A DEVOLUÇÃO DO PROBLEMA: "COMO RESOLVER UM SISTEMA LINEAR?"

Aparecida Santana Chiari[1]
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
José Luiz Magalhães de Freitas[2]
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

Resumo: Este artigo refere-se a uma pesquisa, em nível de mestrado, que tem por objetivo investigar a utilização do escalonamento na resolução de sistemas lineares por alunos do ensino médio. Para que o objetivo geral seja atingido, elencamos dois objetivos específicos: investigar o uso do escalonamento na resolução de sistemas lineares por alunos do ensino médio e investigar a elaboração das operações elementares para a obtenção de sistemas lineares equivalentes. Os dados foram coletados a partir da observação de situações de estudo e da análise da produção de alunos que atuaram sobre uma sequência didática. Os sujeitos de pesquisa foram selecionados segundo o critério de assiduidade. Os alunos que participaram da pesquisa cursavam o primeiro ano do ensino médio de uma escola estadual localizada na cidade de Campo Grande. O referencial teórico para análise desta pesquisa é a Teoria das Situações Didáticas e nos inspiramos na Engenharia Didática para, metodologicamente, materializá-la. Neste texto trouxemos uma atividade aplicada duas vezes durante a experimentação, em momentos distintos, acompanhada de sua análise *a priori* e de suas análises *a posteriori*. Os diálogos e as produções escritas que estão neste texto mostram o quanto as duplas evoluíram em relação ao uso das operações elementares para a obtenção de sistemas escalonados. No momento em que a atividade foi aplicada pela primeira vez, eles manifestaram o pensamento de ser necessário isolar uma variável, entretanto não dispunham de estratégias para isso. Após o trabalho com atividades em que as operações elementares foram exploradas bem como alguns sistemas a serem escalonados foram propostos, os alunos desenvolveram habilidades e estratégias necessárias para efetuar o escalonamento visando a resolução de sistemas lineares.

Palavras-chave: Escalonamento. Ensino Médio. Aprendizagem.

Considerações Iniciais

Iniciamos este artigo enfatizando que as dificuldades de aprendizagem bem como as deficiências no ensino da Matemática constituem, há algum tempo, preocupação para os estudiosos que investigam questões inerentes à aplicação de metodologias no ensino desta ciência (PAZ JÚNIOR, 2008). Nosso trabalho poderia ser visto, portanto, como mais um exemplo dessa preocupação.

[1] Mestranda do Programa de Pós-graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul e bolsista da CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior. Contato: cidach@gmail.com

[2] Professor Doutor do Programa de Pós-graduação em Educação Matemática da Universidade de Mato Grosso do Sul e orientador desta pesquisa. Contato: jluiz@dmt.ufms.br

A situação do Brasil em avaliações internacionais melhorou um pouco nos últimos dois anos. Segundo o site do INEP, em 2010, na avaliação feita pelo PISA, Programa Internacional de Avaliação de Alunos, o Brasil ficou em 53º num ranking de 65 países. Na avaliação anterior, conseguimos o incômodo 54º lugar entre 57 países avaliados. Embora tenha havido avanço, ainda temos que melhorar muito.

Este é um dos fatores que nos motivou a investigar a problemática do ensino e da aprendizagem da Matemática. Fazendo os recortes necessários para uma pesquisa de mestrado, nossa investigação se concentrou no tema Sistemas Lineares pelo fato de poderem ser solucionados com operações elementares da Matemática e também por terem aplicações em outras áreas, inclusive na área computacional, que está em evidência no momento.

O ensino médio foi escolhido como recorte de pesquisa por dois principais fatores. Em primeiro lugar, o tema de estudo é explorado na segunda série desta etapa da educação básica. Além disso, o livro didático é, na maioria dos casos, a única fonte de referência com que conta o professor para organizar suas aulas, e até mesmo para firmar seus conhecimentos e dosar a apresentação que fará em classe (LIMA, 2001); e sabemos que, diferentemente dos livros destinados ao ensino fundamental, há um número muito menor de livros didáticos para o ensino médio que se preocupam ou proponham atividades que envolvam diferentes contextos e abordagens.

