UM ESTUDO SOBRE A MOBILIZAÇÃO E ARTICULAÇÃO DE CONCEITOS DE ÁLGEBRA E DE GEOMETRIA PLANA EM ESTUDOS DA GEOMETRIA ANALÍTICA: USANDO O GRAPHEQUATION COMO INSTRUMENTO DIDÁTICO

Adnilson Ferreira de Paula¹

Profa. Dra. Marilena Bittar²

Universidade Federal de Mato Grosso do Sul – UFMS

RESUMO

Neste artigo descrevemos os elementos considerados fundamentais para a elaboração da nossa dissertação de mestrado que investiga a mobilização e articulação de conceitos de Álgebra e de Geometria Plana em estudos da Geometria Analítica quando trabalhada por acadêmicos de um curso de Licenciatura em Matemática. Para isso comentamos inicialmente o objetivo geral e os específicos que direcionarão esse trabalho. Na sequência explanamos nossa base teórica composta pela Teoria das Situações Didáticas e os Registros de Representação Semiótica, assim como a metodologia Engenharia Didática. Amparados por essas teorias procuramos em nossa dissertação analisar por meio do papel e lápis a passagem da representação algébrica para a gráfica e, com o Graphequation o processo inverso, isto é, passagem da representação gráfica para a algébrica. Nessa busca apreciamos a preocupação de Brousseau em valorizar tanto o trabalho do professor quanto o do aluno, assim, acreditamos que cabe ao professor ou pesquisador criar condições para que o aluno se aproprie de conhecimentos matemáticos e ao aluno, o envolvimento na construção do saber matemático. Finalmente para esse artigo, como parte da dissertação ainda em desenvolvimento, apresentamos um exemplo de atividade elaborada segundo os princípios da Engenharia Didática para ser desenvolvida fazendo uso do Software *Grephequation*.

Palavras-chave: Educação Matemática, Geometria Analítica, Tecnologia, Graphequation.

1 INTRODUÇÃO

O presente estudo está sendo desenvolvido de acordo com a linha de pesquisa Tecnologia e Educação Matemática do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. Nesse trabalho buscamos analisar como alunos de um curso de Licenciatura em Matemática mobilizam e

¹ Mestrando do Programa de Pós - graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - UFMS. *Email:* adnilson_fer@hotmail.com

² Professora do Programa de Pós - graduação em Educação Matemática da UFMS. *Email*: marilena@nin.ufms.br

articulam conceitos da Geometria Plana e da Álgebra em estudos da Geometria Analítica, com o uso do *Software Graphequation*.

A Geometria Analítica tem como função tratar algebricamente as propriedades dos elementos geométricos. Trata-se da parte da matemática que estabelece as relações existentes entre enunciados geométricos e proposições relativas a equações, inequações e funções algébricas, porém, mesmo sendo criada visando a articulação entre essas duas áreas de conhecimento - Álgebra e Geometria - sua aprendizagem, na maioria das vezes, é reduzida a regras e fórmulas matemáticas.

Pensando na aprendizagem desse conceito e nas relações álgebra/geometria e geometria/álgebra, é importante que o aluno compreenda, utilize e comunique procedimentos e ideias, argumentando assim, suas conjecturas relacionadas a conceitos da Geometria Analítica que envolve ponto, reta, circunferência, cônicas e regiões limitadas por retas e curvas.

Para isso, consideramos que instrumentos tecnológicos são indispensáveis. O ensino da Matemática com o uso da informática favorece a construção do conhecimento e o desenvolvimento do aluno dando ênfase na aprendizagem. É fato que a tecnologia aliada a práticas educacionais, está se tornando parte integrante do nosso cotidiano. Uma das consequências desse movimento é a crescente onda de pesquisas educacionais, mais especificamente na Educação Matemática.

Autores como Borba e Penteado (2010), Valente (1993) e Bittar (2010) realizaram trabalhos voltados para esta vertente. Ao trabalhar informática e educação há preocupação quanto a utilização adequada das ferramentas disponíveis na área computacional. Papert (2008) propõe que o computador seja usado de forma construcionista na prática educacional³.

