O CONCEITO DE NÚMEROS RACIONAIS: HESITAÇÕES, DÚVIDAS E CONTRADIÇÕES

José Felice - UEMS

Luiz Carlos Pais - UFMS

RESUMO : O objetivo deste artigo é analisar uma questão de vestibular, considerada de situação problematizadora, fazendo a descrição das explicações dos conceitos matemáticos que justificam o Conjunto dos Números Racionais, nela contido. O trabalho é um exercício do educador matemático na construção de praxeologias, de Organização Matemática, capaz de analisar a atividade matemática representada na questão, isto porque, estamos alicerçados num projeto de pesquisa vinculado ao Programa de Doutorado em Educação da UFMS, na linha de pesquisa de Ensino de Ciências e Matemática que tem como objeto de estudo o ensino de conteúdos matemáticos por meio de situações problematizadoras. O desenvolvimento da situação problematizadora, em estudo, fundamenta-se na Teoria Antropológica do Didático (TAD) que permite analisar, descrever e estudar as práticas institucionais e considera a organização do saber matemático uma entidade composta por: tipos de problemas ou tarefa problemática; tipos de técnicas que permitem resolver os tipos de problemas; tecnologias ou discurso que descreve e explica a técnica; uma teoria que fundamenta e organiza os discursos tecnológicos. A TAD considera os tipos de problemas e os tipos de técnicas o "saber fazer" matemático, enquanto que o discurso tecnológico e a teoria compõe o "saber" propriamente dito. As maneiras de fazer os cálculos matemáticos, desenvolvidas no texto do trabalho, fundamentam-se nas idéias de Caraça que dão sustentação às explicações das técnicas utilizadas e permitem a obtenção dos conceitos relacionados com os Números Racionais. No desfecho final, apresentam-se as contradições existentes entre a construção dos conceitos que determinam o conjunto dos Racionais e as alternativas apresentadas pela questão do vestibular em análise.

Palavras-Chave: Resolução de Situações Problematizadoras. Organização Matemática. Explicações dos conceitos dos Números Racionais.

Introdução

A análise reflexiva e as tentativas de interpretação de situações problematizadoras têm feito parte do cotidiano de nossa convivência nas atividades de professor formador, principalmente na disciplina de Prática de Ensino e de Estágio Supervisionado no curso de Licenciatura em Matemática.

Neste artigo, procuramos aprofundar a análise conceitual dos números racionais extrapolando as idéias artificiais, que na maioria das vezes campeiam os manuais de ensino e o planejamento do Professor de Matemática, onde se destaca somente alguns parâmetros (algumas qualidades).

Nosso propósito é mergulhar na complexidade que é peculiar aos conjuntos numéricos e interagir com a realidade que envolve o campo dos Reais. A intenção é provocar as abstrações capazes de explicar teoricamente a existência desse conjunto, que amplia nosso saber e contribui para incentivar as reflexões e discussões sobre o Ensino da Matemática.

Alicerçados num projeto de pesquisa vinculado ao Programa de Doutorado em Educação da UFMS na linha de pesquisa de Ensino de Ciências e Matemática, que tem como objeto de estudo o Ensino de conteúdos matemáticos por meio de Situações Problematizadoras, procuramos nesse artigo analisar uma situação problematizadora encontrada numa prova de Matemática de Vestibular.

Para fundamentar o trabalho de análise dessa situação problematizadora desenvolveremos as reflexões através da Teoria Antropológica do Didático (TAD), que segundo Chevallard e Bosch (1999) permite analisar, descrever e estudar as práticas institucionais e considera a organização do saber matemático que esta em jogo. A TAD, descreve a atividade Matemática e o saber que dela emerge em termos de organização praxeologias matemáticas (BOSCH, 2000).

Para Chevallard (2002), uma organização Matemática é uma entidade composta por: tipos de problemas ou tarefas problemáticas; tipos de técnicas que permitem resolver os tipos de problemas; tecnologias ou discurso que descreve e explica a técnica; uma teoria que fundamentam e organiza os discursos tecnológicos. Os tipos de problemas e os tipos de técnicas constituem o “saber-fazer” matemático, enquanto que o discurso tecnológico e a teoria compõem o “saber” propriamente dito.

Faremos ainda com que as descrições e as técnicas matemáticas, desenvolvidas durante a análise da situação problematizadora, sejam baseadas nas idéias de Caraça (1989). O autor considera que o conhecimento pode ser encarado sob dois aspectos diferentes:

> Ou se olha para ele como vem exposto nos livros de ensino, como coisa criada, e o aspecto é o de um todo harmonioso, onde os capítulos se encadeiam em ordem, sem contradições. Ou se procura acompanha-lo no seu desenvolvimento progressivo, assistir à maneira como foi sendo elaborado, e o aspecto totalmente diferente – descobrem-se hesitações, dúvidas, contradições, que só um longo trabalho de reflexão e apuramento consegue eliminar, para que logo surjam outras hesitações, outras dúvidas, outras contradições (p. XIII).

