UM ESTUDO DA DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE PITÁGORAS EM LIVROS DIDÁTICOS

Marcilene Moreira dos Santos - UEMS

Antonio Sales - UEMS

RESUMO: Este artigo é parte de um trabalho mais amplo que vem sendo desenvolvido com acadêmicos de um curso de Licenciatura em Matemática envolvendo a demonstração em Matemática e, mais particularmente, a argumentação na aprendizagem da geometria. Esta etapa do processo consistiu em analisar a demonstração do teorema de Pitágoras em livros didáticos do ensino fundamental. Abrange um pouco da história e da natureza da demonstração e a teoria de análise adotada é a Teoria Antropológica do Didático. Os resultados apontam para a presença da predominante do processo que se apóia nas relações métricas no triângulo retângulo.

PALAVRAS-CHAVE: Teoria Antropológica do Didático. Teorema de Pitágoras. Demonstração. Livro Didático.

1. Introdução

Dentre os conceitos matemáticos que merecem especial atenção nos cursos de Licenciatura em Matemática destaca-se a demonstração. É considerada atividade de grande relevância proceder a demonstração de toda assertiva apresentada ao futuro professor de matemática.

Demonstrar é uma atividade considerada pelos especialistas em Matemática como de fundamental importância para essa ciência. Como veremos, no decorrer deste trabalho, vários autores têm buscado investigar o seu desenvolvimento histórico, descrever o seu caráter formal, definir a intensidade da sua contribuição na constituição da ciência matemática e, ultimamente, discutem também o seu papel no processo de educação do pensamento e na formação do jovem estudante.

Balacheff (1988) e Arsac (1992) vêem orientando teses de doutorado na perspectiva da educação enquanto Frege (*apud* DOMINGUES, 2002) e Domingues (2002) focalizam-na na perspectiva de um conteúdo matemático. Isso para citar alguns nomes.

Por outro lado temos como importante documento os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática, (PCN) (BRASIL, 1998), do ensino fundamental, que norteia políticas relativas ao ensino da Matemática e que também fazem, referência à demonstração.

Nessas e em outras fontes fomos buscar informações sobre a demonstração tanto do ponto de vista da sua constituição histórica como do ponto de vista do seu papel na educação, mais especificamente na formação de um pensamento matemático e cidadão.

Arsac que analisa a sua função educativa coloca a demonstração como um subproduto da argumentação e pertencente ao mesmo conjunto das conjeturas, explicações e provas, distinguindo-a, porém, das demais categorias mencionadas pelo seu rigor e formalismo apurado.

O estudo do valor educativo da demonstração se insere em um projeto mais amplo que consiste no estudo dos elementos pré-demonstrativos, como argumentação e prova, e a contribuição para a aprendizagem da geometria.

Este texto tem por objetivo estudar como os autores de quatro livros abordaram a demonstração do teorema de Pitágoras. É uma atividade de pesquisa que se insere em um trabalho mais amplo que, possivelmente, culminará em uma tese de doutorado sobre o papel da argumentação no estudo da geometria.

2. Síntese Histórica da Demonstração

A demonstração matemática tem uma longa trajetória histórica e divide-se entre as demonstrações formais e as demonstrações empíricas. Pode-se dizer que os egípcios de certa forma já praticavam a idéia de demonstração, embora essa fosse ainda de modo muito isolado, não utilizando o formalismo dedutivo das demonstrações atuais. Domingues (2002) nos informa que Próclo (Séc. V) em seu comentário ao livro Primeiro dos Elementos de Euclides, baseado numa história da geometria grega escrita por Eudemo de Rodes (séc II a. C) atribui a Tales a primazia nessa tarefa de conferir à Matemática esse status de ciência do rigor ao proceder as primeiras demonstrações.

Ainda segundo Domingues essa obra de Próclo que não chegou aos nossos tempos, afirma que:

> Tales foi o primeiro a ir para o Egito e levar para a Grécia, na volta, o saber [geometria] que encontrou. Ele descobriu muitas proposições e levou para seus sucessores os princípios adjacentes a muitas obras, valendo-se de casos gerais em alguns casos e em outros métodos empíricos (DOMINGUES, 2002).

Em decorrência desse feito coube a Tales de Mileto o mérito de ser o primeiromatemático da história. Acredita-se, no entanto, que antes de Tales descobrir as várias propriedades matemáticas estas já eram conhecidas pelos egípcios.

