PROCEDIMENTOS DE VERIFICAÇÃO DE IGUALDADES ALGÉBRICAS POR MEIO DE JOGO DE QUADRO

Adriano da Fonseca Melo
José Luiz Magalhães de Freitas
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

RESUMO: O presente artigo é produto da pesquisa cujo objetivo é investigar dificuldades e possíveis aprendizagens no trabalho com igualdades algébricas por meio dos procedimentos que fazem uso de verificação utilizando jogos de quadros com alunos do 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola da Rede Municipal de Ensino de Campo Grande/MS. O referencial teórico adotado seguiu o que é proposto por Brousseau na Teoria das Situações Didáticas, em relação aos momentos adidáticos e o uso de jogos de quadros proposto por Douady. Para análise das produções dos alunos, além desses autores, foi utilizado o que é proposto por Margolinas em relação ao processo de verificação como uma forma do aluno de realizar a validação de formulações de estratégias para solucionar situações–problema. A metodologia utilizada no desenvolvimento da pesquisa foi realizada nos moldes da Engenharia Didática proposta por Artigue. Os resultados provisórios mostram que os alunos do 9º ano têm algumas dificuldades para distinguir, em alguns casos, os procedimentos para calcular a área e o perímetro de uma figura. Provavelmente, pela baixa frequência de atividades nas quais tenham que analisar a validade de afirmações, justificando suas decisões, eles apresentaram dificuldades com atividades que exigem o raciocínio argumentativo. Esse resultado aponta para a necessidade de ser adotado, com maior freqüência em sala de aula, o uso de atividades envolvendo mais de um quadro matemático, nas quais o aluno possa conjecturar, formular argumentos e justificar suas tomadas de decisões, assim como comunicar a seus pares suas conclusões de forma coerente e respeitando as normas dos textos matemáticos.
PALAVRAS – CHAVE: Jogo de Quadro. Expressões algébricas. Aprendizagem. Verificação.

Considerações iniciais

Observando o desenvolvimento histórico da matemática se percebe que as primeiras civilizações utilizavam elementos aritméticos para solucionar seus problemas do dia a dia. Alguns desses problemas estavam diretamente ligados a divisão de terras com o intuito de ser utilizado para a produção de gêneros necessários para a subsistência das civilizações.

Os babilônios faziam uso de elementos do quadro aritmético para resolver problemas geométricos, como a medição dos lotes ou o cálculo da área equivalente ao imposto devido pelos colonos ou o uso de elementos algébricos para verificar quais os números que atendem a terna pitágorica. É verdade que alguns campos da Matemática tiveram seu desenvolvimento recentemente desenvolvido, mas segundo Aaboe (1984), não podemos negar a existência de traços desses conhecimentos nos cálculos desenvolvidos por civilizações como babilônica, egípcia e ou grega.

Na leitura de livros de história da Matemática se nota que estas civilizações tinham a preocupação de garantir que seus cálculos estavam corretos, assim utilizando as operações aritméticas e/ou representações geométricas verificavam a validade das conclusões referente às informações matemática produzidas, conforme Santos (2007, p.17) assevera em sua dissertação sobre argumentação e prova: análise de argumentos algébricos de alunos da Educação Básica, os Escribas verificavam ou "provavam" que suas divisões estavam corretas através de multiplicações, como também verificavam que uma resposta era correta através da substituição do valor encontrado.

Um outro texto antigo que apresenta uma preocupação em verificar a validade dos resultados são Os Elementos de Euclides. Euclides produz um "manual didático" no qual sistematiza os conhecimentos da época, procurando verificar ou "provar" a validade dos conhecimentos matemáticos produzidos pela civilização grega nos três séculos anteriores a ele. Euclides utilizou de elementos geométricos para estudar a validade de propriedades aritméticas.

O livro II traz, por exemplo, a proposição 4, a qual versa sobre o que conhecemos hoje como o quadrado da soma de dois termos. Utilizando representações geométricas ele verifica a igualdade algébrica $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, em que o a^2 e o b^2 são representados por quadrados e ab como retângulos de medidas a e b, caracterizando, conforme Douady, numa mudança de quadro. A mudança de quadro é um meio para obter formulações diferentes de um problema que permitem um novo acesso às dificuldades encontradas e a aplicação de ferramentas e técnicas que não se impunham na primeira formulação. As traduções de um quadro em outro conduzem frequentemente à resultados não conhecidos, à técnicas novas, à criação de objetos matemáticos novos.