Dessa forma, entendemos que o conhecimento humano é uma construção social que se realiza em condições particulares em instituições ou comunidades (na aula sobre a direção de um professor; em determinados programas de estudos, em grupos de estudos etc) (BOSCH, 2000). Isso nos leva a acreditar que não se ensina um conhecimento se constrói interiormente através de ações sobre o objeto de estudo. Portanto, as análises e as descrições contidas neste artigo, é o resultado de estudos acompanhados de muitas reflexões com acadêmicos do Curso de Licenciatura em Matemática e das discussões em Grupos de Estudos.

No desenvolvimento deste artigo, estará exposta a questão em análise, o significado dos números racionais, a análise da questão e a interpretação da solução da questão.

A Questão

Não é comum candidatos reclamarem de questões de Matemática dos vestibulares, mesmo porque, é necessário fundamentar corretamente os motivos da reclamação. Veja a questão:

Na figura estão representados geometricamente os números reais 0, *a, b, e* 1. Qual a posição do número $\frac{b}{a}$?

```
___|_______________|_______|_______|_______
   0               a       b       1
```

Alternativas

a) à esquerda de 0

b) entre 0 e a

c) entre a e b

d) entre b e 1

e) à direita de 1

A resposta correta que constava no gabarito era a alternativa “e”.

As análises e as descrições contidas neste artigo não têm a intenção de reclamar da elaboração da questão, e sim, de interpretar os conhecimentos matemáticos nela contidos, principalmente o conceito de números racionais.

Verifica-se que as idéias matemáticas contidos na questão, exibem a conexão entre números e geometria de uma forma harmoniosa. Historicamente, sempre foi assim, elas não foram construídas isoladas do contexto real, pois sempre é possível fazer, mesmo de forma abstrata, a articulação entre elas. No entanto, nem sempre estudam na escola os conteúdos organizados dessa forma, o que se observa comumente nas aulas são apresentações de definições prontas e sem uma explicação que possa justificar realmente a questão, tal como: “$\frac{b}{a}$ é um número fracionário porque indica a parte de um todo”.

Não consideramos a questão em análise somente um problema, onde se aplica um conhecimento na busca de uma solução, mas uma situação problematizadora, pois, possui uma potencialidade capaz de provocar a discussão de vários conteúdos articulados num determinado contexto.

Para aprofundar os estudos sobre a conceituação dos racionais conectados com a geometria, como propõe a questão em análise, remete nosso entendimento de acordo com a TAD, dessa forma não falaremos em "compreender o conceito", mas em explicar as atividades através de ações (quer dizer de praxeologias) que da vida ao conceito (BOCH 2000).

Significado dos Racionais

Considerando, a explicação do conceito de números um tipo de tarefa, pode destacar varias outras tarefas nele contidas (CHEVALLARD 1999). A seguir resolveremos vários tipos de tarefas que estão ligadas ao conceito de números.

O entendimento sobre números é de idéia de quantidade, e podem ser representadas na forma escrita, ou falada. Assim, quando perguntamos "quantas pessoas residem com você?", obtemos a resposta contando as pessoas e escrevendo ou falando a quantidade. Na explicação lógica da contagem, cada pessoa é um todo e o total de pessoas uma quantidade dita discreta, ou seja, que possui uma identidade definida (individualizada) que significa unidades separadas umas das outras (podem ser contadas). Esse conjunto de números representa os Números Naturais.

No entanto, outras situações também representam um número. Na comparação do comprimento dos segmentos na reta, por exemplo, caso que se relaciona com a questão em análise, tem:

|______________________|

A   B

|___________|

C   D

Se aplicarmos CD sobre AB fazendo coincidir os dois extremos A e C, nesta operação, vê-se que o ponto D "cai" entre A e B (CARAÇA, 1989, p.29).

A situação geométrica apresentada responde à pergunta – quantas vezes o comprimento CD cabe em AB? Usamos aqui um tipo de linguagem adequada ao fato observado que é de suma importância para explicar os procedimentos executados como veremos a seguir.

Responder à pergunta – Quantas vezes? – se faz dando um número que exprime o resultado da comparação com a unidade. Nesse caso, a quantidade é dita contínua – quando é divisível em partes - e o número chama-se medida da grandeza em relação a essa unidade (CARAÇA 1989).