A Tales é conferido o título de primeiro matemático pela sua capacidade de perceber a possibilidade de desenvolver o processo de formalização desse conhecimento e fazer asserções com base em um raciocínio dedutivo.

A Matemática Pura, formal e dedutiva, desenvolveu-se principalmente devido a Escola Pitagórica, onde Tales, segundo alguns autores (BOYER, 1996) exerceu alguma influência, mesmo que indireta, por ser contemporâneo de Pitágoras, embora um pouco mais velho. Acredita-se que os pitagóricos, por volta do ano 400 a.C, podem ter dado um grande salto com relação à dedução matemática, desenvolvendo encadeamentos de raciocínio e encadeamentos de propriedades para deduzir outras propriedades para certas partes da geometria, contribuindo para a resolução de poliedros regulares e polígonos.

Mas até o final do século XIX, a demonstração matemática tinha como função convencer racional e também psicologicamente da veracidade de uma asserção. A partir de então uma análise mais profunda, com o uso da evidência intuitiva, tomou-se necessária.

Dentre os matemáticos que contribuíram para que esta fosse reformulada devemos citar G. Frege (1848-1925) que contribui para o conceito de demonstração formal. Tarski (*apud* DOMINGUES, 2002) em um artigo em que discute como se dá a construção de uma sequência de proposição onde que a primeira delas é um axioma e cada uma das demais são um axioma ou um teorema, dedutível das outras, que a precedem na sequência. Afirma que a última proposição é aquilo que se queria demonstrar.

É conhecido o embate que se travou, nas primeiras décadas do século XX, entre as três correntes da filosofia matemática, conhecidas como formalismo, logicismo e intuicionismo. A demonstração estava no centro do debate e a visão formalista da matemática foi a que prevaleceu e, dessa forma, a demonstração está tão carregada desse formalismo que, na visão de Lakatos (1978), chega ser estéril do ponto de vista educacional.

3. A Lógica da Demonstração

Davis e Hersh (1985) apresentam o famoso teorema de Pitágoras, mas está exposto através de uma demonstração formal onde só podemos acompanhar a argumentação do mesmo através da ilustração da figura dada por ele, devido ao grau de complexidade. Para Silva (2002) uma demonstração deve estar passível da compreensão humana não deixando espaço para dúvida de sua veracidade, deve conter um numero finito de proposições logicamente encadeadas, onde esses modos de encadeamentos sejam conhecidos, e para isso é necessário que as demonstrações estejam dentro de um determinado espaço lógico, ou seja, dentro de um sistema dedutível, ou mais precisamente inserido em um sistema formal com vocabulários e regras conhecidas, caso contrário não seria possível se ter um encadeamento lógico. Encadeamento lógico é muito valorizado pelos PCN. Este é essencial para o desenvolvimento da aprendizagem do aluno. A lógica esta ligada a matemática e não se pode dizer que a demonstração está inserida em um contexto educativo sem que haja um encadeamento lógico onde o aluno esteja desenvolvendo a criatividade, a intuição, a capacidade de analisar e criticar, podendo assim interpretar os fatos e os fenômenos, possibilitando o desenvolvimento da capacidade de argumentar dentro de um determinado espaço de conhecimento adquirido por ele no decorrer de sua trajetória escolar e possibilitando dessa forma que ele possa evoluir para a realização de demonstrações formais por iniciativa própria.

Por várias vezes a demonstração formal foi citada, mas na realidade não houve esclarecemos sobre o que realmente a lógica define como sendo uma demonstração. No artigo publicado por Bicudo (2002), encontramos que demonstração caracteriza o que vem a ser um sistema formal. O formal é a parte "sintática de um sistema axiomático".

Um sistema formal é composto de três partes, sendo que a primeira delas é constituída pela linguagem. Uma linguagem com símbolos próprios que se constituem em um conjunto de fórmulas. Símbolos e fórmulas devidamente especificados caracterizam uma linguagem específica.

"A parte seguinte de um sistema formal consiste em seus axiomas. A única exigência feita é que cada axioma seja uma fórmula da linguagem do sistema formal" (BICUDO 2002).

A terceira parte de um sistema formal é constituída pelas regras de inferências, que nos permitem concluir teoremas a partir dos axiomas.

