, I. **A lógica do descobrimento Matemático: Provas e Refutações**. Rio de Janeiro-RJ, Zahar Editores, 1978.

____________. **Pruebas y refutaciones -la logica del descubrimiento matemático**. Madrid: Alianza Universidad. (1976/1982).

LEANDRO, EDNALDO JOSÉ. **Um Panorama de Argumentação de Alunos da Educação Básica: O Caso do Fatorial**, 2006.

PIETROPAULO, R. C. **(Re) Significar a demonstração nos currículos da educação básica e da formação de professores de matemática**. Tese de Doutorado, PUC / SP, 2005.

PONTE, J.P. **Números e Álgebra no currículo escolar** – Grupo de Investigação DIF – Didática e Formação – Centro de Investigação em Educação – Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, 2000.

___________.Investigações Matemáticas na Sala de Aula. Editora Autêntica, MG 2003.

VERGNAUD G. **Long terme et court terme dans l'apprentissage de l'algèbre.** Actes du premier colloque franco-allemand de didactique, pp. 189-199, 1988.