VERIFICAÇÃO DE IGUALDADES ALGÉBRICAS POR MEIO DE MUDANÇA DE QUADROS NO ENSINO FUNDAMENTAL

Adriano da Fonseca Melo

UFMS

José Luiz Magalhães de Freitas

UFMS

Resumo

Este artigo é parte da dissertação de mestrado cujo objetivo é estudar procedimentos de verificação de igualdades algébricas utilizados por alunos do 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola da Rede Municipal de Ensino, ao realizar cálculos algébricos utilizando os quadros aritmético, algébrico e geométrico. No desenvolvimento da parte experimental utilizamos a Teoria das Situações Didáticas de Brousseau e o jogo de quadros proposto por Douady. Para análise das produções dos alunos, além desses autores nos apoiamos no trabalho de Margolinas concernente ao processo de verificação. Para o desenvolvimento da parte experimental nos inspiramos na metodologia da Engenharia Didática apresentada por Artigue. As dificuldades em relação aos cálculos algébricos foram verificadas nos diferentes estatutos da letra, visto que em vários momentos os alunos recorreram ao estatuto do termo desconhecido, sinalizando a não aceitação da letra com o estatuto de número indeterminado. No final do experimento, essa dificuldade estava parcialmente superada pelos alunos, isto é, o número de alunos que não incorreram neste erro tinha reduzido. Sobre os jogos de quadros, os alunos, ao realizarem a verificação, utilizaram com maior frequência a mudança do quadro geométrico para o quadro algébrico, enquanto as mudanças do quadro geométrico para o aritmético e do algébrico para o aritmético não surgiram naturalmente, mas provocados por situações em que precisavam constituir argumentos que convencessem seus pares da validade de suas respostas. Esse resultado sinaliza para a necessidade de ser adotada, com maior frequência em sala de aula, a exploração de atividades envolvendo mais de um quadro matemático, onde o aluno possa vivenciar os conceitos em diferentes quadros. Por fim, foi possível verificar que as atividades nas quais os alunos realizavam conjecturas, formulações e justificativas, bem como quando comunicavam a seus pares suas conclusões, utilizando uma linguagem matemática adequada, propiciaram momentos mais ricos de aprendizagem.

Palavras-chave: Expressões Algébricas. Jogo de Quadros. Verificação. Ensino Fundamental.

Considerações iniciais

No trabalho de sala de aula, na perspectiva clássica, o aluno normalmente permanece na dependência do professor para realizar a correção de suas Atividades (Camargo, 1999), cabendo a este indicar o que está correto e o que está errado. No caso de uma resolução estar errada, o aluno normalmente fica aguardando que o professor ou outro aluno vá ao quadro e mostre como deve ser feito para chegar ao resultado correto. Esta postura dá a impressão de que o aprender sobre seus erros ou sobre os conceitos matemáticos pode ser algo quase mágico (Salino, 1976 *apud* Margolinas, 1993, p. 185), como se a confrontação de trabalhos de outros alunos com o intuito de levá-lo a corrigir seu erro, produzisse novos procedimentos. Tal fato pode contribuir para a dependência do aluno em relação ao professor, pois, nesse caso, ele não consegue identificar seus próprios erros e por meio deles procurar caminhos que lhe permitam chegar ao resultado esperado.

A prática docente e o espírito de investigador nos levaram a questionar o porquê destes alunos não desenvolverem esta autonomia para analisar, e com isso utilizar conhecimentos aprendidos para validarem suas respostas. Desse modo, ainda pudemos observar que muitos alunos, mesmo após a apresentação de conceitos algébricos, não conseguiam utilizá-los quando requeridos em um contexto diferente daquele apresentado.

Os PCNs de Matemática (BRASIL, 1998) defendem que o aluno precisa argumentar, elaborar conjecturas, ler e interpretar situações, de tal forma que consiga desenvolver a capacidade de construir conhecimentos matemáticos, de cultivar a autoestima, de respeitar o trabalho dos colegas e de perseverar na busca de soluções. Diante dessas propostas, fizemos os seguintes questionamentos: até que ponto os alunos conseguem utilizar os conhecimentos matemáticos para realizar verificações e/ou elaborar argumentações sobre suas formulações?