Cada uma dessa regras contém explicitadas as condições que permitem fazer inferências conclusivas a partir das condições estabelecidas inicialmente, as hipóteses, e as condições encontradas no processo através de procedimentos que envolvem o uso da linguagem e das propriedades. Textualmente, Bicudo afirma que

> Uma regra em um sistema formal F é finita se tiver um número finito de hipóteses. Seja, agora, F um sistema formal em que todas as regras sejam finitas. Então, uma DEMONSTRAÇAO em F é uma seqüência finita de fórmulas, em que cada uma seja ou um axioma, ou seja, uma conclusão de uma regra cujas hipóteses precedam essa fórmula na seqüência dada. Se A for uma formula em uma demonstração P, diremos que P é uma DEMONSTRAÇÃO de A. Uma fórmula A de F será um teorema de F se existir uma demonstração de A. [...] devemos deduzir que a "demonstração matemática" é algo, cujo modelo é uma demonstração de um sistema formal [..] (BICUDO, 2002).

Para um melhor esclarecimento citamos Silva:

> demonstração como tendo várias finalidades dentre elas estabelecer a veracidade relativa de um enunciado (tese da demonstração). A veracidade da tese depende claro, da veracidade dos enunciados propostos na

> demonstração, esta é suficiente para aquela. Embora exista um relacionamento entre ambas elas são independentes entre si, em uma demonstração as conexões lógicas que sustentam um enunciado pode não induzir á convicção (essa possa às vezes ser tão longa que não é possível acompanhá-la). Mas uma demonstração matemática deve conter finitas proposições logicamente encadeadas (ou seja, embora ela possa conter um numero infinito de proposições, mas talvez seja possível descrevê-la finitamente) e oferecê-la a alguém com a finalidade de convencê-la da veracidade da tese demonstrada e para isso é necessário que as demonstrações estejam dentro de um determinado espaço lógico, ou seja, um sistema dedutível (formal determinado com um vocabulário, símbolos conhecidos) (SILVA, 2002).

4. O Quadro Atual da Demonstração na Educação

Uma demonstração é uma prova. Na concepção de Arsac é uma prova formal e cabal tendo como objetivo comprovar a veracidade de uma tese, um resultado que se conhece de antemão. Para Balacheff é o desenvolvimento de um raciocínio encadeado.

Para demonstrar, isto é, produzir uma demonstração necessita-se de muito domínio do assunto, certa dose de astúcia para perceber estruturas que o olhar comum não distingue e capacidade para estabelecer relações sutis. Para compreendê-la é necessária muita abstração. Defende-se a sua formalização e rigor na dedução com base no princípio de que após ser concluída não pode deixar espaço para nenhuma dúvida tendo em vista que não será analisada somente por um grupo de especialistas e aceita pelos demais como sendo real. Sabemos que a demonstração formal é utilizada em várias aulas por vários professores e em vários países do mundo. Será utilizada na resolução de vários problemas semelhantes. Vindo daí a sua importância e a relevância do seu estudo. Uma proposição demonstrada torna-se ferramenta para outras demonstrações e pode ser aplicada na resolução de problemas.

A demonstração, da forma como é abordada nas escolas, dizendo melhor, nos cursos de Licenciatura em Matemática, não é objeto de ensino. Geralmente faz-se a demonstração diante dos alunos para que acompanhem, copiem e repitam até que a seqüência de procedimentos seja memorizada. Como conseqüência desse procedimento cria-se uma prática que não ultrapassa a sala de aula da universidade porque o acadêmico não percebe a necessidade de demonstrar (BALACHEFF, 1988). O estudo desse conteúdo, nessa perspectiva, se limita a uma prestação de contas para efeitos de se conseguir nota na prova e, dessa forma, quando esse acadêmico se toma professor da educação básica, a demonstração não é incluída no seu programa de trabalho. Osório (2002) salientou que está implícito na prática dos professores da educação básica que eles entendem não ser justo propor aos alunos processos que exijam recursos intelectuais equivalentes ao de um matemático. A atividade de demonstrar, sem uma compreensão do processo e apenas como quesito para a nota, produziu um desgaste no conceito.

Em conseqüência o desenvolvimento do raciocínio dedutivo que é um dos objetivos do ensino da matemática no nível da educação básica não chega ser estimulado. Porém, o mai grave de tudo isso é que o profissional que é formado nessa escola não sai preparado para ensinar demonstração aos alunos do ensino fundamental tanto pelo desgaste ocorrido como por considerá-la fora do alcance do aluno (OSORIO, 2002).