Transportando estas ideias para as práticas educacionais desenvolvidas hoje, percebe-se que mesmo com a orientação dos PCN de Matemática para que o ensino dos conteúdos matemáticos devessem propiciar momentos nos quais os alunos devem verificar e argumentar sobre as validades dos seus cálculos e respectivos resultados, é uma prática pouco utilizada pelos professores, o que é corroborado pelas entrevistas desenvolvidas por Santos (2007) com professores do Ensino Fundamental

> [...] vimos que os mesmos também não se valem desses artifícios, de modo geral, em suas aulas, apenas em alguns poucos momentos utilizam a demonstração para poder explicar ao aluno como chegamos a determinados resultados, as « fórmulas matemáticas ». (SANTOS, 2007, p. 121)

Possível causa do pouco uso de momentos nos quais os alunos trabalhariam com situações-problema em que eles tem que conjecturar e elaborar justificativas lógicas, segundo Carvalho (2007) está ligada à pouca habilidade com o assunto pelo professor e também ao fato dos livros didáticos não apresentarem um subsídio adequado ao professor sobre como esse trabalho deveria ser encaminhado. A ausência desse tipo de trabalho na sala de aula pelos professores, segundo Santos (2007), pode privar os alunos de uma visão mais ampla e de uma educação mais concreta para compreender o funcionamento da Matemática. Ainda,

> É através dela (argumentação e/ou prova) que o aluno poderá fazer suas suposições acerca de uma afirmação, é através dela que o aluno poderá criar processos de dedução para verificar se suas suposições são corretas, é através dela que o aluno irá compreender melhor o universo da Matemática no seu âmbito mais concreto. (SANTOS, 2007, p. 122)

A preocupação em levar o aluno a desenvolver o gosto pela Matemática, levou–nos a desenvolver a pesquisa cujo objetivo de **estudar procedimentos de verificação utilizados por alunos do 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola da Rede Municipal de Ensino, ao realizar cálculos algébricos utilizando os quadros aritmético, algébrico e geométrico.** Para tanto utilizamos como um dos referenciais de investigação a Teoria das Situações Didáticas[1] de Brousseau, a qual propõe uma forma de trabalhar o ensino e a aprendizagem da Matemática, diferente da prática clássica utilizada no Ensino Fundamental. A proposta de Brousseau leva em consideração o meio ao redor do aluno, e sua retroação à ação do aluno, como um protagonista no processo de aprendizagem. Brousseau classificou o agir do aluno no processo de aprendizagem, em três dialéticas: ação, formulação e validação as quais ocorrem simultaneamente.

A primeira dialética é a de ***ação***, em que o aluno elabora estratégias a partir do "jogo"[2] ao qual está inserido. A situação de ação deve possibilitar ao aluno julgar o resultado de sua ação e caso seja necessário ajustá-lo, sem a participação do professor, essa fase provoca uma aprendizagem por adaptação.

A segunda dialética é a de ***formulação***, em que o aluno procurará, progressivamente, desenvolver uma linguagem que seja compreensível pelos seus interlocutores e para tanto utilizará de sinais e regras comuns, conhecidas ou novas. De acordo com Brousseau (2008):

> [...] a formulação de um conhecimento corresponderia a uma capacidade do sujeito de retomá-lo (reconhecê-lo, identificá-lo, decompô-lo e reconstruí-lo em um sistema lingüístico). O meio que exigirá do sujeito o uso de uma formulação deve, então

[1]No texto utilizaremos TSD para Teoria das Situações Didáticas.
[2] Jogo, nesse contexto, é entendido como uma situação didática a qual o aluno está envolvido com a responsabilidade de resolver uma dada situação-problema.