Dessa forma, em nosso trabalho, o interesse está nos traços matemáticos que possibilitam a formação do pensamento algébrico[1], mais especificamente na busca dos alunos em verificar a validade de resultados por eles obtidos ou apresentados a eles. Para tanto, definimos como objetivo principal desta pesquisa, o estudo dos procedimentos de verificação de igualdades de expressões algébricas utilizados por alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, ao realizarem cálculo algébrico utilizando os quadros aritmético, algébrico e geométrico.

No que concerne à fundamentação teórica da pesquisa nos inspiramos na Teoria das Situações Didáticas proposta por Brousseau. Conforme essa teoria o professor propõe atividades ao aluno visando que ele assuma a responsabilidade pela resolução. Para tanto, a atividade deve possibilitar ao aluno iniciar a resolução, porém os conhecimentos que ele possui são insuficientes para chegar à solução, sendo necessário buscar novos. A busca de uma solução conduz o aluno a vivenciar momentos os quais Brousseau caracterizou como situações adidáticas. As situações adidáticas caracterizam pela interação do aluno com o

[1] De acordo com Lins e Gimenez (2006, p. 151) pensamento algébrico consiste em compreender a álgebra como um sistema de relações, as quais produzem significados para situações em termos de números e operações aritméticas e com base nisso transformar as expressões obtidas.

meio. O meio se comporta como antagonista às tomadas de decisões do aluno, o que o conduz a constituição de novos conhecimentos para que possa comunicar suas ideias e estratégias de resolução. Brousseau classificou o agir do aluno no processo de aprendizagem, em três dialéticas: ação, formulação e validação as quais ocorrem simultaneamente.

A primeira dialética é a de *ação*, em que o aluno elabora estratégias a partir do "jogo"[2] ao qual está inserido. A situação de ação deve possibilitar ao aluno julgar o resultado de sua ação e caso seja necessário ajustá-lo, sem a participação do professor, essa fase provoca uma aprendizagem por adaptação.

A segunda dialética é a de *formulação,* em que o aluno procurará, progressivamente, desenvolver uma linguagem que seja compreensível pelos seus interlocutores e, para tanto, utilizará de sinais e regras comuns, conhecidas ou novas. De acordo com Brousseau (2008):

> [...] a formulação de um conhecimento corresponderia a uma capacidade do sujeito de retomá-lo (reconhecê-lo, identificá-lo, decompô-lo e reconstruí-lo em um sistema lingüístico). O meio que exigirá do sujeito o uso de uma formulação deve, então envolver um outro sujeito, a quem o primeiro deverá comunicar uma informação.
>
> (BROUSSEAU, 2008, p. 29)

A terceira dialética é a de *validação*, na qual o aluno explicita a validade do modelo criado por ele. O aluno deixa de ser um informante para ser um proponente de sua ideia a um oponente, que poderá solicitar que demonstre ou detalhe melhor sua estratégia. Conforme Brousseau (2008)

> [...] o emissor já não é um informante, mas um proponente, e o receptor, um oponente. Pressupõe-se que possuam as mesmas informações necessárias para lidar com uma questão. Colaboram na busca da verdade, ou seja, no esforço de vincular de forma segura um conhecimento a um campo de saberes já consolidados, mas entram em confronto quando há dúvidas. [...] Cada qual pode posicionar-se em relação a um enunciado e, havendo desacordo, pedir uma demonstração ou exigir que o outro aplique suas declarações na interação com o meio.
>
> (BROUSSEAU, 2008, p. 30)

Na situação didática, cabe ao professor, ao final dos debates nas duplas ou nos grupos, conduzir a socialização e assim institucionalizar o conhecimento produzido pelos alunos, aproximando-o do saber já institucionalizado pela academia.

Outro embasamento teórico que utilizamos nesta pesquisa é a noção de jogos de quadros[3] da Matemática. Douady (1986) propõe que o professor, ao elaborar uma situação

---

[2] Jogo, nesse contexto, é entendido como uma situação didática a qual o aluno está envolvido com a responsabilidade de resolver uma dada situação-problema.