Voltando ao tema de estudo, os sistemas lineares, destacamos que existem diversos métodos de resolução destes (BATTAGLIOLI, 2008), dentre os quais podemos citar o da adição, eliminação de Gauss, conhecido por método do escalonamento, substituição, regra de Cramer, que utiliza determinantes, entre outros. Nesse contexto, Pantoja (2008, p.18) afirma que

> o estudo de sistemas no ensino básico e mais precisamente no ensino médio se restringe ao emprego de técnicas oriundas do estudo prévio de matrizes sem conexão com as técnicas estudadas no ensino fundamental, quebrando a seqüência desejável de construção do conhecimento matemático.

Pelo fato do estudo de sistemas lineares se restringir ao emprego de técnicas oriundas do estudo prévio de matrizes, como afirmou a autora, interpretamos que o ensino médio esteja priorizando essencialmente a Regra de Cramer como método de resolução de sistemas lineares. Todavia, no desenvolvimento histórico deste conteúdo, sistemas lineares eram resolvidos sem ao menos mencionar-se os conceitos relacionados a determinantes. Segundo Iezzi apud Battaglioli (2008), provavelmente os chineses foram os primeiros a resolver um sistema linear de forma sistemática, por volta do século III a.C., mas foi somente em 1683 que a ideia de determinante veio à luz.

Dentre as técnicas de resolução, nossa pesquisa tem como foco a utilização da técnica do escalonamento, pois a vemos como procedimento eficaz, que resolve qualquer caso de sistema linear, o que não acontece com a regra de Cramer, que pode ser aplicada somente para os casos em que a matriz associada ao sistema linear é quadrada e seu determinante diferente de zero.

Além das justificativas apresentadas, julgamos importante ressaltar que, segundo nossa concepção, o conhecimento não é algo pronto que possa ser repassado, mas sim dinâmico, que está em construção, e que, além disso, essa construção deve ser realizada principalmente pelo aluno, num processo no qual o professor tem o papel importante, mas não principal, de mediar essa construção e propor situações que favoreçam que isso aconteça.

A partir das justificativas de nossa investigação e de nossa concepção de ensino e de aprendizagem, nos questionamos sobre ***quais situações podem contribuir para que os alunos construam o processo do escalonamento visando a resolução de sistemas lineares***, ou seja, como esse processo pode ser construído, pelos alunos, por meio da exploração de situações que envolvam esse conteúdo matemático?

Com a finalidade de encontrar resposta para esta questão, e ainda com base nas justificativas apresentadas, definimos o seguinte objetivo geral de pesquisa: ***investigar o uso do escalonamento na resolução de sistemas lineares por alunos do ensino médio.***

Para responder ao objetivo geral, elencamos dois objetivos específicos. O primeiro consiste em ***investigar a elaboração das operações elementares para a obtenção de sistemas lineares equivalentes por alunos do ensino médio***, pois estávamos interessados em descobrir se os alunos compreendem que as transformações elementares transformam os sistemas em outros equivalentes, não alterando, dessa forma, sua solução. De posse dessa compreensão, conjecturamos que os alunos sejam capazes de utilizar as transformações elementares visando o escalonamento dos sistemas lineares.

O segundo objetivo específico consiste em ***analisar dificuldades e superações encontradas pelos alunos no uso das transformações elementares para resolver sistemas lineares***. Acreditamos que, sabendo utilizar adequadamente as transformações elementares, os alunos sejam capazes de elaborar o processo de escalonamento a fim de obter sistemas lineares equivalentes aos propostos, entretanto na forma escalonada, cujo processo de resolução é mais simples. À medida que esse processo vai sendo construído, os alunos devem passar por fases de erros e superações e, a partir da análise dos mesmos, poderemos entender se e como acontece o processo de aprendizagem referente a esse conteúdo.