> envolver um outro sujeito, a quem o primeiro deverá comunicar uma informação. (BROUSSEAU, 2008, p. 29)

A terceira dialética é a de ***validação***, na qual o aluno explicita a validade do modelo criado por ele. O aluno deixa de ser um informante para ser um proponente de sua idéia a um oponente, que poderá solicitar que demonstre ou detalhe melhor sua estratégia. Conforme Brousseau (2008)

> [...] o emissor já não é um informante, mas um proponente, e o receptor, um oponente. Pressupõe-se que possuam as mesmas informações necessárias para lidar com uma questão. Colaboram na busca da verdade, ou seja, no esforço de vincular de forma segura um conhecimento a um campo de saberes já consolidados, mas entram em confronto quando há dúvidas. [...] Cada qual pode posicionar-se em relação a um enunciado e, havendo desacordo, pedir uma demonstração ou exigir que o outro aplique suas declarações na interação com o meio. (BROUSSEAU, 2008, p. 30)

Na situação didática, cabe ao professor, ao final dos debates nas duplas ou nos grupos, conduzir a socialização e assim institucionalizar o conhecimento produzido pelos alunos, ou aproximando do saber já institucionalizado pela academia.

Outro referencial que utilizamos nesta pesquisa é a noção de jogos de quadros[3] da Matemática. Douady (1986) propõe que o professor ao elaborar uma situação problema pode criar situações, nas quais os alunos são conduzidos a trabalharem com diferentes domínios matemáticos. Douady (1986, p. 389) caracteriza um quadro como: *um quadro é constituído de ferramentas de uma parte da matemática, de relações entre os objetos, suas formulações eventualmente diferentes e de imagens mentais associadas a essas ferramentas e relações.* Neste trabalho utilizaremos os quadros aritmético, geométrico e algébrico.

Os jogos de quadros são mudanças de quadros provocadas por iniciativa do professor para fazer avançar as fases de investigação, favorecendo a evolução da aprendizagem de conceitos pelos alunos. Neste caso, o jogo de quadros conduz frequentemente a resultados não conhecidos, a estratégias novas, à criação de objetos matemáticos novos. O uso deste conceito na pesquisa tem como objetivo principal que alunos, ao realizarem jogo de quadros, possam validar algumas identidades algébricas.

Em nossa experimentação apresentamos atividades visando o trabalho com a verificação da validade de alguns resultados, o que pode provocar desequilíbrio e permitir a estruturação dos conhecimentos. A comunicação entre os quadros e em especial a comunicação com um quadro auxiliar de representação é um fator de reequilibração. A reequilibração pode ser um fator de validação das identidades algébricas.

[3] Jeux des Cadres traduzimos como jogos de quadros.

Margolinas (1993) apoiando-se nas ideias de Balacheff afirma que

> poderíamos considerar processo de verificação como a sequência de ações que conduz o aluno (sozinho ou com ajuda) quando ele procura se assegurar por uma ação da validade de um resultado e ou tentar modificar suas ações ou raciocínios que o conduziram a propor o resultado. (MARGOLINAS, 1993, p.168, tradução nossa).

Entendemos que o aluno no Ensino Fundamental precisa inicialmente ter consciência e autonomia de buscar ferramentas matemáticas que lhe permita verificar a validade de suas respostas e no caso de identificar erros realizar a retificação dos procedimentos de forma que possa validar suas decisões, concepção que está em consonância ao proposto pelo PCN. Conforme Margolinas (1993) o processo de verificação configura uma parte da fase de validação, sendo assim buscamos realizar atividades nas quais os alunos pudessem tomar a decisão de realizar a verificação por meio do jogo de quadro em um processo de ida e volta entre os quadros. A mudança de quadros pode levar o aluno a construir a aprendizagem, quando constrói novos conhecimentos ou reinveste conhecimentos já estudados.

No que concerne à parte experimental da coleta de dados utilizamos elementos metodológicos nos moldes do que é proposto na **Engenharia Didática**, conforme Michèle Artigue**.**

A experimentação em sala de aula

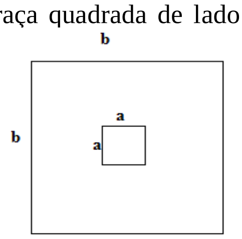
Para dar uma idéia da parte experimental de nossa pesquisa, optamos por apresentar neste texto as análises a priori e a posteriori de uma atividade aplicada durante a segunda sessão de nossa sequência didática, com alunos do 9º ano do ensino fundamental de uma escola da rede municipal de ensino da cidade de Campo Grande - MS.