Visando a articulação entre Álgebra e Geometria Plana, e considerando uma possível abordagem construcionista, usaremos o *software Graphequation*⁴ para estudos da Geometria Analítica. Nesse sentido, vemos o *Software* como ferramenta para exploração dos conceitos envolvidos, esperando contribuir no sentido de oferecer, por meio do *Graphequation*, um novo instrumento de aprendizagem da Geometria

⁴ Desenvolvido pelo canadense Jeff Tupper, é um programa para gerar gráficos de equações e inequações de figuras planas.

-

³ Prática que dá ênfase na aprendizagem tendo o computador como ferramenta educacional tutorada pelo aluno com o qual resolve problemas significativos propiciando a aprendizagem ativa e construção de conhecimentos a partir de suas próprias ações.

Analítica. Acreditamos que este instrumento é capaz de favorecer a articulação entre Geometria Plana e Álgebra.

2 QUESTÃO DE PESQUISA E OBJETIVOS

Por trabalharmos com alunos do ensino superior consideramos que a compreensão de definições e de fórmulas, já deduzidas, colabora para a apreensão de conceitos da Geometria Analítica. Assim, limitaremos nossas análises aos conceitos mobilizados e articulados ao trabalhar essas "fórmulas" não cabendo em nossos objetivos a dedução das mesmas.

Centrando no processo de articulação entre conceitos de Geometria Plana e de Álgebra por alunos do Ensino Superior definimos como questão de pesquisa:

De que forma conceitos da Geometria Plana e da Álgebra são mobilizados e articulados em estudos da Geometria Analítica por alunos de um curso de licenciatura em matemática usando o *Software Graphequation*?

Para responder nossa questão de pesquisa definimos como objetivo principal analisar como alunos de um curso de Licenciatura em Matemática mobilizam e articulam conceitos da Geometria Plana e da Álgebra em estudos da Geometria Analítica com o uso do Software Graphequation.

Para atingir nosso objetivo geral definimos os seguintes objetivos específicos:

- Identificar e analisar dificuldades de mobilização de conceitos da Geometria
 Plana e da Álgebra na resolução de atividades da Geometria Analítica.
- Investigar dificuldades de articulação entre conceitos da Geometria Plana e da Álgebra na resolução de atividades da Geometria Analítica.
- Investigar contribuições do Software Graphequation na mobilização e articulação de conceitos da Álgebra e Geometria Plana em estudos da Geometria Analítica.

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

3.1 TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS

A Teoria das Situações Didáticas desenvolvida por Guy Brousseau está relacionada à forma da apresentação de conteúdos, envolvendo professor aluno e o

meio, onde ocorrem as interações entre esses, tendo como finalidade contribuir com o processo de ensino e aprendizagem da matemática. Assim, sempre que o professor, ou pesquisador, tiver o intuito de possibilitar algum conhecimento matemático ao aluno ficará caracterizada uma situação didática. De acordo com Brousseau:

Uma situação didática é um conjunto de relações estabelecidas explicitamente ou implicitamente entre um aluno (grupo de alunos), num determinado meio compreendido por instrumentos e objetos, e um sistema educativo (representado pelo professor) com a finalidade de possibilitar a este(s) aluno(s) um saber constituído ou em vias de constituição (BROUSSEAU, *apud* FREITAS, 2008, p.80).

Brousseau está preocupado com a forma de apresentação do conteúdo pelo professor. O principal foco de sua teoria é valorizar tanto a prática do professor quanto a dos alunos. É estabelecido, implicitamente, um contrato didático entre professor e aluno em um determinado *meio* onde o cabe ao professor criar condições para que o aluno se aproprie de conhecimentos matemáticos e ao aluno o envolvimento na construção do saber matemático.

A Teoria das Situações Didáticas valoriza os conhecimentos mobilizados pelo aluno e o trabalho do professor busca analisar a forma como um determinado conceito se manifesta na ação do sujeito e na fundamentação do professor. Assim, a situação didática proposta por Brousseau visa uma ação dentro de um contexto gerada pelo meio. Sua teoria aborda uma atividade matemática, porém dentro de uma situação que vai dar forma para a ação do aluno.

A busca por estas situações, visando as ações dos alunos, nos leva a situação adidática, momento em que o aluno toma um problema com sendo seu, busca meios de resolução sem a ação do pesquisador sobre o saber. Por meio dessa situação vivenciam as fases adidáticas de ação, formulação e validação seguida pela institucionalização, não mais adidática, que deverá ser realizada pelo professor dando estatuto de objeto a um novo saber.