5. A Demonstração nos PCN de Matemática

Sendo os PCN um documento oficial esperamos encontrar neles os indicativos para uma prática docente que busca proporcionar ao aluno uma formação para o exercício pleno da cidadania. Esperamos encontrar também nele os conteúdos matemáticos que devem constar no plano de trabalho do professor bem como a devida justificativa da importância educacional desse conteúdo. Sendo que a demonstração, conforme visto em parágrafos anteriores é um conteúdo muito valorizado pelos matemáticos pela sua contribuição para garantir a validade de uma proposição, mas que, quando se trata do aspecto educacional, somente em décadas recentes que pesquisadores como Nicolas Balacheff e Gilbert Arsac vêm identificando a sua contribuição educativa, sentimos a necessidade de buscar nos PCN o respaldo teórico para projetos de orientação para a prática docente.

Do ponto de vista de seu valor educativo encontramos nos PCN que ela deve ocorrer, principalmente, no quarto ciclo. Ou seja, a sua presença deve estar na sala de aula a partir do ensino fundamental. Diz ainda o documento que não pode ser utilizada somente demonstrações empíricas, mas, devem ser exercitadas as demonstrações formais. Nesse nível de estudo, segundo o referido documento, os alunos poderão estar utilizando axiomas e teoremas tendo em vista que esse conhecimento e a manipulação desses conceitos matemáticos abrem espaço para a elaboração de conjecturas. Mas para tal é preciso que ele tenha um bom desenvolvimento lógico. É a lógica que permite a compreensão dos processos e assim facilita a argumentação bem como a demonstração.

6. A Teoria de Analise

A análise dos livros didáticos tem como suporte da Teoria Antropológica do Didático (TAD) (CHEVALLARD, 2001).

A TAD como uma teoria da atividade humana eficaz pressupõe que a praxeologia[19] é composta de uma tarefa, que neste caso é o estudo do teorema de Pitágoras, uma técnica, isto é, um modo de fazer, um modo de resolver a tarefa. No entanto, segundo ainda os pressupostos da TAD, toda técnica utilizada tem uma justificativa para o seu funcionamento. Essa justificativa, que tem suporte em uma teoria, chama-se tecnologia. A tecnologia, portanto, é a explicação da técnica, uma explicação racional.

Essa visão pressupõe toda atividade desenvolvida com o objetivo de estudar matemática se constitui de dois tipos de organização inseparáveis, na prática. A organização didática (OD) e organização matemática (OM). A primeira é composta de tarefas didáticas, técnicas e tecnologias didáticas. Enfim, está no campo dos aspectos pedagógicos da prática docentes. Mas ela também pode ser uma organização do aluno, daquele aluno que estuda em busca da solução de um problema específico: o problema da sua aprendizagem da Matemática.

A segunda organização (OM) está relacionada com a disposição em que os objetos matemáticos são apresentados.Com a sequência em que são dispostos naquela OD. Como esses objetos se relacionam entre si naquele contexto de aprendizagem. Porém, esta distinção é puramente teórica. Na prática de estudo da Matemática há um imbricamento dessas duas organizações.

7. O TP nos Livros Didáticos

Foram analisados quatro livros do 9º ano (8ª série),sendo todos aprovados pelo PNLD 2008. O critério de escolha dos livros foi o da acessibilidade tendo em vista que em cidades do interior as bibliotecas das escolas nem sempre possuem exemplares de todas as coleções aprovados. Quando tem nem sempre há disponibilidade para empréstimo. No texto as coleções estão identificadas pela letra A, B, C e D. As figuras citadas e os livros analisados estão no anexo.

O tema escolhido foi o teorema de Pitágoras (TP) porque consta em todos os livros analisados.

7.1. Coleção A

O livro desta coleção traz, de início, um pequeno resumo sobre quem foi Pitágoras e logo após o teorema e sua fórmula. Em seguida direciona a OD para a demonstração formal recorrendo às relações métricas no triângulo retângulo. Uma OD do estilo clássico.

[19] Praxeologia é o estudo da práxis que, por sua vez, é uma atividade racional, produto de uma reflexão teórica.

Um capítulo inteiro é dedicado ao estudo das relações métricas no triângulo retângulo e tem a demonstração como ponto culminante.