A atividade tem o objetivo de propiciar ao aluno a retomada dos conceitos de área e perímetro como ferramenta para verificar a validade das igualdades algébricas do tipo

$(a – b)(a + b) = a^2 - b^2$.

Atividade 2 – Um professor pediu aos alunos que resolvessem o seguinte problema:

No centro de uma praça quadrada de lado **b**, será construído um canteiro quadrado de lado **a**, como mostra a figura:



a) Qual é a expressão que representa a área da praça, que ficou fora do canteiro?

Alguns alunos deram as seguintes respostas para o item **a**, porém nem todos acertaram:

Ana $b^2 + a^2$	João $b(b-a) + (b-a)a$	Paulo $2b + 2a$
Lucas $2a(b-a) + (b-a)^2$	Lúcia b^2-a^2	Bia $b^2 - 4a$

b) Quem acertou a resposta? Justifique.

No **item a** da **atividade 2** espera-se que o aluno inicie pelo cálculo da área da praça, determinando a área total (b^2) e depois a do canteiro (a^2) que deverá ser subtraída da área total obtendo b^2-a^2. Outra forma de calcular a área da praça seria deslocar o canteiro para um dos cantos, formando assim dois retângulos cujas medidas são b(b-a) e (b-a)a, obtendo o mesmo resultado. Ainda poderá deslocar para um canto e decompor o retângulo correspondente à praça em um quadrado de lado b-a, e dois retângulos de medidas a(b-a), obtendo assim $(b-a)^2 + a(b-a)+a(b-a)$, que resulta em $b^2-2ab+a^2 + 2ab-2a^2 = b^2-a^2$ (**cálculo algébrico).** Após realizarem um dos cálculos acima se espera que apontem que acertaram os alunos Lúcia, João e Lucas, utilizando os cálculos realizados anteriormente no item **a** para justificar sua resposta.

Outra forma de justificar é atribuindo **valor numérico** para **b** e **a** tanto na figura como nas expressões dadas no item **b,** por exemplo: a = 6 e b = 2, encontrando como área total da praça 6.6 = 36 e área do canteiro 2.2 = 4, subtraindo da área da praça a área do canteiro obtendo 36 – 4 = 32 u.a, a seguir substituindo nas expressões do item **b** teremos (Ana $\rightarrow$ $6^2 +2^2 = 36 + 4 = 40$; João$\rightarrow$6.(6 - 2) + (6 - 2)2 = 6.4 + 4.2 = 24 + 8 = 32; Paulo$\rightarrow$ 2.6 + 2.2 = 12 + 4 = 16; Lucas$\rightarrow$ $2.2(6-2) + (6-2)^2 = 4.\ 4 + 4^2 = 16 + 16 = 32$; Lúcia$\rightarrow$ $6^2-2^2 = 36 – 4 = 32$; Bia $\rightarrow$ $6^2 - 4.2 = 36 – 8 = 28$) determinando assim que somente as respostas apresentadas por Lúcia, João e Lucas são corretas.

Por último, como um outro tipo de reposta, poderá o aluno dizer que os três aceitaram e responder dizendo que sim (**ausência de justificativa**). Diante de respostas desse tipo o pesquisador deve questioná-lo, perguntando por quê? Ou como você descobriu?

O aluno poderá responder errado se calcular a área da praça, mas esquecer de subtrair a área do canteiro. Ainda, o aluno poderá errar sua resposta ao tentar resolver as expressões dadas no item **b**, não aplicar a **propriedade distributiva** e assim realizar a soma algébrica obtendo um resultado incorreto.

Análise de Produções dos Alunos

Analisando as respostas dos sujeitos da pesquisa percebe-se que eles tiveram mais dificuldade para resolver o item **b** do que o item **a**. Foi observado que os alunos, ao resolverem o item **a,** encontram de imediato a mesma resposta na tabela, o que fez com que eles não tentassem verificar as outras respostas apresentadas na tabela para ter certeza se não havia outras corretas. Assim, fez-se necessário solicitar a eles que apresentassem alguma justificativa que indicassem as outras como respostas erradas para a área da figura do item **a**, levando-os a realizarem a verificação das outras respostas.