3.2 REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA (RRS)

Para Duval um sistema semiótico será um registro de representação somente com a presença de três atividades cognitivas fundamentais. A formação de uma representação identificável, primeira delas, dará ao sujeito por meio da língua natural,

da composição de um texto, de uma figura geométrica, de uma fórmula ou de um gráfico, meios seguros para associar regras ao objeto de estudos. Para Damm (2008, p 178) essas regras podem ser gramaticais para a composição de um texto, restrições de construções para as figuras, o sistema posicional e o sistema de numeração decimal para o algoritmo da multiplicação.

A segunda atividade fundamental é caracterizada pela legitimidade das análises cognitivas de atividades matemáticas em termos de registros. São levadas em considerações regras de tratamentos e conversões, bem como suas especificidades diante de um objeto matemático. Os fenômenos de congruência, não-congruência e articulação entre os registros de representação também fazem parte desta análise.

A terceira atividade cognitiva ganha destaque por ser a essência da teoria de Duval. Só podemos analisar a importância das representações semióticas em atividades cognitivas matemáticas quando tomamos simultaneamente dois ou mais registros e não cada um isoladamente.

Vale dizer que a função das representações semióticas vai além de uma simples comunicação de representações mentais, ela é a responsável pelo conhecimento que é construído e adquirido pelo aluno; sem ela seria impossível desenvolver funções cognitivas essenciais do pensamento humano.

A teoria Registro de Representação Semiótica propõe uma abordagem cognitiva de análise, isto é, busca investigar como o sujeito pensa, com o objetivo de entender as dificuldades dos alunos na compreensão da matemática e a natureza dessas dificuldades.

Em geral somos levados a pensar que o aluno frente a um problema dispõe de um único mecanismo de resolução, no entanto há vários. A abordagem cognitiva proposta por Duval procura possibilitar ao aluno a compreensão da diversidade desses processos. Quando o aluno tem diante de si certa atividade matemática, deve compreender esse problema.

Segundo Duval (2003. p. 12)

A originalidade da abordagem cognitiva está em procurar inicialmente descrever o funcionamento cognitivo que possibilite a um aluno compreender, efetuar de controlar ele próprio a diversidade dos processos matemáticos que lhe são propostos em situação de ensino.

As condições e os problemas de aprendizagem ganham destaque nas argumentações de Duval quando o autor propõe duas questões preliminares para o

desenvolvimento de sua teoria. Pensando na aprendizagem da matemática, quais os sistemas cognitivos que o aluno deve mobilizar para ter acesso aos objetos matemáticos? Os sistemas mobilizados para a compreensão de objetos matemáticos são únicos, isto é, diferente daqueles utilizados para o estudo de biologia, química, física e etc.?

Duval mostra que há diferenças entre essas abordagens cognitivas, e é baseado nessa argumentação que nasce a Teoria dos Registros de Representação Semiótica. De acordo com o autor as diferenças entre a atividade cognitiva requerida pela matemática e a necessária para outros domínios de conhecimentos, não devem ser procuradas nos conceitos da matemática e de outros domínios de conhecimento, mas na grande variedade e na diferença da importância das representações semióticas entre a matemática e outras áreas de conhecimento.

Somente por meio das representações semióticas é possível haver comunicação entre o sujeito e as atividades cognitivas do pensamento. Portanto, um dos primeiros passos para que haja apreensão do objeto matemático é compreender a forma com que cada representação influencia no desenvolvimento e na compreensão dos conceitos matemáticos.

Duval caracteriza a atividade matemática basicamente por meio de quatro tipos de registros de representações semióticas separadas em dois grupos: as discursivas, constituída pela Língua Natural e o Sistemas de Escritas, e as não discursivas, constituídas pelas Figuras Geométricas Planas e os Gráficos Cartesianos. Além disso, chama de registros multifuncionais as representações que utilizam a Língua Natural e as Figuras Geométricas Planas. Segundo o autor não é possível operacionalizar com esses registros; por exemplo, ao desenhar um retângulo ou um quadrado não é possível realizar operações com essa linguagem.