[3] Jeux des Cadres traduzimos como jogos de quadros.

problema, pode criar situações nas quais os alunos são conduzidos a trabalharem com diferentes domínios matemáticos. Douady (1986, p. 389) caracteriza um quadro como: "um quadro é constituído de ferramentas de uma parte da matemática, de relações entre os objetos, suas formulações eventualmente diferentes e de imagens mentais associadas a essas ferramentas e relações*"*. Neste trabalho utilizamos os quadros aritmético, geométrico e algébrico.

Os jogos de quadros são mudanças de quadros provocadas por iniciativa do professor para fazer avançar as fases de investigação, favorecendo a evolução da aprendizagem de conceitos pelos alunos. Neste caso, o jogo de quadros conduz frequentemente a resultados não conhecidos, a estratégias novas, à criação de objetos matemáticos novos. O uso deste conceito na pesquisa tem como objetivo principal que alunos, ao realizarem jogo de quadros, possam validar algumas identidades algébricas.

Para analisarmos os procedimentos de verificação dos alunos nos inspiramos na proposta de Margolinas (1993) a qual apoiando – se nas ideias de Balacheff coloca:

> poderíamos considerar processo de verificação como a sequência de ações que conduz o aluno (sozinho ou com ajuda) quando ele procura se assegurar por uma ação da validade de um resultado e ou tentar modificar suas ações ou raciocínios que o conduziram a propor o resultado.
> (MARGOLINAS, 1993, p.168, tradução nossa).

O processo de verificação, de acordo com Margolinas, apresenta duas condições implícitas e não formuladas para a existência de momentos nos quais os alunos realizam a verificação dos seus resultados. A primeira condição é a existência de uma finalidade do problema, para que o aluno retome por sua conta como um projeto de resolução. A segunda condição diz respeito à possibilidade de tomar uma decisão diferente à que foi tomada para chegar ao resultado, no caso do erro.

Entendemos que o aluno no Ensino Fundamental precisa, inicialmente, ter consciência e autonomia de buscar ferramentas matemáticas que lhe permitam verificar a validade de suas respostas. Desse modo, é fundamental identificar erros e realizar a retificação dos procedimentos de forma que possa validar suas decisões, concepção que está em consonância ao proposto pelos PCNs. Conforme Margolinas (1993) o processo de verificação configura uma parte da fase de validação. Sendo assim buscamos realizar atividades nas quais os alunos pudessem tomar a decisão de realizar a verificação por meio do jogo de quadro em um processo de ida e volta entre os quadros. No que concerne à parte experimental da coleta de dados nos inspiramos no que é descrito por Michèle Artigue na *Engenharia Didática***.**

A experimentação

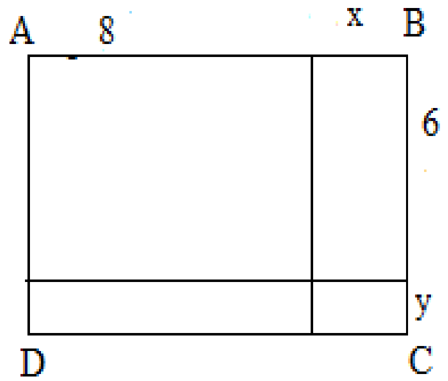
A experimentação ocorreu em uma turma de 32 alunos, sendo escolhidos os protocolos de 8 alunos que participaram de todas as sessões. Para este artigo apresentaremos a análise *a priori* de duas atividades e *a posteriori* dos protocolos do aluno A7 do 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola da Rede Municipal de Ensino da cidade de Campo Grande – MS, em relação às duas atividades, pois os protocolos apresentam uma mudança de atitude de uma atividade inicial para uma atividade intermediária.

A primeira atividade tinha por objetivo principal propiciar ao aluno a retomada dos conceitos de área e perímetro como ferramenta para verificar a validade de igualdades envolvendo expressões algébricas do tipo (a+b).(c+d) e 2(a + b) + 2(c + d). A atividade envolve dois quadros matemáticos, o algébrico e o geométrico, os quais os alunos poderiam utilizar, bem como utilizar um terceiro quadro matemático, o aritmético. A interação entre os quadros possibilitaria ao aluno estabelecer estratégias de resolução, conforme os conhecimentos antigos já dominados e necessários para iniciarem os problemas; para tanto, nessa atividade trabalhamos com as variáveis didáticas: a presença da figura no enunciado, tipo de expressão e conceitos de área e perímetro.