Referencial Teórico-Metodológico

Para responder os objetivos específicos e, por conseguinte, o objetivo geral, nos apoiamos nas ideias e conceitos da ***Teoria das Situações Didáticas***, proposta por Guy Brousseau. Segundo Freitas (2008), essa teoria trata de formas de apresentação, a alunos, do conteúdo matemático, possibilitando melhor compreender o fenômeno da aprendizagem da Matemática. O autor afirma que, segundo essa concepção, o professor deve efetuar não a simples comunicação de um conhecimento, mas devolução de um bom problema. Entendemos por devolução o ato de os alunos aceitarem “entrar no jogo”, ou seja, tomarem o problema proposto pelo professor como se fosse um desafio pessoal.

Havendo a devolução, os alunos podem passar por algumas etapas que constituem as situações adidáticas. Uma situação adidática é dividida em três fases distintas, porém interligadas: ação, formulação e validação. Posteriormente, temos a situação de institucionalização.

Para provocar a devolução e o aparecimento de situações adidáticas, propomos aos alunos algumas situações-problema envolvendo sistemas lineares para que eles interagissem e formulassem respostas aos nossos questionamentos. Com a finalidade de estruturar um modelo para apresentação dessas situações, nos inspiramos nos elementos e conceitos da ***Engenharia Didática***, metodologia de pesquisa que consiste em um processo empírico, no sentido que deve extrair os dados da realidade e os comparar às hipóteses levantadas no início do trabalho (Machado 2008).

Nesse sentido, uma de nossas hipóteses é a de que os alunos são capazes de construir o processo do escalonamento à medida que interagem com situações elaboradas nos preceitos da teoria escolhida e propostas com esse objetivo.

Segundo Machado (2008), essa metodologia se constituiu com a finalidade de analisar as situações didáticas e, portanto, se insere nesse quadro teórico da Didática da Matemática. Distinguimos quatro fases da Engenharia Didática, a saber: análises preliminares, concepção e análise *a priori*, experimentação e análise *a posteriori* e validação.

Nas análises preliminares, o pesquisador deve realizar estudos sobre o tema pesquisado com a finalidade de compreendê-lo em seus diversos aspectos. Em nosso trabalho, realizamos estudos focando, principalmente, cinco vertentes: estudo histórico, estudo matemático, análise de livros didáticos, análise de documentos oficiais e análise das dificuldades dos alunos em relação ao tema sistemas lineares.

A fase de concepção e análise *a priori* caracteriza-se, inicialmente, pela construção de uma sequência de situações-problema que são aplicadas para os alunos participantes a fim de responder ao problema da pesquisa e validar as hipóteses levantadas nas análises preliminares. Além disso, escolhemos as variáveis didáticas que consideramos pertinentes. Na análise *a priori*, devemos mostrar como as escolhas das variáveis podem alterar o comportamento dos alunos.

A experimentação é a fase em que colocamos em prática as situações-problema construídas na análise *a priori* e retornamos a ela sempre que necessário, para corrigir e complementar o que foi elaborado previamente.

A fase de análise *a posteriori* e validação caracteriza-se pelo tratamento dos dados colhidos na experimentação a partir da produção dos alunos, com os quais se faz uma validação, ou não, das hipóteses levantadas no início do trabalho. Tal validação é feita pela confrontação, a partir desses dados, das análises *a priori* e *a posteriori*.

Algumas escolhas metodológicas

Nossa sequência didática foi construída e dividida em três blocos, de naturezas distintas. O primeiro bloco contém atividades contextualizadas que podem ser resolvidas por meio de sistemas lineares. O objetivo principal deste primeiro bloco é promover a devolução do problema “como resolver um sistema linear?”. O segundo bloco contém atividades que visam levar à elaboração das três operações elementares que podem ser utilizadas durante o escalonamento de um sistema linear. O terceiro bloco contém um conjunto de sistemas lineares cujo objetivo é levar à construção do processo de escalonamento.

A última atividade do primeiro bloco, que será apresentada neste texto, teve como objetivo promover a devolução do problema “como resolver um sistema linear?”, pois após a modelagem da situação proposta, os alunos teriam que resolver um sistema linear de ordem 3x3. Pelo fato de, teoricamente, não terem lidado com situações desse tipo anteriormente, conjecturamos que eles encontrariam dificuldades e se questionariam sobre como um sistema linear com essa característica poderia ser resolvido.

