A ARGUMENTAÇÃO NO DESENVOLVIMENTO DE ATIVIDADES DE GEOMETRIA POR ACADÊMICOS DE UM CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Antonio Sales - UEMS

Luiz Carlos Pais - UFMS

RESUMO: Este artigo tem por objetivo apresentar o resultado de uma atividade de pesquisa em Educação Matemática **envolvendo argumentação** em um curso de Licenciatura em Matemática. Situa a argumentação no contexto das provas e demonstrações e discute a sua importância na Educação Matemática. Apresenta uma síntese da Teoria Antropológica do Didático e utiliza-a como suporte teórico para análise da atividade. Alguns resultados apontam para a presença da argumentação lógica na resolução apresentada pelos acadêmicos.

PALAVRAS-CHAVE: Argumentação. Teoria Antropológica do Didático. Educação Matemática.

1. Introdução

Demonstrar, justificar e provar são conceitos frequentemente usados em Matemática, não necessariamente nesta ordem, mas sempre significando que o cumprimento da tarefa proposta não estará completo se não for devidamente comprovado ou explicado segundo regras pré-estabelecidas e aceitas como verdadeiras.

Desde que Tales de Mileto (Séc. VI a.C.) organizou dedutivamente a geometria e provou alguns teoremas (BOYER, 1996) e séculos depois Euclides de Alexandria (Séc.III a.C.) sistematizou a Matemática produzida até então, nos treze volumes dos Elementos, o estudo dessa ciência tem sido conduzido tendo em vista a formalização dos conceitos definidos pelo matemático e a demonstração das propriedades desses conceitos (BICUDO, 1999). Essas propriedades são em seguida despersonalizadas, descontextualizadas e generalizadas. A formalidade, como característica essencial e inconfundível da Matemática, é, portanto, um fim a ser perseguido especialmente no presente contexto em que predomina a concepção formalista encabeçada por David Hilbert (SNAPPER, 1984) e (BRASIL 1998, p. 26). No entanto, o seu estudo na sala de aula, através dos livros didáticos, por vezes, se apresenta excessivamente formal e precocemente sistematizado (BRASIL, 2007). Essa ausência de flexibilidade desprovê a Matemática da potencialidade de "ser o motor de inovações e de superação dos obstáculos, desde os mais simples até aqueles que significam verdadeiras barreiras epistemológicas no seu desenvolvimento" (BRASIL,1998, p. 26).

Entendemos que a demonstração tem uma grande contribuição para a aprendizagem da Matemática, mas que essa contribuição somente se efetiva quando são elaboradas atividades de tal modo que a demonstração seja a culminância de um processo e não o ponto de partida. Nem mesmo deverá estar muito próxima do ponto de partida. Entendemos ainda que há procedimentos pré-demonstrativos que, por serem insuficientes em si mesmos para se constituírem em um final de processo, possuem a flexibilidade necessária para conduzir à percepção da necessidade de um procedimento mais completo e, ao mesmo tempo, preparam o desenvolvimento da habilidade de demonstrar.

A demonstração como ponto de partida, ou como finalidade improrrogável, transparece um caráter impositivo. Ela encerra abruptamente o assunto em um contexto social em que o debate é valorizado. O ensino da Matemática necessita mesmo acontecer na contramão do contexto histórico em que vivemos?

Uma prática pré-demonstrativa, na classificação de Arsac (1992), é a explicação. Na categorização criada por esse autor a explicação inclui como casos particulares a prova e a demonstração, sendo esta última mais específica e um caso particular da prova. Prova, para ele, não possui a generalidade da demonstração, não possui o rigor desta e sua influência social é mais restrita. Da exposição de Arsac sobre o tema podemos deduzir que explicação é uma demonstração em sua forma embrionária.

Estamos pressupondo que haja ainda uma categoria mais ampla do que explicação, a argumentação. Argumentação é todo esforço de esclarecer, justificar, convencer e provar seja ele bem sucedido ou não.