Para esse autor, no problema da medida há três aspectos distintos: escolha da unidade; comparação com a unidade; expressão do resultado dessa comparação com a unidade. A escolha da unidade pode ser aleatória numa medição, no entanto, as grandezas contínuas cientificamente são padronizadas, assim medimos utilizando unidades oficiais: massa; comprimento; capacidade etc.

A unidade esta sempre relacionada com a expressão numérica, no exemplo anterior pode usar o registro da representação numérica: $\frac{AB}{CD}$ ou AB : CD. Se CD= u (unidade), teremos $\frac{2u}{u}$ = 2, onde 2 representa quantas vezes CD cabe em AB. Já a expressão $\frac{AB}{CD}$ é a razão, sinônimo de quociente desses dois números.

Desenvolvendo a técnica anterior podemos reforçar a explicação na comparação que segue:

|___|___|___|___|___|___|___|___|___|___|___|___|

A B

|___|___|___|

C D

Quantas CD cabem em AB? A pergunta poderia ser: quantos três cabem em doze?

É possível exprimir da seguinte forma $\frac{AB}{CD} = \frac{12}{3} = 4$, o que quer dizer a unidade CD cabe 4 vezes em AB, ocorrendo o resultado de uma medição onde 12 é divisível por 3 e $\frac{12}{3}$ coincide com um valor que é o quociente da divisão.

Para Caraça (1989, p. 33), as situações anteriores é uma exceção, o que ocorre com maior freqüência é o caso onde aplicando a unidade sobre AB, sobeja uma porção, PB, de segmento, inferior à unidade.

Vejamos como fica a comparação seguinte:

|____|____|____|____|____|____|____|____|____|____|____|

```
A                                        P         B
 |____|____|____|
C              D
```

A pergunta seria quantos três cabem em onze?

Analogamente à técnica anterior, representamos $\frac{AB}{CD} = \frac{11}{3}$, no entanto, esta razão não existe em números inteiros, pois o número 11 não é divisível por 3, nesse caso, é necessário um novo campo numérico que satisfaça a medição. Para explicar a técnica, partimos da premissa que é possível exprimir, sempre, a medida de um segmento tomado outro como unidade, dessa forma, interpretamos que PB são duas partes das 3 partes representadas por CD (unidade) e daí escrevemos a razão $\frac{PB}{CD} = \frac{2}{3}$ (duas partes das três em que esta dividida a unidade).

Segundo Caraça (1989, p. 36), teoricamente em qualquer das hipóteses anteriores a razão $\frac{AB}{CD}$ é considerada um Número Racional. No entanto, se AB não for divisível por CD diz-se que $\frac{AB}{CD}$ é um Número Racional Fracionário. É possível interpretar então que em $\frac{11}{3}$ cabe 3 unidades CD inteira e a parte fracionária $\frac{2}{3}$ (dois terços) da unidade CD ou que $\frac{11}{3} = 3 + \frac{2}{3}$.

Análise da Questão

Na questão, objeto de estudo, observa que os números representados geometricamente na ordem 0, *a*, *b*, 1, mostra uma reta, contendo os Números Reais onde *a* e *b* encontram-se entre 0 e 1, portanto, $b < 1$ e $a < b$, o que significa que *a* e *b* podem ser racionais fracionários (partes de uma unidade).

A expressão $\frac{b}{a}$, tal como se encontra na questão, significa medir *b* com a unidade *a* ou responder a pergunta: quantas vezes *a* cabem em *b?*

Levando em conta a teoria elaborada anteriormente, podemos simular uma situação real, no esboço geométrico da questão, tal como:

Se $b = \frac{2}{3}$ e $a = \frac{2}{9}$, teremos na reta numerada o seguinte:

|______________|_____________|______________|

0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $b = \frac{2}{3}$ $\qquad\qquad$ 1

|____|____|____|____|____|____|____|____|____|

0 $\qquad$ $a = \frac{2}{9}$ $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ 1

Se temos $\frac{2}{3}$: $\frac{2}{9}$, usando a linguagem anterior, a pergunta então seria quantos $\frac{2}{9}$ cabem em $\frac{2}{3}$?

Geometricamente a resposta é, o $\frac{2}{9}$ cabe 3 vezes no $\frac{2}{3}$. No entanto, é possível explicar o resultado através da técnica algébrica, da seguinte forma: considerando $\frac{2}{3} : \frac{2}{9} =$ X, temos $\frac{2}{3} = X \cdot \frac{2}{9}$ onde X representa quantas vezes o $\frac{2}{9}$ cabe em $\frac{2}{3}$ o que geometricamente representa 3 vezes, ou seja, $\frac{2}{3} : \frac{2}{9} = 3$.