Outra classificação realizada pelo autor são os registros monofuncionais, segundo Duval esses registros, ao contrário dos multifuncionais, admitem tratamento, é o caso dos Sistemas de Escritas e dos Gráficos cartesianos.

Para Duval (2003, p. 16) há dois tipos de transformações que são extremamente diferentes

Os tratamentos são transformações dentro de um mesmo registro: por exemplo, efetuar um cálculo ficando estritamente no mesmo sistema de escrita ou de representações dos números; resolver uma equação ou um sistema de equações [...] as conversões são transformações de representações que consistem em

mudar de registro conservando os mesmos objetos denotados: por exemplo, passar da escrita algébrica de uma equação à sua representação gráfica.

As regras de tratamento diferem de um registro para outro, elas são trabalhadas dentro do registro onde foram formadas. O tratamento ocorre internamente a um determinado registro, sua natureza varia totalmente de um registro para outro, as regras e propriedades de cada registro devem ser literalmente seguidas.

O outro tipo de transformação não permanece no mesmo sistema, como ocorre no tratamento. Para Damm (2008, p. 180) a conversão de uma representação é a transformação dessa em uma outra representação em um outro registro, conservando a totalidade ou uma parte do objeto matemático em questão.

Um exemplo de conversão seria passar um registro representado pela lei de formação de uma função para a representação gráfica. Segundo Damm (2008, p. 181) o tratamento se estabelece internamente ao registro, já a conversão se dá entre os registros, ou seja, é exterior ao registro de partida. A conversão exige do sujeito o estabelecimento da diferença entre significado e significante de um conceito matemático.

A originalidade da atividade matemática está baseada na mobilização simultânea de ao menos dois desses registros, portanto deve sempre existir a possibilidade de haver conversão entre registros. Quando utilizada didaticamente por professores ou pesquisadores, os registros de representação têm como função a conceitualização e a busca pelo conhecimento, no entanto a essência não está nos registros de representações que estão sendo utilizados mas em como são usados.

Convém lembrar que as conversões não ocorrem de forma natural, assim há necessidade da interferência do professor ou pesquisador como mediador desse processo.

4 METODOLOGIA DE PESQUISA

Para desenvolver nosso estudo utilizaremos os princípios metodológicos da Engenharia Didática, conceito que nasce no início dos anos 80 para estudar a relação entre pesquisa e a ação no sistema didático, desenvolvida por Douady em sua tese de doutorado e sintetizada por Michèle Artigue (1996), com a finalidade de analisar o papel das realizações didáticas em classe, ou seja, a função das sequências didáticas realizadas.

Artigue (1996, p. 196) caracteriza a engenharia didática como: "[..] esquema experimental baseado sobre 'realizações didáticas' na sala de aula, isto é, na concepção, na realização, na observação e na análise de uma sequência de ensino".

Enquanto outros métodos de pesquisa usuais da didática fazem validações externas confrontando grupos experimentais com grupos testemunhas, a Engenharia Didática é baseada na validação interna, ou seja, a comparação é realizada no próprio grupo, entre os sujeitos da pesquisa, onde os dados da análise *a priori* são confrontados com análise *a posteriori*.

A Engenharia Didática apresenta-se em quatro fases: análise preliminar, análise a priori, experimentação, análise a posteriori e validação. As fases são apresentadas de forma separada, porém na prática elas são trabalhadas em conjunto, dentro das especificidades das fases que derem abertura para isso. A engenharia é um processo dinâmico, o pesquisador pode analisar determinada situação durante a realização das atividades e redirecioná-las, caso seja necessário, a fim de buscar novas estratégias tendo como base estudos realizados nas análises preliminares.

5 SITUAÇÃO ATUAL E PRÓXIMAS ETAPAS DA PESQUISA

Até o momento nosso objetivo era a delimitação do problema de pesquisa, bem como os objetivos geral e os específicos. Com essa definição demos início a elaboração da sequência de atividades que fará parte da *análise a priori* de nossa dissertação.

Optamos por intercalar atividades desenvolvidas no papel e lápis, com atividades trabalhadas no *Software*. Nos problemas desenvolvidos com papel e lápis buscamos analisar a passagem da Álgebra para a Geometria; naqueles desenvolvidos no *Graphequation* investigamos a passagem da Geometria para a Álgebra. Pensamos que as articulações Algébrico/Geométrico e Geométrico/Algébrico intercaladas podem colaborar para o desenvolvimento do conceito de Geometria Analítica.