Duval (1992-1993, p. 38) afirmou que "L'argumentation, à certains stades d'organisation, peut ne pas se différencier de l'explication et en quoi, cependant, elle lui est irréductible[8]"

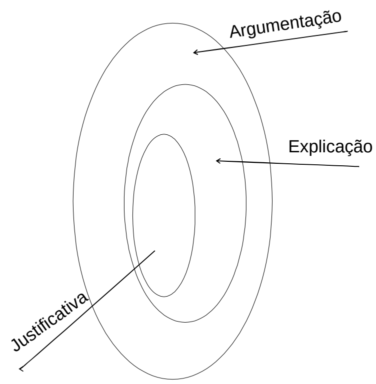
Em nossa forma de entender em uma argumentação há aspectos explicativos e aspectos justificativos. Pressupomos que explicação seja mais ampla do que a justificação. Isso significa dizer que a segunda está contida na primeira conforme esquema que apresentamos abaixo. Entendemos que a diferença entre ambas está na intencionalidade, termo este entendido conforme Husserl (2000)[9] .

O aspecto explicativo de uma argumentação tem sua ênfase no esclarecimento podendo ou não ter por objetivo justificar. Explicar não implica, necessariamente, uma defesa,

[8] A argumentação, em determinados estágios da organização pode não se diferenciar da explicação, no entanto, não se reduz a isso. (tradução nossa)
[9] "Este conceito, oriundo da filosofia medieval, significa: dirigir-se para, visar alguma coisa." Nota do Editor

uma prestação de contas. Pode significar apenas um esclarecimento. A justificativa, porém, sempre implicará numa defesa de um ponto de vista, de uma ação ou de um fato.

Dessa forma estamos entendendo que quem explica pode ter ou não a intenção de justificar. Mas, quem se propõe a justificar terá, necessariamente, que recorrer a uma explicação. Seguindo essa linha de raciocínio, em certo sentido, nossa concepção de justificativa coincide, em nível de abrangência e complexidade, com a prova definida por Arsac (1992). No entanto, há diferenças entre ambas: a prova encerra temporariamente a discussão sobre o assunto enquanto a justificativa fornece elementos para a prova. O esquema a seguir resume tais idéias.



De qualquer forma não se explica ou se argumenta por nada e não se concebe uma argumentação sem interlocutores. Olerón (1987) define argumentação como o processo pelo qual uma pessoa, ou um grupo, tenta conduzir um público a adotar uma posição através do recurso da apresentação de assertivas cujo objetivo é mostrar a validade, a lógica ou consolidação da proposta apresentada. Dessa forma, entendemos que a atividade de argumentar é composta por elementos racionais.

Mesmo concebendo que a argumentação pode estar centrada em raciocínios naturais a compreensão de que é possível evoluir da forma natural de pensar para uma forma racional justifica a presença da mesma no contexto do desenvolvimento de atividades de estudo da Matemática.

Perelman (*apud* OLERÓN, 1987), justifica o uso da argumentação tomando como base a liberdade dos indivíduos, os interesses pessoais e coletivos e o uso maciço dela pelos meios de comunicação. Já não podemos mais impor, temos que convencer.

A argumentação, segundo Pierre Olerón, é utilizada em um universo de conflitos, ambiguidades, incertezas, equívocos e desacordos. Por essa razão a argumentação, para conseguir os objetivos deve possuir: 1) raciocínio e influência (ou poder de influenciar); 2) rigor e sensibilidade, isto é, ter rigor na ordem de apresentação e abranger a sensibilidade dos conceitos utilizados; 3) dialética, no sentido de propor um acordo prevendo as divergências, as necessidades de mudar a estratégia; 4) verdade e eficácia (OLERÓN, 1987). A partir dessa categorização de elementos constituintes de um processo de demonstração é que foram elaboradas atividades de geometria visando analisar como esse processo se apresenta na resolução de determinadas tarefas.