Atividade 1 – Carlos ao calcular a área e o perímetro da figura abaixo encontrou:

Perímetro (ABCD) = 28 + 2x + 2y

Área (ABCD) = xy + 6x + 8y + 48



A resposta apresentada por Carlos está correta? Justifique.

Na a**tividade 1** esperava-se que o aluno inicialmente realizasse os cálculos para determinar o perímetro e a área da figura com base nos dados fornecidos. Em seguida, que a partir dos resultados encontrados, ele verificasse os resultados obtidos pelo aluno fictício

“Carlos”, utilizando o **cálculo algébrico** e fizesse uso de seus cálculos para justificar a sua resposta. Esperava-se ainda que os alunos atribuíssem **valores numéricos** para x e y, tanto na figura como nas expressões correspondentes à área e ao perímetro da figura, com o intuito de verificar se, partindo de quadros diferentes, chegaria ao mesmo resultado. Por exemplo, x = 3 e y = 1 obtendo, após a substituição, a expressão numérica 28 + 2.3 + 2.1= 28 + 6 + 2 = 36 para o cálculo do perímetro, e 3.1 + 6.3 + 8.1 +48 = 3 +18 + 8 + 48 = 77 para o cálculo da área.

Substituindo esses valores na figura obtêm-se comprimento igual a 11 e largura 7. Calculando o perímetro, encontra-se 11 + 7 + 11 +7 = 36 e área igual a 11.7 = 77, o que os levariam a perceber a igualdade entre as expressões dadas por Carlos, correspondentes à área e ao perímetro da figura apresentada. Alguns alunos, após verificarem que o resultado apresentado pelo aluno fictício Carlos está correto, poderiam responder simplesmente que sim ou não e apresentar uma justificativa para sua resposta, que caracterizaríamos como uma **ausência de justificativa**. Nesse caso, ao perceber que isso ocorreu, o pesquisador deveria questioná-lo novamente.

Em nossa análise a priori consideramos provável que alguns alunos efetuem errado o cálculo do perímetro e/ou da área, levando-os a responderem que a resposta do aluno fictício Carlos está errada. Essa conclusão pode ser ocasionada pela dificuldade que possuem em fazer a distinção entre os **conceitos de área e perímetro**, conforme Teles (2007) verificou em sua pesquisa sobre o ensino de área de figuras. Por outro lado, os alunos podem errar os cálculos ao tentarem calcular o perímetro e a área da figura. Podem ainda, demonstrar **dificuldade para aceitar a aparente ausência da propriedade fechamento** nos cálculos algébricos e, dessa forma, poderão somar letras distintas com o intuito de encontrar um resultado (Bonadiman, 2007). Prevemos ainda, que eles podem errar quando da substituição dos valores na expressão e realizarem a **justaposição dos números** confundindo com a aritmética, por exemplo, no lugar de ler 2.3 (dois vezes três) lerem 23 (vinte e três) e no lugar de 2.1 (dois vezes um) lerem 21 (vinte e um) e nesse caso encontrar como resultado 72, conforme sinalizado por Booth (1995), em sua pesquisa com alunos ingleses.

O aluno **A7** usou o quadro geométrico para validar a resposta apresentada, o qual fez uso dos conhecimentos sobre cálculo de área e perímetro para realizar sua verificação. Ele não utilizou registro algébrico para indicar suas ideias, entretanto, foi possível perceber em sua redação que ele decompôs a figura em partes para calcular a área e, a seguir, comparou com o cálculo da área total da figura. Assim, mostrou conhecimentos sobre formas válidas de composição e decomposição, bem como de equivalências de áreas. Ainda, utilizou sua formulação no quadro geométrico para comparar o resultado apresentado no enunciado com a sua resolução, caracterizando o uso do jogo de quadros para realizar a verificação, validando as respostas apresentadas.