Nessa atividade pudemos perceber que ocorreram alguns tipos de respostas divergentes entre eles. O aluno **A4**[4] resolveu o item **a** utilizando símbolos matemáticos para explicar como pensou para resolver a atividade.

> **a)** A expressão será b^2 **-** a^2, pois para saber a área temos que multiplicar base vezes *altura*, mas como há o canteiro dentro da área temos que subtrair a área do canteiro.

Esse aluno utiliza a notação simbólica algébrica e a seguir descreve passo a passo como fez para encontrar a solução. De acordo com a Teoria das Situações Didáticas ele formulou sua comunicação buscando ser compreendido pelos seus interlocutores. No momento de resolver o item **b** ele opta atribuir valores numéricos para as letras **a** e **b**, mudando do quadro algébrico para o quadro aritmético, conforme pode ser observado

> Três estão certas, então supomos que a = 2 e b = 5 então é só substituir
> Lucas $2. 2 (5 – 2) + (5 -2)^2 = 21$
> João $5 (5 - 2) + (5 – 2) a = 21$
> Lúcia $5^2 - 2^2 = 21$
> Essas 3 estão certas.

Ele, para validar seus cálculos, substitui as letras da figura pelos valores numéricos utilizados no item **b** e assim, verificando que os três alunos seriam os únicos que expressaram corretamente a nova área da praça.

A ação de um meio antagônico, no caso os colegas fizeram o mesmo, ao buscar a estratégia de mudança de quadro, pois inicialmente ele tinha apresentado, para o item **b,** a seguinte reposta

> Só a Lúcia está certa, pois ela fez o processo correto, fez a área maior menos a área do canteiro.

Nesta atividade, o aluno **A4** e o aluno **A6** dialogaram alguns minutos buscando verificar as respostas apresentadas por cada um ao item **b**. Brousseau (2008) observa que este papel do proponente de uma estratégia e a reação do oponente levam a nova ação na busca de formular nova estratégia e assim verificar a validade de sua resposta, uma vez que neste momento ambos já haviam produzido uma estratégia. O diálogo foi uma situação provocada pelo pesquisador que ao ser questionado sobre o número de respostas corretas ele remeteu a turma a questão do significado do termo “nem todos acertaram”, pois isso poderia significar que havia uma resposta correta ou mais de uma e, para terem esta certeza, precisavam analisar com cuidado todas as respostas.

[4] Optamos por indicar os sujeitos da pesquisa por A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7 e A8.

O aluno **A6** identificou inicialmente o que seria a praça e o canteiro no desenho. A seguir realizou a passagem do quadro geométrico para o quadro algébrico para expressar a área final da praça o que lhe representou ser fácil, em relação ao item **b**, pois inicialmente tinha feito a comparação do seu resultado para o item **a** indicando que a Lúcia era a única que tinha acertado, como podemos observar abaixo

> Lúcia, porque a área da praça é b . b = b² e a área do canteiro a . a = a², como não quer saber com o canteiro pegamos a área da praça e diminuímos a área do canteiro, ficando b² - a².

No momento do diálogo com o **A4** e que o pesquisador questionou sobre o número de respostas corretas, ele foi induzido a realizar mais uma mudança de quadro, agora do quadro algébrico para o numérico. O aluno inicialmente atribuiu valor numérico para as letras **a** e **b**, a seguir substituiu no item **a** as letras pelos números, encontrando um valor numérico que lhe serviu de referencial para comparar os resultados do item **b,** concluindo assim que a Lúcia, João e Lucas tinham acertado, conforme podemos observar abaixo

Paulo
2 . 20 = 40 +
2. 10 = 20 = 60

Lucas
2 . (10) = 20 . 10 = 200 +
10 . 10 = 100 = 300

Bia
b² = b. b = 20 . 20 = 400 -
4 . 10 = 40 = 360

a) b² - a²

20 , 20 = 400 – 10 . 10 = 100 = 300

b) Lúcia porque a área da praça é b . b = b² e a área do canteiro a . a = a², como não quer saber com o canteiro pegamos a área da praça e diminuimos a área do canteiro, ficando b² - a².