Este artigo tem por finalidade apresentar a análise da argumentação produzida por acadêmicos do primeiro ano de um curso de licenciatura em Matemática na resolução de uma tarefa proposta. No entanto, essa análise é apenas um fragmento de um trabalho de maior amplitude que culminará em uma tese de doutorado no PPGEDU/UFMS.

A teoria de suporte para a análise da produção desses acadêmicos é a Teoria Antropológica do Didático (TAD).

2. TAD: uma teoria da prática

A TAD tem como teóricos proponentes Chevallard (2001), Bosch e Gascón (2001). Os autores analisam as práticas docentes e o estudo da matemática em termos de praxeologia. Praxeologia é uma teoria que se ocupa da atividade humana ou, mais precisamente, da ação eficiente. Essa teoria denomina-se de antropológica porque discute processos imbuídos do conhecimento como produto social, no seio das instituições sociais.

É uma teoria do *didático* por considerar que há produção ou apropriação de conhecimento sempre que houver um problema, de qualquer natureza, cuja solução exige que se construa um conhecimento ou aproprie de um já existente. Nesse contexto, aprender matemática é um problema e põe em ação uma praxeologia didática.

A TAD, portanto, se constitui num modelo de análise do ensino e da aprendizagem da Matemática a partir do próprio conteúdo, uma vez que o problema da dificuldade de aprendizagem desse componente curricular ou disciplina (conforme o nível de estudo), segundo esse ponto de vista, não está no sujeito que ensina e nem no sujeito que aprende mas no próprio conhecimento.

A praxeologia, nesse contexto, tem duas faces. Uma é a organização matemática elaborada com o objetivo de envolver o aluno no processo, desafiá-lo através de um problema. A outra face é a organização didática que consiste em mobilizar planejamentos, ações e instrumentos para que o objetivo proposto seja alcançado. As duas são inseparáveis e interdependentes. Portanto, praxeologia está sendo concebida como a teoria da forma eficaz de estudar matemática visando a apropriação dos objetos matemáticos.

De acordo com a TAD uma organização matemática com o objetivo de estudar, ou tal como ocorre em sala de aula, é composta de tarefas, técnicas, tecnologias e teoria e os conceitos matemáticos recebem a denominação de objetos matemáticos (CHEVALLARD & BOSCH, 1999).

Tecnologia não tem o sentido de artefato, um utilitário resultante de uma investigação cientifica, como normalmente se concebe. No contexto da TAD, tecnologia, significa a explicação da lógica do funcionamento do artefato, a justificativa racional do princípio de funcionamento e das razões da sua existência.

Tarefa é a atividade proposta com o objetivo de desafiar, de conduzir a uma constatação das propriedades de um objeto matemático, de aplicar as propriedades de um objeto na resolução de um problema ou de representar o próprio objeto.

A representação de um objeto matemático também é um objeto, um objeto da atividade matemática. Nesse caso diz-se que ele é um objeto ostensivo por que se mostra, se faz sentir, enquanto os objetos matemáticos são denominados de objetos não-ostensivos, isto é, aqueles que não se mostram por si mesmos. Os objetos não-ostensivos são “vistos” e manipulados através dos objetos ostensivos.

A grafia, a palavra falada, o desenho, o gesto, são formas de construir, abordar, manipular, dar visibilidade aos objetos matemáticos não-ostensivos.

Na resolução de uma tarefa proposta recorre-se a uma ou mais técnicas. Essas técnicas, quando conduzem a uma resolução correta, são explicadas pela tecnologia que por sua vez se apóia na teoria geral da ciência da qual faz parte.

3. A Metodologia do Trabalho

A atividade matemática analisada a seguir foi elaborada visando estudar as organizações que os acadêmicos colocam em prática ao desenvolver o discurso da justificação durante as atividades de geometria. Ao propor a atividade pretendia-se ver o nível de investimento do saber apropriado durante as atividades matemáticas desenvolvidas em aula, as técnicas utilizadas e as justificativas apresentadas, isto é, a pertinência da tecnologia utilizada.