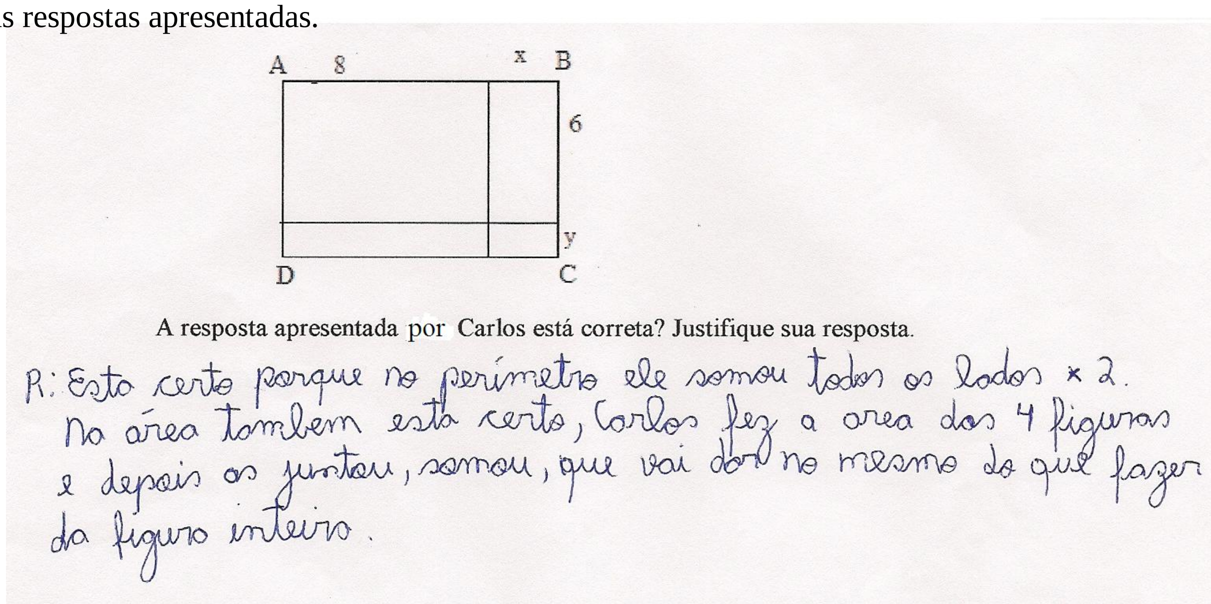


Figura 1 - Protocolo do aluno A7 - Atividade 1

A resposta do aluno **A7** demonstrou que ele teria o conhecimento em relação a soma de áreas equivalentes que está associada a uma área que é a soma das áreas das superfícies partes, reforçando sua resolução no quadro geométrico. Esse aluno, preocupado com a escrita de todo o processo de verificação, especificou que o perímetro seria a soma de todos os lados explícitos multiplicados por 2. Possivelmente, o que ele pretendia escrever era a soma da largura com o comprimento multiplicado por 2.

O uso do quadro numérico pelo aluno **A7** pode ter sido com o intuito de utilizar as propriedades aritméticas para encontrar os respectivos valores para a soma e o produto dos segmentos que medem 8 e 6. Ainda, na sua resposta, percebemos traços da interação dos quadros algébrico, geométrico e aritmético, pois o mesmo recorreu a conceitos dos quadros para justificar sua concordância com as expressões apresentadas no enunciado.

A segunda atividade tinha como objetivo utilizar a propriedade distributiva para verificar a validade das igualdades algébricas do tipo $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Na atividade 2 utilizamos as variáveis didáticas: ausência da figura no enunciado, o tipo de expressão e o .conceito de área.

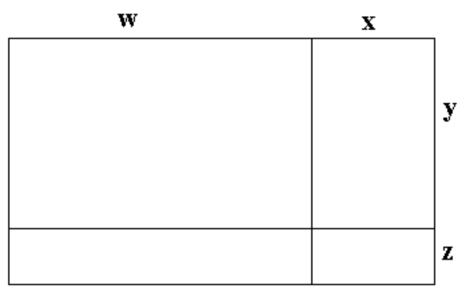
Atividade 2 - Na Atividade abaixo, complete a tabela atribuindo valores a w, x, y e z e responda as perguntas. Complete a tabela abaixo:

A	B	C	D	E	F	G	H
Valores de w	Valores de x	Valores de y	Valores de z	(w+x).(y+z)	w.(y+z)+x.(y+z)	w.y+x.z	w.y+w.z+x.y+x.z
1	2	3	5				

a) Observando as colunas **E, F, G, H** o que podemos afirmar sobre os resultados? Justifique sua resposta.

b) Desenvolva o produto (w+x).(y+z) e a seguir construa uma figura retangular (com subdivisões) cuja área corresponda a este produto.