Do ponto de vista da TAD a técnica utilizada foi construir um triângulo retângulo maior, transformá-lo em dois triângulos retângulos menores, com se processa na maioria dos livros que adotam a forma clássica de abordar o assunto, e ir diretamente para a demonstração formal. A tecnologia consistiu na utilização de relações referentes aos triângulos retângulos que já haviam sido estudadas em atividades anteriores.

7.2 Coleção B

A OD dos autores dessa coleção consistiu em iniciar com o teorema. Fornece a fórmula e, diferentemente de outros autores que procedem uma demonstração formal, estes autores procuram conduzir o aluno à compreensão utilizando como recurso de comunicação um objeto ostensivo clássico. Esse ostensivo consiste na figura em que um quadrado, composto de quadradinhos, e outros dois quadrados semelhantes são construídos um sobre cada cateto. Como esses quadrados estão quadriculados é possível fazer a verificação de que o número de quadradinho de um (o que tem por lado a hipotenusa) é igual à soma do número de quadradinhos dos outros dois quadrados. É também uma figura clássica.

O passo seguinte é a demonstração formal e a tecnologia utilizada consiste nas relações métricas do triângulo retângulo. Porém, diferentemente dos autores anteriormente citados nessa OD os passos da demonstração são explicitados com mais detalhes, inclusive chamando a tenção para alguns passos da fatoração algébrica utilizada no processo.

A OD contempla ainda a demonstração utilizando como objeto ostensivo um quadrado de lado *a* inscrito em um quadrado de lado *b+c* de modo que *a* seja a hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos *b* e *c* (figura nº 1).

Como continuação é proposta ao aluno a tarefa de demonstra o referido teorema a partir de uma outro quadrado composto por um quadro menor, no centro, de lado *b-c* e quatro triângulos retângulos de catetos *b* e *c* e cuja hipotenusa é o lado quadrado maior (figura nº 2).

7.3 Coleção C

A OD desses autores consiste apresentação *a priori* do teorema através das relações métricas no triângulo retângulo. Não há muito detalhamento e nem a utilização de outros desenhos. Dessa OD faz parte um resumo história da Escola Pitagórica e a história do teorema, pós Pitágoras incluindo a citação de outras demonstrações (figura nº 1 e 3) incluindo a que pareceu no trabalho do “matemático hindu Bháskara (c.1114-1185) (figura nº

2) acompanhada apenas da palavra “Veja” e a de Garfield (figura nº 4) sem mostrar o processo, exceto o dessas duas últimas.

7. 4 Coleção D

Esses autores apresentam uma OD particular. Inicia propondo uma atividade de construir, com barbante, uma “corda de nós” semelhante à utilizada pelos egípcios na medição das terras às margens do Nilo e tentar formar um triângulo retângulo a partir dele.

Recorrem em seguida ao clássico exemplo de representar os quadrados sobre a hipotenusa e sobre os catetos divididos em quadradinhos para a verificação da relação entre eles. Representação essa que denominam de “demonstração do teorema de Pitágoras feita por Euclides”.

São apresentadas, em seguida, duas demonstrações utilizando o recurso tecnológico da figura nº1 e da figura nº 3, e as relações entre áreas. Houve o cuidado de destacar, em ambos os casos, os ângulos retos, dando ênfase que se trata de áreas e destacando a relação entre essas áreas. Portanto a tecnologia utilizada para validar a técnica usada na demonstração consistiu em mostrar que há uma equivalência entre áreas. Essa técnica não é muito usual.

Considerações finais

O teorema de Pitágoras ocupa lugar de destaque em todos os livros estudados. Essa proeminência se justifica tendo em vista o destaque se que se dá à Escola Pitagórica, suas excentricidades e produtividade. Devido à sua contribuição à ciência matemática e ao mito que e criou em torno do personagem que lhe dá o nome.

Algumas técnicas e tecnologias se repetem tais como a clássica que tem suporte tecnológico nas relações métricas no triângulo retângulo.Não é apenas a mais usual mas é também mais complexa tendo em vista que se utiliza de recursos abstratos. É a que utiliza de menos recursos visuais. É a mais utilizada porque é a que melhor atende os pressupostos da corrente formalista que norteia a praxeologia da maioria dos docentes que atuam nos cursos de Licenciatura em Matemática.

Aquelas técnicas que utilizam a tecnologia da equivalência de áreas aparecem, às vezes, como curiosidade ou como técnica complementar.

8. Referências

ARSAC, Gilbert, et al. **Initiation au raisonnement dédutctif au colleg**e. Lyon, Fr: Presses Universitaires de Lyon, 1992.