João, porque trocando valores de B = 20, A = 10, são 2 vezes o A = 20, o 20 multiplica por 20 -10 = 10

20 . 10 = 200, o 200
soma por o 10
b-a (20 10) = 10²
10 . 10 = 100, então
200 + 100 = 300.

Bia x
2 . 2 =4 – 12 = 8

João
2 . (2-3)
2 . 1 = 2
(2 – 3) . 3
1 . 3 = 3
2 + 3 = 5

Paulo
2 . 2 = 4
+
2 . 3 = 6
4 + 6 = 10

Lucas
2 . 3 = 6
6 . 1 =6
1 + 1 = 2 + 6 = 8

Lucas, porque trocando os valores ... 2a = 2 . 10 = 20 (20 -10) = 10, logo, 20 . 10 = 200 + b – a = (20 – 10) 10= 10², sendo 10 . 10 = 100, somando 200 + 100 = 300

Percebe-se que ocorreu uma reformulação de sua estratégia numérica, caracterizando, de acordo com a TSD ele procurou validar sua formulação o que não lhe foi possível, levando-o a nova ação que resultou em uma nova formulação, sendo validada ao comparar com o resultado do item **a**. Em relação ao conhecimento matemático, o aluno possivelmente teve dificuldade para o trabalho com resultado negativo, no caso do valor numérico do João, tanto é que ele reformula seus valores atribuídos para **a** e **b,** números que lhe possibilitasse evitar resultados negativos, como podemos observar na segunda formulação concernente ao João.

Nesta atividade houve alunos que acertarem o item **a** porém erraram o item **b**, apresentando respostas que indicam indícios de dificuldades para manipular com símbolos matemáticos, expressando procedimentos de cálculos. O aluno **A5** ao resolver o item **a** respondeu

a) $b^2 - a^2$
b^2 = praça
a^2 = canteiro

$\underset{\text{praça}}{b^2} - \underset{\text{canteiro}}{a^2}$

Percebe-se que esse aluno conhece a fórmula para calcular a área de figuras retangulares e seus registros demonstram que realizou a mudança do quadro o geométrico para o quadro algébrico. Entretanto, ele não sentiu necessidade de utilizar quadro numérico para verificar se suas formulações estavam corretas, provavelmente por não ter o costume de realizar atividades que solicitam verificar a validade de seus resultados, certamente induzido pelas atividades propostas pelo livro adotado.

No item **b** o aluno **A5** realizou o seguinte registro

b) Lúcia. Porque ela representou a área da praça e subtrai a área do canteiro assim ela poderia chegar a um resultado: b^2 (praça) – a^2 (canteiro).
praça – canteiro = $b^2 - a^2$
Lucas . $2a(b - a) + (b - a)^2$
representa a área do canteiro
representa a área da praça menos a do canteiro
Bia $b^2 - 4a$
área praça
área canteiro

Ao iniciar as atividades, o aluno demonstra ter conhecimento matemático suficiente para calcular a área de figuras retangulares. Entretanto, observa-se que esse conhecimento não foi suficiente para verificar a validade de todas as expressões, pois ele indica, de forma equivocada, os elementos da expressão que compõem as anotações do Lucas. Percebe-se que ele estabeleceu uma formulação que lhe possibilitasse responder a pergunta, porém não teve a preocupação de validá-la. Provavelmente, isso tenha ocorrido pelo fato dele não ter familiaridade com situações nas quais deveria formular estratégias, em que a mudança de quadro o conduzisse a verificar a validade das formulações proposta nas atividades.

Outro aluno que respondeu corretamente a primeira parte da atividade foi o **A7**, que apresentou o seguinte registro

a) $b^2 - a^2$

Esse aluno realizou a mudança do quadro geométrico para o quadro algébrico, utilizando o registro simbólico de suas produções para calcular a área de figuras retangulares, conforme medidas dos lados indicadas na figura. Nesta fase não ficaram claras as suas formulações, bem como possíveis validações das suas ideias para obter suas soluções.

No item **b** o aluno apresentou a solução na forma retórica explicando o procedimento para calcular a área da praça, este tipo de solução assemelha muito ao que é proposto nos manuscritos das civilizações Babilônicas, Mesopotâmica e Egípcia.