No início do ano solicitamos aos alunos a permissão de conduzir, a partir do trabalho com eles, uma pesquisa. Informamos que muito do material que viesse a ser produzido por eles seria analisado à luz de uma teoria e que poderia servir como material para publicação.

Havia uma disposição bem nítida em colaborar e, em nenhum momento, alguém reclamou. Pelo contrário, algumas vezes, ao iniciar a atividade proposta alguém da classe dizia: “caprichando em gente, vamos colaborar com a pesquisa”. É evidente que a explicação matematicamente correta que o acadêmico viria fornecer para a atividade proposta, isto é, para a tarefa proposta dependeria do seu nível de compreensão das atividades desenvolvidas em sala de aula que, por sua vez, depende do envolvimento pessoal nessas atividades e da forma com que as mesmas foram planejadas e desenvolvidas.

Buscaremos analisar em primeiro lugar, a organização do aluno para dar respostas à questão proposta, para resolver a tarefa, e, em segundo lugar, a argumentação levando em conta o encadeamento do raciocínio. É de interesse saber quais as técnicas postas em prática e se o raciocínio conduzido possui uma lógica, no sentido dado por Dewey(1928, p. 98): “En su sentido más amplio, todo pensamiento que llega a uma conclusión es lógico[10]”.

Para esse autor mesmo que a justificativa apresentada seja uma falácia, se conduziu a uma conclusão, esse pensamento utilizado foi lógico.

Na concepção de Dewey (1928, p.98) há conclusões que são “logicamente boas” e conclusões que são “logicamente más” dependendo da qualidade das justificativas apresentadas - se estão bem definidas, se são evidentes ou foram previamente demonstradas ou não. Depende também da relação entre a conclusão e o encadeamento das justificativas apresentadas. Em um sentido mais estrito, afirma Dewey, que

> “El vocablo lógico se refiere solamente a lo que está demostrado que se sigue necesariamente de las premisas que tienem una significación definida y que o son evidentes por sí mismas o se ha demostrado previamente su verdad. El carácter de la prueba es aquí el equivalente de lo lógico. En este sentido las matemáticas y la lógica formal (quizá como una rama de las matemáticas) son las únicas estrictamente lógicas[11]” (DEWEY, 1928, p. 98).

Conforme já foi visto em parágrafos precedentes estamos concebendo a argumentação no sentido que Arsac (1992) atribui à explicação, isto é, como um elemento pré-demonstrativo, portanto, um raciocínio lógico no seu sentido mais amplo e esclarecemos que a atividade ficou restrita ao campo da geometria plana, numa abordagem semi-euclidiana.

A abordagem euclidiana requer que todas as proposições sejam demonstradas a partir de definições, postulados, lemas e teoremas já de domínio do acadêmico. Por abordagem semi-euclidiana estamos entendendo aquela que axiomatiza teoremas e lemas ainda não

---

[10] Em seu sentido mais amplo, todo pensamento que chega a uma conclusão é lógico. (tradução nossa)

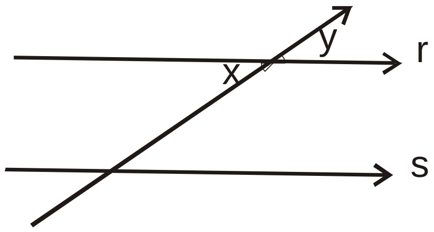
[11] O vocábulo se refere somente ao que está demonstrado a partir das premissas que têm significações definidas e que são evidentes por si mesmas ou que cuja verdade foi demonstrada previamente. O caráter de prova é tomado como equivalente a lógico. Neste sentido as matemáticas e a lógica formal (como um ramo da matemática) são as únicas estritamente lógicas (tradução nossa).

dominados para que possam ser utilizados na demonstração de outros. Esta prática, segundo Bicudo (1999), é muito comum entre os matemáticos.