BALACHEFF, Nicolas. **Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de Collège.Grenoble**, Fr: Université Joseph Fourier, 1988 (Tese de Doutorado)

BICUDO, Irineu. Demonstração em Matemática. **BOLEMA**, Ano 15, n. 18 (set. 2002), p. 79-90

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BOYER, Carl B. **História da Matemática**. 2.ed. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 1996.

CHEVALLARD , Yves; BOSCH, Marianna; GASCÓN, Josep. **Estudar Matemática**: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem

DAVIS, Philip J.; HERSH, Reuben. **A Experiência Matemática**. 2.ed. Rio de Janeiro:Francisco Alves, 1985

DOMINGUES, Hygino H. **A Demonstração ao Longo dos Séculos**. BOLEMA, Ano 15, n. 18 (set. 2002), p. 55-67.

LAKATOS, Imre. **A Lógica do Descobrimento Matemática**: provas e refutações. Rio de Janeiro, Zahar Editores, 1978.

OSORIO, Victor Larios. Demostraciones y conjeturas en la escuda media. **Revista Eletctrónica de Didáctica de las Matemáticas**. Afio 2, num.3. Enero 2002.Disponível em: < http://www.uag.mxlmatematicas/redm/> Acesso em: ago 2007.

SILVA, Jairo José da. A Demonstração Matemática da Perspectiva Lógica Matemática. **BOLEMA,** Ano 15, n. 18 (set. 2002), p. 68-78.

ANEXO

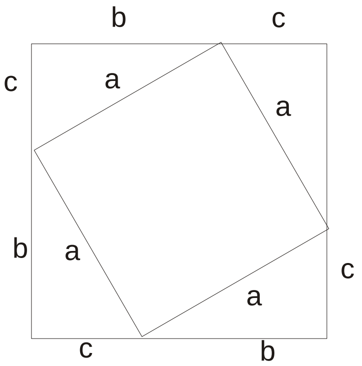

Figura nº 1

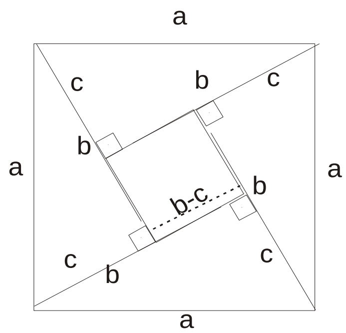

Figura nº 2

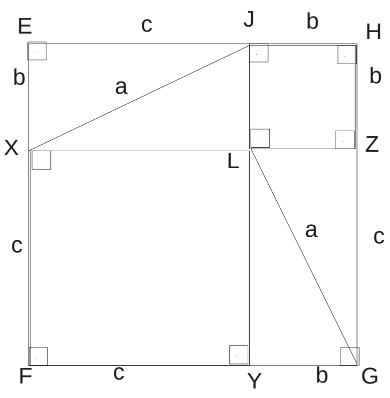

Figura nº 3

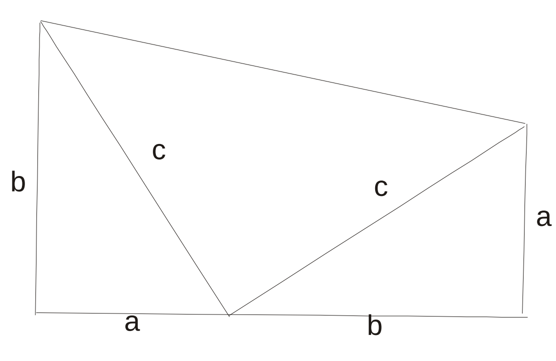

Figura nº 4

LIVROS ANALISADOS

CAVALCANTE, Luis Carlos, SOSSO, Juliana, VIEIRA, Fabio; POLI, Ednéia. **Para Saber Matemática**: 8º série. São Paulo: Saraiva, 2006.

CENTURION, Marília; JAKUBOVIC, José; LELLIS, Marcelo**. Matemática na Medida Certa (novo)**: 8ª serie. São Paulo: Scipione, 2003.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MACHADO, Antonio. **Matemática e Realidade**: 8ª série. 5. ed. São Paulo: Atual, 2005.

MORI, Iracema; SATIKO, Dulce. **Matemática**: idéias e desafios: 8ª série.14. ed.reformulada.São Paulo: Saraiva, 2006.