Para resolver a atividade **2**[4] o aluno necessitará resolver o **valor numérico** completando a linha cujos valores são fornecidos, respeitando para isso as expressões da primeira linha da tabela e nas outras linhas deverá escolher valores para as letras e completar as colunas. No item a, espera-se que os alunos identifiquem que as colunas **E, F** e **H** possuem o mesmo resultado, justificando suas respostas por meio dos valores obtidos na tabela ou mesmo efetuando o cálculo das expressões algébricas da primeira linha, com isso mostrando que as mesmas chegam a um resultado comum. No item b, o aluno deverá iniciar utilizando a estratégia **cálculo algébrico**, aplicando a propriedade distributiva, obtendo como resultado wy + wz + xy + xz e a seguir ele deverá construir um retângulo conforme modelo abaixo:



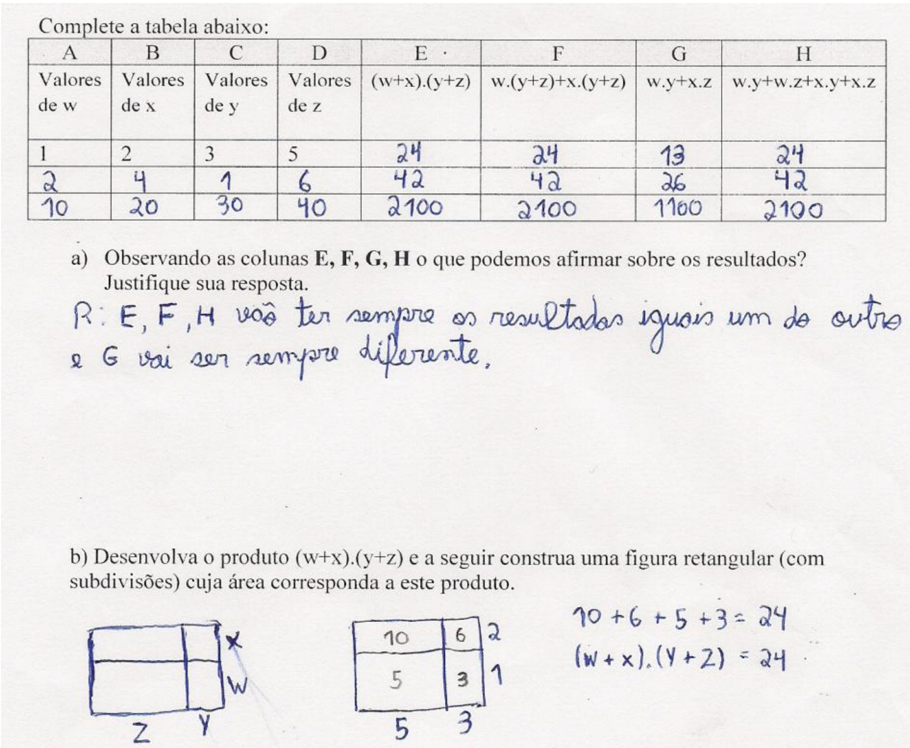
Um erro possível de ser cometido pelos alunos, no item a, será de substituir o x pelo valor fornecido na primeira linha e realizarem a justaposição dos números confundindo com a

[4] Atividade inspirada na situação-problema 10 (Bonadiman, 2007, p.171)

aritmética, por exemplo, no lugar de ler, 1.3 lerem 13 e no lugar de 2.5 lerem 25 e, nesse caso, encontrarem como resultado 38, (Booth, 1995) ao invés de encontrar 13. Segundo Bonadiman (2007), os alunos poderão cometer erros de multiplicação entre os números, os quais poderão indicar desatenção por configurar uma atividade de reinvestimento de conhecimento, como também dúvidas em relação à multiplicação**.** Outro erro possível seria realizar o produto (w+x).(y+z), multiplicar w pelo y e x pelo z encontrando wy + xz. Nesse caso, o pesquisador irá propor algumas perguntas de tal forma que utilizem a atividade como meio de retroação a sua formulação. Esperamos com isso levar o aluno a perceber o seu erro e procurar uma nova estratégia para encontrar o resultado correto.