A atividade foi proposta após terem sido desenvolvidas varias atividades envolvendo os conceitos de paralelas e transversais, ângulos colaterais internos e colaterais externos, ângulos alternos internos e alternos externos, ângulos complementares e suplementares. As congruências entre ângulos alternos internos, ângulos correspondentes, ângulos alternos externos e a suplementariedade entre colaterais internos e entre colaterais externos foram postuladas e trabalhadas em diversas atividades.

4. A Atividade Proposta e sua Análise

"Na figura temos que *r*//*s*. Os ângulos x e y são opostos pelo vértice. O que se pode afirmar a respeito das medidas de *x* e *y* e outras relações entre eles? Deixem registrados os esboços que fizerem e as explicações. Não usem a borracha para nada e nem borrem algum risco ou palavra mesmo que julguem errados."



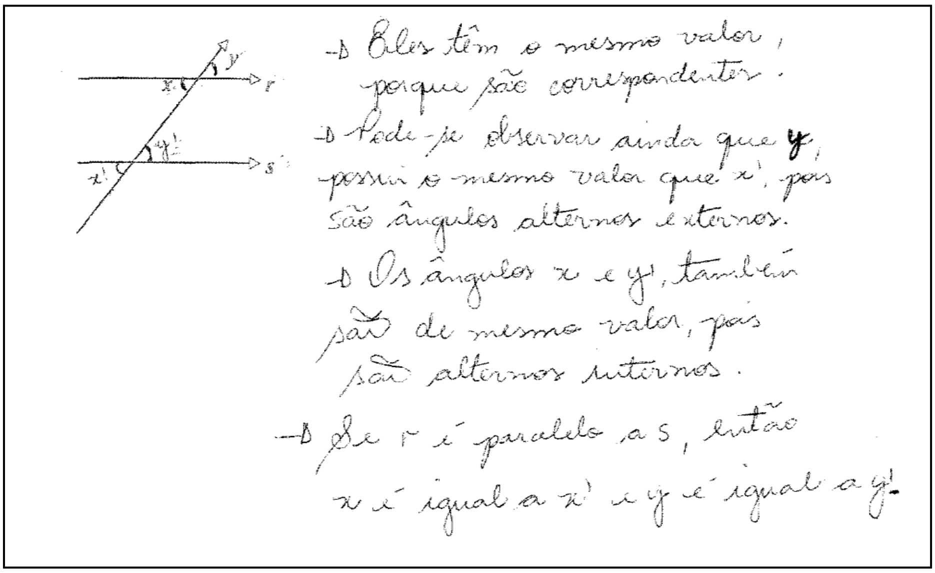
A atividade foi desenvolvida em duplas e nos parágrafos seguintes apresentaremos as argumentações dos acadêmicos e respectivas análises. Convém lembrar que termos como "congruência", "colaterais" não fazem parte do cotidiano dos acadêmicos e, portanto, requerem mais tempo para serem assimilados utilizados. Em todos os casos foi utilizada técnica do desenho[12]. Sem dúvida que essa técnica não foi espontânea uma vez que nas atividades didática e matemática desenvolvidas em sala envolviam esse ostensivo.

5. Resoluções Apresentadas

Relacionamos a seguir as resoluções apresentadas pelos acadêmicos, em um a ordem por nós arbitrada.

5.1. Resolução apresentada pela dupla nº 1.

[12] Por desenho estamos entendendo qualquer esboço gráfico. De acordo com a TAD o desenho é um objeto ostensivo que contribui para apropriação do não- ostensivo que, neste caso, é o entendimento que os acadêmicos tinham da tarefa proposta e de onde queriam chegar.



A técnica consistiu em utilizar as relações entre os ângulos alternos, internos e externos. A teoria foi dominada e a argumentação seguiu uma sequência lógica partindo de definições e premissas aceitas como verdadeiras. Houve investimento de saberes adquiridos e conhecimentos construídos a partir das atividades desenvolvidas.