Surge, portanto, uma nova tarefa, explicar a divisão de dois números racionais. Segundo Caraça (1989, p 45) se $\frac{p}{q} : \frac{r}{s} = X$, logo $X \cdot \frac{r}{s} = \frac{p}{q}$ o que representa $X = \frac{p.s}{q.r}$. Observe que se substituirmos X por $\frac{p.s}{q.r}$ na equação $X \cdot \frac{r}{s} = \frac{p}{q}$ podemos comprovar que isso é verdade $\frac{p.s}{q.r} \cdot \frac{r}{s} = \frac{p}{q}$.

De forma análoga à demonstração anterior, podemos reproduzir a idéia na divisão $\frac{2}{3}$: $\frac{2}{9} = X$, sendo que $X \cdot \frac{2}{9} = \frac{2}{3}$ e na seqüência obtemos $X = \frac{2.9}{3.2}$ onde $X = \frac{18}{6}$, portanto X= 3. Ainda podemos representar que $X = \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{2}$ e daí estabelecer como verdade a técnica de resolução que todos os livros didático e professores reproduzem sem uma explicação consistente , ou seja : "para dividir fração, pegamos a primeira e multiplicamos pelo inverso da segunda".

Voltando à interpretação da questão, dizer que $\frac{b}{a}$ = 3 é um número que esta a direita de 1, conforme estabelece o gabarito do vestibular, não tem sentido. O contexto não permite esse absurdo, pois conceitualmente o 3 não tem a natureza de um número inteiro, mesmo porque, esta representando quantas vezes o *a* cabe em *b*.

Após as explicações, entendemos que o resultado de $\frac{b}{a}$ não pode ser considerado uma quantidade discreta ou quantidade individualizada mesmo porque esta relacionada com a medida de *b* pela unidade *a*. Dessa forma, não possui a natureza de grandeza numérica e sim de explicação sobre a operação realizada, portanto, desvinculada de qualquer posição geométrica.

Conclusão

Procuramos demonstrar neste artigo, uma seqüência de ações ou praxeologias, que pudesse explicar uma série de conceitos matemáticos que constitui o conhecimento sobre Números Racionais. Acreditamos ser esse o trabalho do professor orientador da aprendizagem.

Fundamentados na TAD, o que fizemos foi seguir os ensinamentos dessa teoria. Para Chevallard (2002) "ensinar certo tema matemático" é um tipo de tarefa para o professor que, consiste em "ensinar uma organização praxeologica de natureza matemática" que se chama Organização Matemática. Assim, pondera o autor que o problema praxeológico do professor de Matemática é construir praxeologias, e sempre que novo tipo de tarefas se faz necessário constrói novas praxeologias, que se constitui numa Organização (ou praxeologia) Didática.

Nosso objeto de pesquisa esta voltado para a reflexão sobre a construção de ações que deverá se constituir em organizações didáticas capazes de construir o conhecimento matemático através de situações problematizadoras. E dessa forma, procuramos neste artigo fazer uma demonstração de que isso é possível.

Quanto à questão em análise, procuramos caracterizá-la como uma situação problematizadora. Em nossa pesquisa, determinaremos as características de uma situação problematizadora, mas, é possível de forma resumida acrescentar que não se trata de um simples problema, onde a solução é dada sem contradição.

Na análise, pudemos constatar uma contradição nas alternativas propostas com os conceitos expostos sobre os Números Racionais, no entanto, a questão possui uma potencialidade para discussão que não é peculiar a todos os tipos de problemas, por isso consideramos uma situação problematizadora.

Referências

BOSCH, Mariana; CHEVALLARD, Yves. La sensibilité de I' activité mathématique aux ostensifs. In : Recherches en Didactique des Mathématique, 1999 v. 19, nº 1, p. 77-124.

BOSCH, Mariana, Un Punto De Vista Antropologico: La Evolución De Los "Instrumentos De Representación" En La Actividad Matemática (Ponencia en el Seminario de Investigación I sobre Representación e Comprensión). IV Simposio – SEIEM – Huelva, España 2000. http://www.ugr.es/~jgodino/siidm/boletin11.htm

CARAÇA, Bento de Jesus. Conceitos fundamentais da Matemática. 9ª edição. Lisboa: Portugal, Livraria Sá da Costa Editora 1989.

CHEVALLARD, Yves ; BOSCH, MARIANA ; GASCÓN, Josep. Estudar Matemáticas : o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem. Porto Alegre: Artmed, 2001.

CHEVALLARD, Yves. Oraniser l' estud. 1. Structure & Fonctions. Actes de la 11 École d' Été de Didactique des Mathématique. France : La Penssé Sauvage. 2002. Versão eletrônica

GASCÓN, Josep. La Necessidad de utilizar modelos em didáctica de las matemáticas. Publicado na Revista Educação Matemática Pesquisa. EDUC. São Paulo, v.5, nº 2 pp 11-37. 2003.