Os sujeitos de pesquisa aos quais nos referimos são alunos do primeiro ano do ensino médio de uma escola localizada em um bairro da cidade de Campo Grande. Durante a aplicação da experimentação, a pesquisadora passou listas de presença entre os alunos participantes. Foram escolhidos como sujeitos de pesquisa aqueles que tiveram porcentagem de presença igual ou superior a 80%.

Foram realizadas 14 sessões distribuídas ao longo dos meses de outubro e novembro de 2010. Cada sessão tinha a duração de cerca de 50 minutos. A sessão 4, como já mencionado, trazia um problema que poderia ser resolvido por meio de sistemas lineares 3x3. Como tal atividade não foi solucionada na ocasião, ela foi aplicada novamente na sessão 14, ao final da sequência, para que pudéssemos avaliar a evolução dos alunos. Por ter este diferencial em relação às demais atividades aplicadas, esta sessão foi escolhida para ser apresentada neste artigo. Entre as sessões mencionadas, foram trabalhadas atividades que envolviam as três operações elementares e dez sistemas a serem escalonados foram propostos. Os alunos deveriam utilizar as operações trabalhadas para escalonar os sistemas lineares e, em seguida, encontrar suas soluções.

A seguir apresentamos a atividade mencionada, sua análise *a priori* e as duas análises *a posteriori* realizadas, uma ao final da sessão 4, quando a atividade foi aplicada pela primeira vez, e outra ao final da sessão 14, quando esta foi reaplicada.

Atividade proposta e análises

Três escolas participaram de um torneio esportivo em que provas de dez modalidades foram disputadas. Aos vencedores de cada prova foram atribuídas medalhas de ouro, de prata ou de bronze, respectivamente aos 1º, 2º e 3º lugares. A quantidade de medalhas de cada escola, ao final da competição, é apresentada na tabela seguinte:

Escolas	Medalhas		
	Ouro	Prata	Bronze
A	4	2	2
B	5	3	1
C	4	3	3

Nesse torneio, a cada tipo de medalha foi atribuída uma quantidade de pontos e a escola vencedora seria aquela que obtivesse o maior número de pontos.

a. Se a medalha de ouro vale 3 pontos, a de prata vale 2 e a de bronze vale 1 ponto, quantos pontos a escola A obteve no final do torneio?

b. E a escola B?

c. E a escola C?

d. Se a medalha de ouro vale 5 pontos, a de prata vale 3 e a de bronze vale 1, quantos pontos a escola A obteve no final do torneio?

e. E a escola B?

f. E a escola C?

g. Agora, suponha que a quantidade de pontos que cada medalha vale não foi divulgada. Assim, como não conhecemos esses valores, podemos representar a quantidade de pontos que a medalha de ouro vale por x, a quantidade de pontos que a medalha de prata vale por y e a quantidade de pontos que a medalha de bronze vale por z. Monte uma expressão que represente a quantidade de pontos que a escola A obteve no torneio.

h. Faça o mesmo para a escola B

i. Faça o mesmo para a escola C.

j. Imagine que o quadro final de pontuação seja o seguinte:

Escolas	Medalhas			
	Ouro	Prata	Bronze	Pontuação final
A	4	2	2	46
B	5	3	1	57
C	4	3	3	53

Monte um sistema linear com a finalidade de descobrir quantos pontos valem as medalhas de ouro, prata e bronze.

k. Como você faria para resolver o sistema linear que você montou no item j?

l. Discuta a resposta do item (k) com seus colegas. Eles pensaram em estratégias diferentes da sua? Em caso afirmativo, quais?

Análise *a priori*

Objetivo: Definir sistemas lineares 3x3 e consolidar o processo de devolução do problema "como resolver um sistema linear?".