A sequência seguida pela dupla, partindo da afirmação de que os ângulos "têm o mesmo valor" (tese) e em seguida apresentar as justificativas, é típica de uma demonstração, portanto, a tecnologia utilizada consistiu em demonstrar, embora a conclusão tenha ficado implícita. A hipótese fora dada, os ângulos são opostos pelo vértice, r//s e t é transversal, e a tese foi enunciada na primeira parte da primeira frase dos acadêmicos.

As justificativas apresentadas são coerentes e a conclusão de que x tem o mesmo valor que y ficou implícita.

A argumentação conduziu a uma conclusão, portanto, foi lógica conforme Dewey. A tecnologia utilizada justificou a técnica utilizada e esta deu conta de resolver a tarefa.

5.2. Resolução apresentada pela dupla nº 2

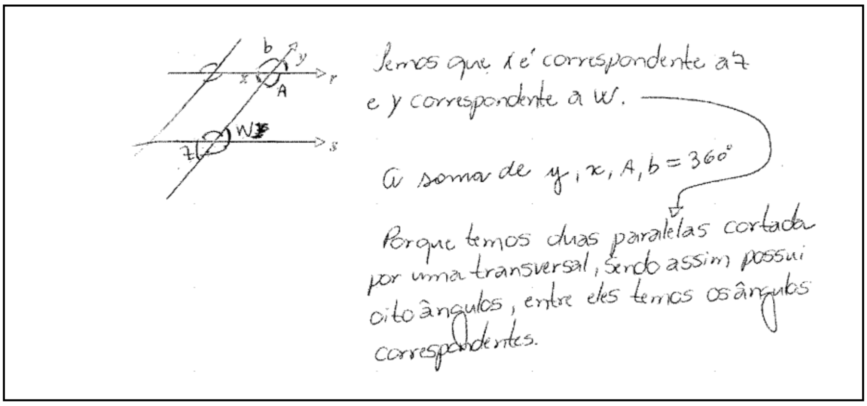


Figura nº 2

A técnica utilizada consistiu em buscar ângulos correspondentes e a soma de ângulos, mas não há uma lógica, pois a conclusão se distancia da que era esperada pela questão levantada. No entanto, percebe-se um investimento de saberes adquiridos, porém apresenta certa dificuldade em organizar os dados e conduzir a uma conclusão. A afirmação de que são correspondentes é justificada pelo fato de se ter duas paralelas cortadas por uma transversal. A tecnologia utilizada consistiu na utilização de um conhecimento superficial sobre paralelismo.

Não foi percebida a relação de congruência que há entre ângulos correspondentes, que o suplementar de x é o mesmo suplementar de y, que x tem o mesmo valor de w e que este por ser correspondente de y tem o mesmo valor.

O desenho nos induz a pensar que buscavam estabelecer as relações descritas no parágrafo anterior, mas que tal conhecimento ainda não estava consolidado.