Nessa perspectiva está prevista a aplicação de oito sessões de aproximadamente uma hora de duração cada uma. Apresentamos a seguir, como parte do trabalho ainda em desenvolvimento, uma das atividades previstas para nosso trabalho.

Atividade 05 – terceira sessão

Utilizando o Graphequation construa a região apresentada abaixo:

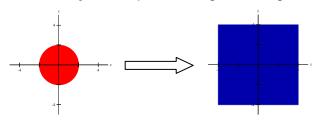


Explorando a passagem da linguagem geométrica para a algébrica omitimos os eixos cartesianos com o objetivo de não favorecer o uso de um tipo específico de estratégia. Com a exclusão dos eixos o aluno pode considerá-los como eixo de simetria ou não. Caso considere acreditamos que será um fator facilitador para a solução do problema. Como acreditamos que nem todos adotarão o ponto (0, 0) como centro do círculo, dificuldades relacionadas a translações do conjunto de pontos estarão presentes nessa atividade.

Acreditamos que a estratégia mais utilizada será a construção de um quadrado com um círculo sobreposto representados por inequações do tipo:

- Para o quadrado -a < x < a com b < y < b
- Para o círculo $x^2 + y^2 < r^2 \text{ com } r < a$

Nessa estratégia o aluno estaria considerando a parte azul da figura como o conjunto de pontos internos a um quadrado. As inequações devem ser plotadas nessa ordem, primeiro o quadrado, depois o círculo, caso ocorra o contrário, círculo e depois quadrado, o aluno terá como retroação do *Software* a seguinte imagem:



Diante dessa constatação o aluno poderá analisar o porquê de o círculo não aparecer no conjunto de pontos. Nesse caso, o conjunto de pontos azul cobriu o conjunto de pontos vermelhos. Seriam os alunos capazes de interpretar a região inicial — desenho apresentados a eles para ser reproduzido no *Software* - como um conjunto de pontos internos e outro conjunto de pontos externos a uma circunferência limitados por um quadrado?

Uma segunda estratégia que responderia essa questão seria pensar na parte azul da figura como um conjunto de pontos externos a uma circunferência e limitados por um quadrado. Um caso seria a utilização das inequações representadas por $x^2 + y^2 < r^2$ e $-x^2 - y^2 < -r^2$ limitada por um quadrado, isso é, por -a < x < a com -b < y < b sendo r

< a. Sem dúvida essa estratégia mostraria que o aluno tem um bom domínio não só de conceitos da Geometria Analítica como de pontos internos e externos a uma circunferência. Além disso, evidencia-se certa articulação entre a álgebra e geometria nesse tipo de raciocínio.

Em relação ao posicionamento da figura, podemos dizer que exige do aluno a mobilização de algumas propriedades presentes na fórmula algébrica da equação da circunferência. A variável eixo cartesiano, na sua ausência, é a responsável por diversas possibilidades de estratégias que podem ser abordadas. Para realizar a passagem do registro geométrico (desenho) para o algébrico (*Software*) o acadêmico obrigatoriamente terá que utilizar os eixos cartesianos, no entanto, com sua ausência na atividade proposta, terá a oportunidade de colocá-los na posição que considerar viável, essa atitude pode tornar a atividade extremamente fácil ou extremamente difícil.

Tomamos como exemplo a construção do plano cartesiano de forma que a figura apresentada torne-se uma região do quarto quadrante. Uma estratégia viável seria considerar o desenvolvimento da atividade a partir de uma circunferência de centro no ponto P_1 (0, 0), isto é, $x^2 + y^2 = r^2$. Assim a equação $(x - a)^2 + y^2 = r^2$ translada a circunferência para a direita paralelamente ao eixo x e $x^2 + (y^2 + b) = r^2$ translada a circunferência para baixo paralelamente ao eixo y, logo a equação $(x - a)^2 + (y + b)^2 = r^2$ translada a circunferência ao quarto quadrante.