> **b)** Lúcia e Lucas, Lúcia fez a área dos dois quadrados e subtraiu o menor do maior, Lucas ao subtrair b – a já tirou o que ia sobrar do canteiro depois só multiplicou por 2 para dar a área do canteiro a. Paulo porque ele colocou os lados que iam sobrar somente somando os valores, já multiplicados por 2.

Possivelmente, o trabalho didático desenvolvido nas aulas e proposto pelo livro didático não propicia momentos nos quais os alunos realizem verificação de suas formulações. Dessa forma a preparação das atividades levou em consideração os conhecimentos prévios dos alunos em relação aos conceitos de área e perímetro, de acordo com Brousseau (1986), ao modelar, o professor deve criar atividades nas quais os alunos reconhecem semelhança com situações já vividas pelos mesmos.

O aluno **A8** identifica o canteiro e a praça na figura do enunciado e não utiliza esta informação para calcular a área da praça após construção do canteiro. Entretanto, esse aluno apresenta conhecimentos básicos para iniciar a atividade, pois no item **a** ele inicia realizando a soma de dois lados do quadrado maior, mas esta formulação é descartada, indicando que tenta validar suas ações.

> a) ($\cancel{B +}$B) [5]
> B^2

Analisando a segunda parte da atividade percebe que o aluno **A8** cometeu alguns erros em relação à manipulação algébrica, pois o mesmo confundiu a soma de termos semelhantes com o produto de termos semelhantes. Não podemos dizer que o **A8** não conhece o procedimento para calcular a área de figura retangular, pois ele anota a área da praça e do canteiro sem, entretanto, realizar a subtração das mesmas.

> a) ana: $b^2 + a^2 = b.b + a.a$
> Lucas: $2a(b-a)+(b-a)^2=2ab-a+b^2-a^2=2\ a^5+b^3$
> João: $b(b-a)+(b-a)a = BB-a+b-aa=b^2-a+b-a^2$ (certo)
> Lucia: $b^2-a^2= b.b-a.a$ (certo)
> Paulo: $2b+2^a = BB+AA = b^2 + a^2$ (certo)
> Bia: $b^2 - 4^a = b.b - a^4 = b^2 - a^4 = bb-aaaa$

---

[5] O aluno inicialmente escreve a soma e a seguir B²

O aluno **A3,** no item **a,** registra sua resposta utilizando a linguagem natural, "*a expressão é que área da praça ficou menor do que o canteiro*", comparando com a resolução do item **b** no momento de justificar a escolha da resposta da Ana. Esse aluno conclui que para obter a área do quadrado deve somar os lados. Provavelmente este aluno confundiu o conceito de área com o de perímetro, conforme foi observado por Teles (2007) em sua pesquisa.

O aluno **A2** errou o cálculo ao indicar a área como sendo $b^2 + a^2$, comprometendo assim sua resposta ao item **b**, conforme podemos observar

> a) $b^2 + a^2$
> b) Lúcia: o calculo que esta na tabela é igual a resposta da Lúcia
> Paulo: Ele soma b+b, a+a que também esta certo
> Ana: a única diferença que ela soma.

Provavelmente, o aluno cometeu o mesmo erro no item **a,** pois não percebe que a área do canteiro deveria ser subtraída da área da praça. Comparando com o item **b,** observa-se que, aparentemente ele consegue simplificar termos semelhantes, como se observa na justificativa concernente ao Paulo o aluno **A2** expressa a expressão algébrica 2b + 2a como sendo b+b e a+a.

O aluno **A1** inicialmente apresenta uma resposta que na fase de validação se mostra ineficaz, levando-o a reformular sua resposta. Este aluno utiliza as expressões do item **b** para identificar a resposta correspondente à área da praça menos o canteiro e para tanto ele recorre aos conhecimentos anteriores sobre o conceito de área de uma figura retangular. Ainda é possível notar que durante sua formulação ele não utiliza outros quadros para analisar suas respostas, isto é, o aluno utiliza o quadro geométrico para conceituar área e compara as expressões dadas com este conceito, conforme podemos observar no protocolo seguinte

> a) Lúcia $b^2 - a^2$ /Bia $b^2 -4a$ /Lucas $2a(b-a)+(b-a)^2$
> b) Quem acertou a resposta foi Lúcia, pois a área é calculada base x altura, e também quem acertou foi a Bia, e também o Lucas, pois o centro da praça é a metade do canteiro inteiro, e cada um deles pegou duas x a base e a altura e subtraiu, pois a praça é menor do que o canteiro inteiro.