5.3. Resolução apresentada pela dupla nº 3

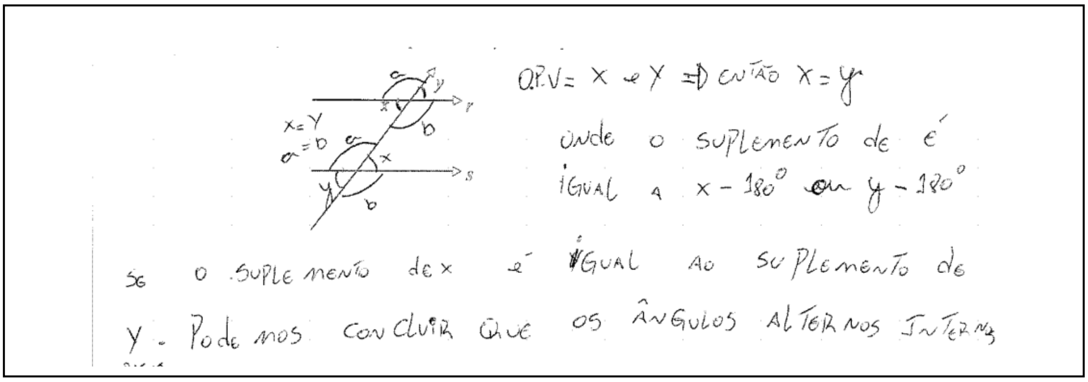


Figura nº 3

Nesse caso a dupla recorreu à ordem “se ...então ...”. Se x e y são o.p.v., então, x=y e utilizou a técnica do suplemento e poderia ter concluído satisfatoriamente, mas faltou a lógica de que trata Dewey porque a conclusão recai sobre outros ângulos.

A dupla apresentou dificuldades no registro, pois as afirmações de que x=y e a=b não permitem saber a quais ângulos se referiam dificultando a conclusão esperada. O desenho, mais uma vez, nos induz e pensar que a dupla buscava ângulos correspondentes, ângulos suplementares e ângulos congruentes.

Houve problemas de organização e, portanto, a tecnologia necessária não se mostrou plenamente embora estive latente.

5.5. Resolução apresentada pela dupla nº 4

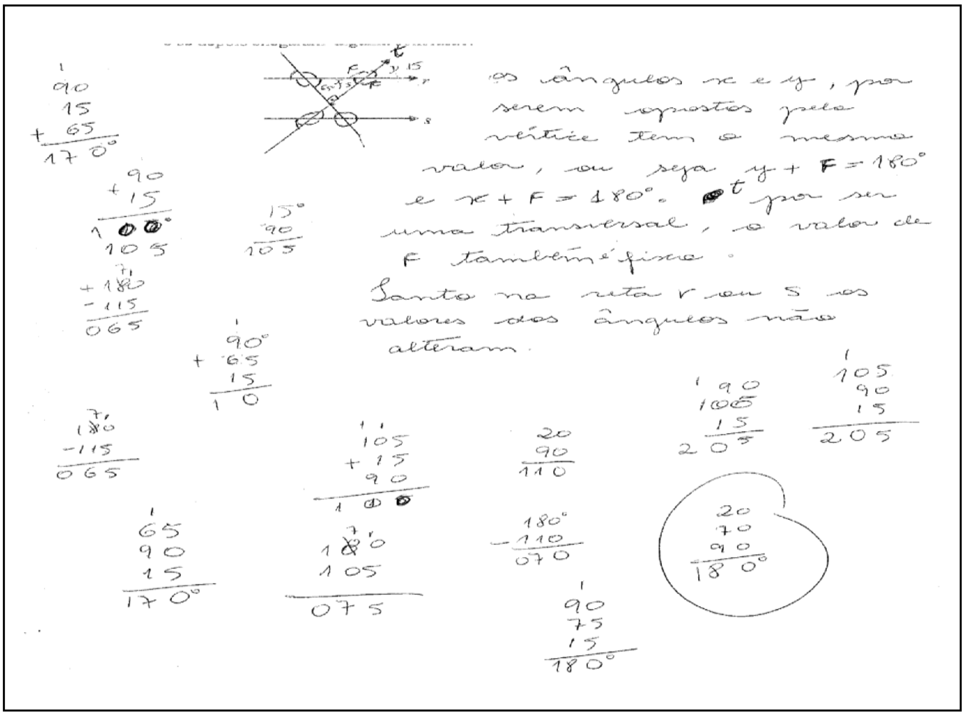


Figura nº 4.

Também aqui se percebe a expressão “se ... então” implícita. Se “ os ângulos x e y são opostos pelo vértice”, então, “tem o mesmo valor”.

A tecnologia utilizada, do ângulo suplementar fixo, está bem fundamentada, porém há registros de várias tentativas de busca empírica para o valor do ângulo através da soma dos ângulos internos de um triângulo. Buscava-se um valor fixo para os ângulos e não um valor relacional. Reconhecemos que a conclusão não era esperada por nós para nos indicar novas dimensões do nosso trabalho.