Estratégias: Para os itens (a) a (f), basta que sejam efetuadas algumas operações aritméticas. A resposta correta de cada item é:

(a) 4.3+2.2+2.1=12+4+2=18, (b) 5.3+3.2+1.1=15+6+1=22, (c) 4.3+3.2+3.1= 12+6+3=21, (d) 4.5+2.3+2.1=20+6+2=28, (e) 5.5+3.3+1.1=25+9+1=35, (f) 4.5+3.3+3.1= 20+9+3=32. Para os itens (g), (h) e (i), é necessária a interpretação da tabela e a passagem para a linguagem algébrica, com o uso de incógnitas. A resposta correta de cada item é: (g) 4x+2y+2z, (h) 5x+3y+z, (i) 4x+3y+3z.

No item (j), espera-se que as expressões dos três itens anteriores auxiliem a montagem do sistema linear $\begin{cases} 4x+2y+2z=46 \\ 5x+3y+z=57 \\ 4x+3y+3z=53 \end{cases}$. Acreditamos que os alunos encontrem bastante dificuldade para responder os dois itens finais da atividade, que foram propostos exatamente com essa intenção, e que a única estratégia, se enunciada, seja Tentativa e Erro.

Variáveis Didáticas: V_1: Figura representativa da situação matemática: Nesta atividade não há a presença de uma figura que represente a situação matemática para que o aluno tenha que interpretar a tabela apresentada.

V_2: Ordem de grandeza do sistema linear: Neste caso, para dificultar o uso da estratégia de Tentativa e Erro, optamos por propor um problema que pudesse ser resolvido por meio de um sistema linear de ordem 3x3.

Validação: Embora o objetivo principal da atividade seja provocar a devolução de um problema, caracterizaremos como validação o caso de os alunos encontrarem a resposta e substituírem-na no sistema linear ou mesmo na tabela.

Análise *a posteriori* 1

Na sessão 4, durante a qual a atividade foi aplicada pela primeira vez, os alunos foram capazes de responder corretamente os itens (a) a (i) sem apresentar grandes dificuldades. Também montaram corretamente o sistema linear. Entretanto, quando questionados sobre um possível método de resolução, eles afirmam não saber, como mostra o diálogo a seguir.

> Aluno 3: Me ajuda aqui professora. Explica como resolve ele (referindo-se ao sistema linear montado).
> Pesquisadora: Primeiro eu gostaria de saber se vocês conseguem resolver.
> Aluno 3: Consigo resolver, mas não com três variáveis. Vou colocar então que eu não sei.

A fala "consigo resolver, mas não com três variáveis" mostra que o aluno está diante de uma situação nova, com a qual não havia lidado anteriormente. Interpretamos, a partir do estudo da TSD[3], que o problema tenha provocado um desequilíbrio no aluno e que sua adaptação a essa nova situação possa produzir aprendizagem. Esta afirmação está baseada em Freitas (2008, p.78), quando o autor afirma que

> Brousseau desenvolveu um tratamento científico do trabalho didático tendo como base a problematização matemática e a hipótese de que se aprende por adaptação a um meio que produz contradições e desequilíbrios.

No momento do debate, os alunos afirmaram que não conseguiram encontrar valores que satisfizessem as condições do problema. A pesquisadora, então, tentou provocá-los:

> Pesquisadora: O que será que está faltando pra gente conseguir resolver isso aí?
> Aluno 3: Tá faltando a variável ser isolada. Uma variável.
> Pesquisadora: E será que a gente consegue pensar em alguma forma de fazer isso?
> Aluno 3: Se passar ela pro segundo membro....Tipo, passar o quatro....(pensando)...não, não dá certo.

As estratégias que conhecem mostraram-se ineficazes. O diálogo a seguir registra um momento em que há a devolução do problema, como planejamos em nossa análise *a priori*.

> Pesquisadora: Bom, pessoal. A gente não está conseguindo resolver esse problema, certo?
> Aluno 3: Aham. Se você falar que não existe uma resposta pra ele...(o aluno mostra desconforto).
> Aluno 1: Ele vai ficar nervoso.
> Pesquisadora: O que será que está faltando?
> [...]
> Aluno 1: Conseguir entender como se isola uma variável, sendo que sobrará duas. Como isolar essas duas de forma que não afetará o 46.
> Pesquisadora: Então, são com coisas desse tipo que a gente vai trabalhar até o final, pra gente tentar conseguir resolver coisas desse tipo, com outras atividades.
> Aluno 3: Fala, agora fala.
> Pesquisadora: Falar o quê?
> Aluno 3: O que é pra fazer.
> Pesquisadora: A gente deveria resolver, mas vocês não conseguiram resolver. Então a gente vai ter que trabalhar pra passar por isso.