A resposta apresentada pelo aluno demonstra uma busca em retificar sua formulação, de tal forma que possa corrigir o possível erro detectado pelo mesmo. De acordo com Margolinas (1993) o aluno, ao identificar por si mesmo um erro na formulação, está exercendo sua condição de aluno autônomo capaz de utilizar seus conhecimentos para realizar a verificação de uma situação problema. Esta característica observável na escrita deste aluno, não é algo exclusivo dele, mas detectado na produção dos outros alunos.

Como uma síntese conclusiva, foi possível observar que os alunos participantes dessa pesquisa demonstraram conhecer conceitos geométricos e aritméticos, porém como já apontado por Cárdia (2007) alguns alunos tiveram dificuldade para diferenciar o procedimento para calcular a área daquele utilizado para calcular o perímetro. Esta dificuldade exigiu intervenções individuais nas quais o pesquisador remeteu os alunos a pesquisas em livros didáticos como forma de retomar os conceitos de área e perímetro. Possivelmente, pelo fato do livro utilizado não trazer atividades nas quais os alunos tenham que verificar a validade de resultados apresentados, ou apresentar atividades nas quais são convidados a resolver utilizando mudança de quadros, nota-se que alguns alunos tiveram dificuldade para realizar a verificação das igualdades algébricas. Para esses alunos a atividade caracterizou um momento de aprendizagem dos conhecimentos matemáticos levando-os a discutirem sobre as resoluções e assim confrontar suas decisões tomadas. Finalmente sugerimos que os professores insiram em suas aulas atividades nas quais os alunos possam utilizar diferentes quadros matemáticos para elaborarem suas ações e assim verificar a validade dessas ações.

Referências Bibliográficas

AABOE, A. **Episódios da História Antiga da Matemática**. Rio de Janeiro, SBM, 1984.

ARTIGUE, M.. **Ingénierie didactique**. Recherches en Didactique des Mathématiques, vol. 9, n°3, pp. 281-307. La Pensée Sauvage, 1989.

BAUMGART, J. K. **História da álgebra**. Tradução de DOMINGUES, H. H., São Paulo, Atual, 1992.

BOYER, C., **História da Matemática**. Tradução de GOMIDE, E. F., São Paulo, Edgar Blücher, 1994.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.** Terceiro e quarto ciclo. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BROUSSEAU,G. **Fondements et méthodes de la didactique des Mathématiques.** Recherches en Didactique de Mathématiques. Vol. 7 Nº 2. pp 33-115. 1986.

__________________. **Introdução ao estudo das situações didáticas:** conteúdo e métodos de ensino**.** São Paulo, Ática, 2008

CÁRDIA, L. F. **Integrando a geometria com a álgebra na construção de expressões algébricas**. 2007. 201f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). PUC-SP.

CARVALHO, C. C. S. **Uma análise praxeológica das tarefas de prova e demonstração em tópicos de álgebra abordados no primeiro ano do Ensino Médio**. 2007. 163f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), PUC-SP.

DOUADY, R.. **La ingenieria didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento.**, **in.** GÓMEZ, P., **Ingenierie didáctica en educación matemática.** Bogotá, Iberoamérica, 1995.

____________. **Jeux Cadre et dialectiques outil-objet. Recherche en Didáctique des Mathématiques.** Grenoble. La Penseé Sauvage-Éditions, v. 7.2, p. 5-31. 1986.

MARGOLINAS, C.. **De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques**. Grenoble-França, La Pensée Sauvage, 1993.

SANTOS, J. B. S. **Argumentação e Prova:** análise de argumentos algébricos de alunos da educação básica. 2007. 145f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) PUC- SP.

TELES, R. A. de M. **Imbricações entre campos conceituais na matemática escolar:** um estudo sobre as fórmulas de área de figuras geométricas planas. 2007. 297f. Tese (Doutorado) Programa de Pós-Graduação em Educação. UFPE.