Quanto ao acabamento do desenho (cores), basta considerar uma das duas estratégias anteriores, parte azul da figura como um conjunto de pontos delimitado por um quadrado com um círculo vermelho sobreposto, ou como um conjunto de pontos externos a uma circunferência limitados por um quadrado.

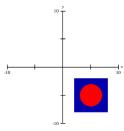
Acreditamos que uma das dificuldades presentes na resolução desse problema será a limitação em forma de quadrado dos pontos externos a circunferência. Para manter uma simetria entre o círculo e o quadrado – centro do circulo deve coincidir com o ponto de encontro das diagonais do quadrado - alguns conceitos devem ser mobilizados: ponto central (x, y) da uma circunferência, retas paralelas, ponto médio, função constante e inequação.

Uma estratégia seria descobrir o valor da coordenada (x, y) do centro da circunferência e a partir dessa definir a simetria. Um exemplo seria a equação $(x-5)^2 + (y+5)^2 = 4$ de centro C_1 (5, 5). Com essa informação o aluno poderá definir, por exemplo, 3 unidades para cima, para baixo, para a esquerda e para a direita

paralelamente aos eixo cartesianos como parâmetro para limitar os pontos externos a circunferência, assim terá:

$$(x-5)^2 + (y+5)^2 < 4$$

 $(x-5)^2 + (y+5)^2 > 4$ nas condições $2 < x < 8$ e $-2 > y > -8$.



Pode ocorrer de o aluno apresentar dificuldades para limitar essa região apresentando como resposta ao problema a inequação -2 < y < -8. Ao trabalhar com sinais negativos e inequaçãoes é preciso certo cuidado.

6 - Referências Bibliográficas

ARTIGUE, Michelle. **Engenharia Didática**. In: BRUN, J. (org.) Didáctica das Matemáticas. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. Cap 4. p. 193-217.

BITTAR, Marilena. **Diferentes aspectos do uso das novas Tecnologias na aprendizagem da matemática**. In: ENEM, 2001, UFRJ, 19 a 23/06/2001.

BITTAR, Marilena. A escolha do software educacional e a proposta didática do professor: Estudo de alguns exemplos em matemática. In: BELINE, Willian; COSTA, Nicole Meneguelo Lobo. (Org.) Educação Matemática, tecnologia e formação de professores: Algumas reflexões. 1ª Edição. Campo Mourão: FECILCAM, 2010, p. 215-242.

BORBA, Marcelo de Carvalho. PENTEADO, Miriam Godoy. **Informática e Educação Matemática**. 4ª edição, Belo Horizonte: Autêntica, 2010. Coleção Tendências em Educação Matemática.

BROUSSEAU, Guy. **Fundamentos e Métodos da Didáctica da Matemática**. In: BRUN, J. (org.) Didáctica das Matemáticas. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. Cap 1. p. 35-217.

DAMM, Regina Flemming. **Registros de Representação**. In: MACHADO, S. D. A. (Org.) Educação Matemática: uma (nova) introdução. 3ª Edição. São Paulo: EDUC, 2008, p. 167-188.

DUVAL, Raymond. **Registros de Representação Semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática**. In: MACHADO, S. D. A. (Org.) Aprendizagem em Matemática: Registro de Representação Semiótica. 1ª Edição. São Paulo: PAPIRUS, 2003, p. 11- 33.

FREITAS, José Luis. Magalhães. **Teoria das situações didáticas**. In: MACHADO, S. D. A. (Org.) Educação Matemática: uma (nova) introdução. 3ª Edição. São Paulo: EDUC, 2008, p. 77-111.

MACHADO, Silvia Dias Alcantara. **Engenharia didática**. In: _____. Educação Matemática: uma (nova) introdução. 3ª Edição. São Paulo: EDUC, 2008, p. 235-247

PAIS, Luiz Carlos. **Didática da Matemática, uma análise da influencia francesa**. 1ª edição, Belo Horizonte: Autentica, 2001. Tendências em Educação Matemática.

PAPERT, Seymour. **A Maquina das Crianças, repensando a escola na era da informática**. 1 ª edição, Porto Alegre: Artmed, 2008. Tecnologia Educacional.

VALENTE, José Armando. **Computadores e Conhecimento**: Repensando a Educação. Campinas, SP, NIED – Unicamp, 1993.