[3] Teoria das Situações Didáticas

> [...]
> Aluno 1: Peraí, então quer dizer que essa daqui vai ficar parada até a gente conseguir entender essa pra fazer outra?

Entendemos que a angústia dos alunos em querer saber como se resolve o problema seja suficiente para afirmarmos que a devolução do problema “como resolver um sistema linear?” aconteceu. Outros registros, como o seguinte, ajudam a comprovar esta afirmação.

> Pesquisadora: A gente poderia ficar aqui testando. Será que uma hora a gente vai achar a resposta?
> Aluno 3: Uma hora, daqui uns dois anos, a gente acha.
> Pesquisadora: Será que essa é a melhor estratégia?
> Aluno 1: Não, não é a melhor estratégia.
> Aluno 3: Então a senhora resolve esse daí. A senhora vai resolver esse aí?
> Pesquisadora: Não, eu não quero estragar o final do filme pra vocês. Eu quero que vocês consigam fazer. Mas vocês podem pensar na resposta desse. Tentar começar a pensar em estratégias. Amanhã a gente vai começar a trabalhar nas estratégias. Depois que a gente discutir, a gente pode voltar nesse sistema e ver se a estratégia que a gente construiu dá conta de resolver o problema, ok?
> Aluno 1: Já está na hora de ir? Eu queria saber o final do filme (risos).

Análise *a posteriori* 2

Após dez sessões nas quais as operações elementares bem como dez sistemas lineares foram propostos, a atividade apresentada neste artigo foi aplicada novamente. A seguir mostramos como as duplas evoluíram. As três duplas de sujeitos de pesquisa encontraram os valores das medalhas corretamente, mas por três estratégias distintas.

A Dupla 1 multiplicou a terceira equação por -1 e somou o resultado com a segunda equação. Com isso, obteve x-2y=4. Em seguida, multiplicou a primeira equação por -3 e a segunda por 2, para eliminar a incógnita y e encontrar 2x+4z=24. Para finalizar a resolução, multiplicou a equação x-2y=4 por 2 e somou o resultado com a equação 2x+4z=24, obtendo como resultado 4x=32. A figura a seguir mostra os cálculos realizados pelos alunos.

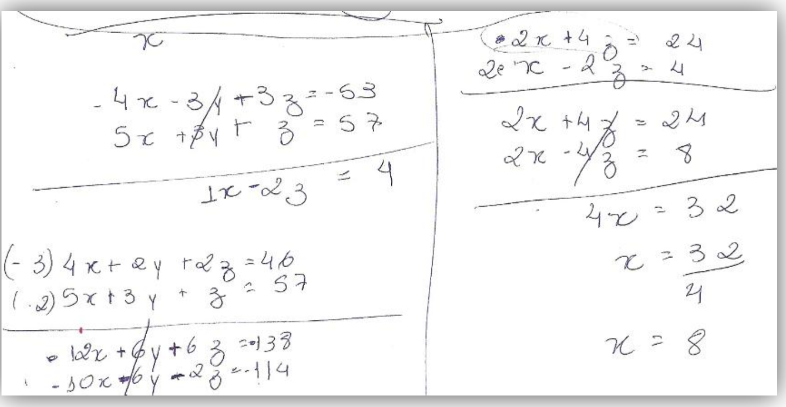

Figura 1: Resolução da Dupla 1 - Sessão 14

A Dupla 2 inicia a resolução encontrando a equação y+z=7, como descrito na estratégia E_2 de nossa análise *a priori*[4]. Entretanto, os alunos dessa dupla apresentam dificuldades para encontrar outra equação cujas incógnitas sejam “y” e “z”.