O aluno poderá ainda, não representar a figura no item b e tal fato poderá ocorrer por não ser uma atividade familiar para ele. O livro didático também pode contribuir com esse erro por apresentar poucas atividades nas quais os alunos são estimulados a representar geometricamente expressões algébricas fornecidas nas atividades.

Observando o protocolo referente à atividade 2 (figura 2), foi constatado que o aluno **A7** não teve dificuldade para realizar a mudança do quadro algébrico para o quadro numérico, utilizando essa mudança para validar as igualdades algébricas propostas na tabela do item **a.** No item **b** ele também realizou a passagem do quadro algébrico para o geométrico. Conquanto, ele procurou validar sua construção utilizando o quadro numérico, e dessa forma, conseguiu realizar a passagem do quadro algébrico para o geométrico e para o numérico.


Complete a tabela abaixo:

A	B	C	D	E	F	G	H
Valores de w	Valores de x	Valores de y	Valores de z	(w+x).(y+z)	w.(y+z)+x.(y+z)	w.y+x.z	w.y+w.z+x.y+x.z
1	2	3	5	24	24	13	24
2	4	1	6	42	42	26	42
10	20	30	40	2100	2100	1100	2100

a) Observando as colunas **E, F, G, H** o que podemos afirmar sobre os resultados? Justifique sua resposta.

R: E, F, H voô ter sempre os resultados iguais um do outro e G vai ser sempre diferente.

b) Desenvolva o produto (w+x).(y+z) e a seguir construa uma figura retangular (com subdivisões) cuja área corresponda a este produto.

10 + 6 + 5 + 3 = 24
(w + x).(y + z) = 24

Figura 2 - Protocolo do aluno A7 - Atividade 1

O uso do quadro numérico permitiu-lhe que verificasse a validade de sua representação, ao atribuir valores para x, w, y e z, que foram os mesmos já utilizados na tabela, possibilitando-lhe validar sua formulação. Notou-se que, na representação geométrica, ele não observou a proporcionalidade entre o valor atribuído à letra e à medida do segmento. Dessa forma, observa-se na sua representação, desproporcionalidade entre os segmentos.

Considerações Finais

Nesta pesquisa, optamos por explorar atividades que envolvessem pelo menos dois quadros matemáticos, de forma que os alunos fossem convidados a transitar entre os quadros para perceberem relações entre os mesmos e assim identificarem possibilidades de os utilizarem como ferramenta para validar igualdades entre alguns tipos de expressões algébricas.

Analisando os protocolos dos alunos pesquisados, foi possível categorizar o processo de verificação em dois grupos baseados nos quadros utilizados e no processo de ida e vinda entre os quadros. O primeiro grupo de verificação é aquele que envolveu **dois quadros com o sentido de mudança de quadro,** e o segundo o que envolveu **a interação de quadros**.

No que concerne ao primeiro grupo de alunos, que utilizaram **dois quadros** para realizarem a validação de suas formulações, estão aqueles que inicialmente utilizaram o quadro proposto na atividade, como por exemplo, o quadro geométrico e a seguir transferiram para o quadro algébrico para realizarem cálculos que possibilitassem verificar a validade das afirmações. Nesse caso, esses alunos não retornaram para o quadro geométrico e nem recorreram ao quadro aritmético para verificar a igualdade algébrica proposta. Como eles realizaram a transferência para um segundo quadro e não retornaram, consideramos que esses alunos fizeram somente mudança de quadro para efetuarem a verificação. Um exemplo é o protocolo do aluno **A7**, em que iniciou utilizando o quadro geométrico e a seguir apresentou alguns traços algébricos na sua justificativa da resposta.

Finalmente, a segunda categoria de verificação surgida na experimentação constituiu-se do uso de **interação de quadros**. Nessa categoria, concentramos as verificações nas quais os alunos utilizaram os quadros propostos, de maneira que, iniciando por um quadro, retornava-se a ele no final para validar todo o processo adotado. Cabe ressaltar que esse foi o procedimento de verificação que menos ocorreu, por ser constituído de atividades pouco familiares aos alunos.