6. Considerações finais

Em todos os casos é possível vislumbrar algumas dificuldades na notação indicando que os elementos ostensivos não foram bem dominados e que há também dificuldades na manipulação desses ostensivos. E em vários casos há uma falha no encadeamento lógico e, em outros, clareza quanto ao objetivo da tarefa proposta. Em alguns casos há uma conclusão prévia, no estilo de uma demonstração, mas as premissas utilizadas e as justificativas que se seguem não dão suporte para essa conclusão.

Em todos eles a tecnologia utilizada consistiu em uma tentativa der utilizar as relações existentes entre ângulos formados entre retas paralelas e uma transversal. Conforme já visto era o que se esperava que acontecesse tendo em vista atividades desenvolvidas. A organização didática para trabalhar o assunto teve por base essas propriedades.

Também não se pode afirmar que as duplas que não conduziram a atividade visando a conclusão de que ângulos opostos pelo vértice são congruentes tenham falhada plenamente, pois pode ser que tenham focalizado a atenção na segunda parte da questão proposta: “O que se pode afirmar a respeito das medidas de *x* e *y* e outras relações entre eles?”

Se, está “evidente” a congruência, então deve-se buscar as outras relações pode ter sido o pensamento norteador de algumas duplas. Estas questões aqui levantadas indicam a necessidade de uma reformulação do problema e uma reaplicação da tarefa, mas também apontam para a possibilidade de se conduzir uma atividade matemática visando a demonstração a partir de elementos pré-demonstrativos. Nesse sentido, é importante observar que não é tempo ainda de concluir, mas já é possível vislumbrar caminhos e cuidados a serem tomados nas próximas atividades.

7. Referências

ARSAC, Gilbert. **Initiation au Raisonnement Déductif au Collège**. Lyon: Presses Universitaires de Lyon, 1992.

BICUDO, Irineu. História da Matemática: o pensamento da filosofia grega antiga e seus reflexos na educação matemática do mundo ocidental. *In*: BICUDO, M.A.V. (org.). **Pesquisa em Educação Matemática**: concepções e perspectivas. São Paulo: Editora da UNESP, 1999.

BOSCH, Marianna; GASCÓN, Joseph. Organizer L´Etude.2... Theories & Empires. In: DORIER, J.L et al.(eds). **Actes de la 11ª École d´Été de Didactique des Mathématiques**-corps 21 -30 Août 2001, pp.23-40.

BOYER, Carl B. **História da Matemática**. 2.ed. São Paulo: Ed. Edgard Blücher. 1996.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília: MEC/SEF,1998.

BRASIL. Ministério da Educação. **Guia de livros didáticos PNLD 2008**: Matemática. Brasília: MEC, 2007.

CHEVALLARD, Y.; BOSCH, M. Ostensivos e sensibilidade aos ostensivos na atividade matemática. **Recherches en Didatique des Mathématiques.** Nº 19, Ano 1999.

CHEVALLARD, Yves. Organizer L´Etude. 1. Strutures & Fonctions. In: DORIER, J.L et al.(eds). **Actes de la 11ª École d´Été de Didactique des Mathématiques**-corps 21 -30 Août 2001, pp.3-22

DEWEY, John. **Cómo Pensamos**. Madrid: Ediciones de la Lectura, 1928.

DUVAL, Raymond.Argumenter, demontrer, expliquer: continuite ou rupture cognitive? **“Petit X” nº 31**, p. 37-61, 1992-1993.

HUSSERL, Edmund. **Investigações lógicas**: sexta investigação: elementos de uma elucidação fenomenológica do conhecimento. São Paulo: Nova Cultural, 2000.

OLÉRON, Pierre. **L´Argumentation**. 2.ed.Paris: Presses Universitaires de France, 1987.

SNAPPER, Ernest. As três crises da matemática: o logicismo, o intuicionismo e o formalismo. **Humanidades.** Brasília: 2(8), Jul/set. 1984.