Eles partem, então, para outra estratégia, como mostra a figura a seguir:

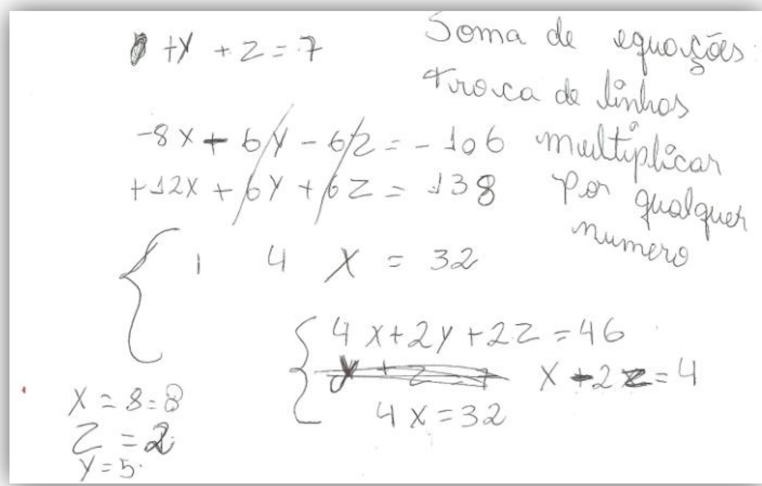

Figura 2: Resolução da Dupla 2 para o problema das medalhas

Percebemos, na figura anterior, que a primeira tentativa dos alunos era considerar uma equação com incógnitas “y” e “z” e outra com incógnita “x”. Em seguida, os alunos descartam esta opção por perceberem que ela não permitirá encontrar os demais valores. O diálogo a seguir mostra como eles chegaram a essa conclusão:

> Aluno 3: Se eu multiplicar aqui por 2 e aqui por 3, vai dar 6 e 6. Tipo aqui...menos 2 ou menos 3, sei lá, aí corta aqui e vai sobrar só o x.
> [...]
> Aluno 3: Vamos ver se dá certo? Ah, não vai dá certo! Tem que achar uma que isola o z ou o y... Ah, vamos isolar o x? Vamos achar uma que dê x e outra incógnita...Tipo (pensando)....essa! Multiplica por -1, né?
> Vai dar...3y e corta...vai ficar: x mais 2z igual a 4...
> Não é menos? Qual a gente multiplicou por -1? Esse, né?
> Aluno 6: Foi o de baixo.
> Aluno 5: O de baixo é melhor por -1...vai dar -2...que é igual a quatro.

No diálogo anterior, percebemos também a habilidade que o aluno desenvolveu em escolher qual equação seria multiplicada por um valor negativo com a finalidade de obter um coeficiente positivo para a primeira incógnita da equação resultante.

O diálogo revela alguns momentos adidáticos vivenciados pelos alunos: quando conjecturam por qual número deveriam multiplicar, interpretamos que os alunos estejam num momento de formulação. Outro fator que caracteriza esta etapa bem como o potencial

[4] A análise *a priori* referente à segunda aplicação da atividade não se encontra neste artigo, devido o limite de espaço. Sendo assim, informamos que nela elencamos as possíveis estratégias as quais os alunos poderiam utilizar no processo de escalonamento do sistema linear em questão.

adidático da situação proposta está registrado na fala "Vamos ver se dá certo? Ah, não vai dar certo!". Nesta passagem o aluno refuta a resposta obtida anteriormente, percebendo que ela não permitiu encontrar os valores das incógnitas. Há que se considerar que o meio proposto favoreceu a retroação, ou seja, permitiu que o aluno avaliasse se a estratégia adotada foi adequada ou não. Essa tentativa de verificação pode ser caracterizada como momento de validação.

Já a Dupla 3 encontrou os valores das incógnitas a partir da estratégia E_2 que consideramos a estratégia ótima, por ser a mais rápida. De início, os alunos encontraram a equação -y-z=-7, mas não conseguiam encontrar outra equação com essas duas incógnitas. Após algumas tentativas, sem sucesso, requisitaram a ajuda da pesquisadora. Embora a pesquisadora tenha influenciado a escolha das equações, como mostra o diálogo a seguir, verificamos que os alunos chegam à equação 8z=16 de maneira autônoma, passando por momentos adidáticos.