É importante destacar que algumas das atividades funcionaram como ferramentas para que alguns alunos identificassem seus erros e partissem em busca da sua superação. Alguns tiveram maior segurança em responder as atividades, no momento em que passaram a trabalhar com os três quadros, de forma autônoma, que consideramos como uma superação de suas dificuldades em relação ao conteúdo matemático.

Para concluir, pode-se dizer que um grupo pequeno de alunos realizou a interação de quadros para verificar a validade dos resultados. Era esperado que eles utilizassem os dois quadros propostos, porém o pesquisador percebeu que era necessário indagar sobre as certezas e incertezas em relação aos resultados apresentados por eles. Essa ação teve por intuito provocar nos alunos o interesse em recorrer a outros quadros, em particular ao quadro aritmético para verificar a validade dos resultados, o que caracterizaria, no mínimo, uma mudança para esse quadro. No caso do aluno que não retornou para o quadro inicial, destacamos que essa atitude caracterizada a não interação com o mesmo. Todavia, foi notório que os alunos não procuraram inicialmente estabelecer valores particulares para as letras, o que lhes permitiriam verificar a validade das igualdades.

Por fim, é preciso registrar que este estudo não se esgota nessa pesquisa, mas indica vários aspectos que podem ser aprofundados em estudos relacionados ao processo de ensino e de aprendizagem da Matemática, dos quais destacamos:

- A exploração de atividades, desde o 6º ano, que envolvam vários quadros, em que o uso deles seja uma forma de verificar a validade das respostas;

- O ensino da álgebra utilizando a interação com os quadros aritmético e geométrico, durante o processo em que as representações algébricas não se configurem situações muito complexas para serem representadas geometricamente;

- E, por último, concordando com Santos (2007), a apresentação de atividades diversas nas quais os alunos tenham que levantar hipóteses, justificar e argumentar sobre suas estratégias.

Ressaltamos que vários aspectos ainda poderão surgir com a retomada e aprofundamento da análise dos protocolos concernentes às produções dos alunos durante as sessões envolvendo as situações-problema propostas. Conquanto, espera-se que o estudo ora realizado, possa contribuir tanto para o avanço das investigações sobre o tema, quanto para o trabalho didático dos professores de Matemática e para o aperfeiçoamento de suas práticas em sala de aula, respaldadas em teorias e investigações.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARTIGUE, M. **Engenharia Didática**. **In.** BRUN, J. (org) **Didáctica das matemáticas.**Lisboa, Instituto Piaget, 1996.

BALACHEFF, N. **Une étude des processus de preuve em mathématique chez des eleves de Collège**, Thèse d'Etat, Université Joseph Fourier, Grenoble.

BONADIMAN, A. **Álgebra no Ensino Fundamental: produzindo significados para as operações básicas com expressões algébricas**, 2007. Dissertação (mestrado), UFRGS, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática.

BOOTH, L. R., Dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra**. In.** COXFORD, A. e SHULTE, A. O. **As ideias da álgebra,** trad. DOMINGUES, H. H., São Paulo: Atual,1995.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.** Terceiro e quarto ciclo. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BROUSSEAU, G. **Introdução ao estudo das situações didáticas: conteúdo e métodos de ensino.** São Paulo: Ática, 2008.

CAMARGO, D. A. F. de. **Estruturação da sala de aula: efeitos sobre o desenvolvimento intelectual e sobre o estilo de funcionamento cognitivo dos alunos**. **In.** BICUDO, M. A. V. (org.). **Pesquisa em educação matemática: concepção e perspectivas**. São Paulo. UNESP, 1999.

DOUADY, R. **Jeux Cadre et dialectiques outil-objet. Recherche en Didáctique des Mathématiques.** Grenoble. La Penseé Sauvage-Éditions, v. 7.2, p. 5-31. 1986.

LINS, R. C. e GIMENEZ, J. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI**. Campinas: Papirus, 2006.

MARGOLINAS, C. **De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques**. Grenoble-França: La Pensée Sauvage, 1993.

SANTOS, J. B. S. **Argumentação e Prova: análise de argumentos algébricos de alunos da educação básica**. 2007. 145f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) PUC- SP.

TELES, R. A. de M. **Imbricações entre campos conceituais na matemática escolar: um estudo sobre as fórmulas de área de figuras geométricas planas**. 2007. 297f. Tese (Doutorado) Programa de Pós-Graduação em Educação. UFPE.