> Pesquisadora: Tenta pensar nessas duas, como você faria pra eliminar o x?
> Aluno 5: Não dá pra eliminar o x dessas duas.
> Pesquisadora: Mas antes vocês faziam!
> Aluno 6: Vai ter que multiplicar uma por um número negativo.
> Aluno 5: Mas professora, aqui é um 5 e aqui é um 4, o que vai adiantar?
> Pesquisadora: Vocês já fizeram atividades desse tipo.
> Aluno 6: Multiplica por dois números! Tipo assim...vamos ver...(pensando)...Um número que multiplica 5 e 4 ao mesmo tempo...
> Aluno 5: Não tem, cara. Não tem um número que vai dar o mesmo valor de 5 pra 4...
> Aluno 6: Tem!! 4 vezes 5: 20 e 5 vezes 4: 20...Aí vai ficar o inverso: 4 e 5...
> Aluno 5: Aqui 4 e aqui 5 então?
> Aluno 6: Não, um vai ter que ser -4...
> (Os alunos realizam as operações e chegam na equação 3y+11z=37)
> Aluno 6: E agora?
> (Aluno 5 tem a ideia de multiplicar a equação -y-z=-7 por 3. Ao somar com a equação 3y+11z=37 chegam na equação 8z=16)

A Dupla 3, em sessões anteriores, utilizava o máximo de somas de equações possíveis para chegar às respostas esperadas. Ao que tudo indica, isto ocorreu porque não havia compreendido efetivamente como utilizar, de maneira combinada, a segunda e a terceira operações elementares. O diálogo anterior revela o momento em que aparentemente eles ultrapassam essa dificuldade, sendo capazes de conjecturar corretamente por quais números deveriam multiplicar a fim de obter os números 20 e -20 como coeficientes.

Considerações Finais

Os diálogos e as produções escritas mostram o quanto as duplas evoluíram em relação ao uso das operações elementares para a obtenção de sistemas escalonados. No momento em que a atividade foi aplicada pela primeira vez, eles manifestaram o pensamento de ser necessário isolar uma variável, entretanto não dispunham de estratégias para isso. Após o trabalho com atividades em que as operações elementares foram exploradas bem como alguns sistemas a serem escalonados foram propostos, os alunos desenvolveram habilidades e estratégias necessárias para efetuar o escalonamento na resolução de sistemas lineares.

Referências

ARTIGUE, M. Engenharia Didática. In: BRUN, J. (org.) *Didáctica das Matemáticas*. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. Cap 4. p. 193-217.

BATTAGLIOLI, C.S.M. *Sistemas Lineares na Segunda Série do Ensino Médio: Um olhar sobre os Livros Didáticos.* 2008. 114p. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - PUC, São Paulo.

BROUSSEAU, G. *Introdução ao estudo da teoria das situações didáticas. Conteúdos e métodos de ensino.* São Paulo: Ática, 2008.

FREITAS, J.L.M. Teoria das Situações Didáticas. In: MACHADO, S.D.A. (Org.) *Educação Matemática: uma (nova) introdução*. São Paulo: EDUC, 2008. p. 77-112.

LIMA, E.L, ed. *Exame de Textos: Análise de livros de Matemática para o Ensino Médio*. Rio de Janeiro: VITAE/IMPA/SBM, 2001.

MACHADO, S.D.A. Engenharia Didática. In: MACHADO, S.D.A. (Org.) *Educação Matemática: uma (Nova) Introdução*. São Paulo: EDUC, 2008. p. 233-248.

PANTOJA, L.F.L. *A conversão de Registros de Representações Semióticas no Estudo de Sistemas de Equações Algébricas Lineares*. 2008. 105p. Dissertação de Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas do Núcleo de Pesquisa e Desenvolvimento da Educação Matemática e Científica – Universidade Federal do Pará, Belém.

PAZ JUNIOR, G. T. *As dificuldades no ensino de matemática.* 2008. Disponível em: < http://www.webartigos.com/articles/5488/1/As-Dificuldades-No-Ensino-De-Matematica/pagina1.html>. Acesso em 13 fev 2011.